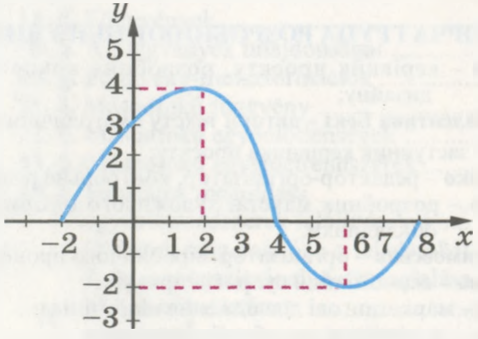
H. P. BEVZ, V. H. BEVZ

Algebra

Tankönyv az általános oktatási rendszerű tanintézetek 9. osztálya számára

Ajánlotta Ukrajna Oktatási és Tudományos Minisztériuma



Ez a tankönyv a 2009. évi összukrajnai tankönyvpályázat nyertese, melyet Ukrajna Oktatási és Tudományos Minisztériuma hirdetett meg a tizenkétosztályos iskolák tankönyvellátása céljából

ЛЬВІВ
„СВІТ"
2009

ЧОПСЬКА
СЕРЕДНЯ ШКОЛА № 2

УДК 512 (075.3)
ББК 22.1я721
Б36

Перекладено з видання

Бевз Г. П. Алгебра: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. – К.: Зодіак-ЕКО, 2009.

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України (наказ від 2 лютого 2009 р., № 56)

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Відповідальні за підготовку до видання підручника: ***Н. С. Прокопенко*** *– головний спеціаліст Міністерства освіти і науки України;* ***О. О. Литвиненко*** *– методист вищої категорії Інституту інноваційних технологій і змісту освіти.*

Експерти рукопису підручника: ***І. В. Горобець*** *– вчитель-методист ліцею „Перспектива", заступник директора, м. Запоріжжя;* ***О. В. Горбачик*** *– учитель Кузнецовської гімназії, Рівненська область;* ***Л. М. Кастранець*** *– методист Чортківського РМК, Тернопільська область;* ***І. Г. Величко*** *– доцент кафедри алгебри і геометрії Запорізького національного університету, кандидат фізико-математичних наук;* ***Ю. А. Дрозд*** *– завідувач відділу алгебри Інституту математики НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор;* ***О. І. Глобін*** *– старший науковий співробітник лабораторії математичної та фізичної освіти АПН України, кандидат педагогічних наук*

ТВОРЧА ГРУПА РОЗРОБНИКІВ ПІДРУЧНИКА

Юрій Кузнецов – керівник проекту, розробник концепцій: структури, дизайну;
Григорій Бевз, Валентина Бевз – автори тексту і методичного апарату;
Олег Костенко – заступник керівника проекту;
Наталія Демиденко – редактор-організатор, контрольне редагування;
Андрій Віксенко – розробник макета, художнього оформлення, художник обкладинки;
Валентина Максимовська – організатор виробничого процесу;
Галина Кузнецова – економічний супровід проекту;
Роман Костенко – маркетингові дослідження підручника;
Андрій Кузнецов – моніторинг апробації підручника

Бевз Г. П.

Б36 Алгебра: Підручник для 9 кл. загальноосвіт. навчальних закладів із навчанням угорською мовою / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз // Переклад угорською мовою А. А. Варга. – Львів: Світ, 2009. — 288 с.: іл.

ISBN 978-966-603-615-8.

УДК 512(075.3)
ББК 22.1я721

© Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, 2009
© Видавництво «Зодіак-ЕКО», 2009
© Художнє оформлення. А. М. Віксенко, 2009
© Концепції: структури, дизайну Ю. Б. Кузнецов, 2009
© А. А. Варга, переклад, 2009

ISBN 978-966-603-615-8 (угор.)
ISBN 978-966-7090-64-7 (укр.)

TARTALOM

Kedves kilencedikesek! 5

1. fejezet



EGYENLŐTLENSÉGEK

1. §. Általános tudnivalók az egyenlőtlenségekről 7
2. §. A számegyenlőtlenségek tulajdonságai 16
3. §. Kettős egyenlőtlenségek 22
4. §. Egyváltozós egyenlőtlenségek megoldása 28
5. §. Intervallumok 38
6. §. Egyváltozós egyenlőtlenség-rendszerek 48
7. §. Egyenlőtlenségek bizonyítása 56

Oldjátok meg önállóan a feladatokat! 62
A fejezet tartalmának összefoglalása 63
Matematikatörténet 64

Felkészülés a témaismereti értékelésre

1. sz. tesztfeladat 66
Típusfeladatok az 1. sz. dolgozathoz 67

2. fejezet



MÁSODFOKÚ FÜGGVÉNY

8. §. Függvények 69
9. §. A függvények tulajdonságai 80
10. §. Függvény-transzformációk 91
11. §. Másodfokú függvény 103
12. §. Másodfokú egyenlőtlenségek 113
13. §. Másodfokú egyenletrendszerek 122
14. §. Feladatok megoldása egyenletrendszerek felállításával 133

Oldjátok meg önállóan a feladatokat! 142
A fejezet tartalmának összefoglalása 143
Matematikatörténet 144

Felkészülés a témaismereti értékelésre

2. sz. tesztfeladat 146
Típusfeladatok a 2. sz. dolgozathoz 147

3. fejezet



AZ ALKALMAZOTT MATEMATIKA ELEMEI

15. §. Matematikai modellezés 149
16. §. Százalékszámítás 163
17. §. Közelítő számítások 175
18. §. Véletlen események és a valószínűségük 183
19. §. Statisztikai ismeretek 193
Oldjátok meg önállóan a feladatokat! 204
A fejezet tartalmának összefoglalása 205
Matematikatörténet 206

Felkészülés a témaismereti értékelésre
3. sz. tesztfeladat 208
Típusfeladatok a 3. sz. dolgozathoz 209

4. fejezet



SZÁMSOROZATOK

20. §. A sorozat fogalma 211
21. §. Számtani sorozat 221
22. §. Mértani sorozat 231
23. §. Összegszámítási feladatok 242
Oldjátok meg önállóan a feladatokat! 251
A fejezet tartalmának összefoglalása 252
Matematikatörténet 253

Felkészülés a témaismereti értékelésre
4. sz. tesztfeladat 254
Típusfeladatok a 4. sz. dolgozathoz 255

ISMÉTLŐ FELADATOK ÉS GYAKORLATOK

Egyenlőtlenségek 256
Függvények és grafikonok 257
Az alkalmazott matematika elemei 260
Számsorozatok 263

Emelt szintű feladatok és gyakorlatok 266
A 7–8. osztályok tananyaga röviden 272
Feleletek és útmutató a feladatmegoldáshoz 281
Tárgymutató 286

Kedves kilencedikesek!

Ez az algebra tankönyv ugyanolyan szerkezetű, mint az a könyv, amelyből a 8. osztályban tanultatok. Találtok benne elméletet, példákat és gyakorlatokat, önálló munkát igénylő feladatokat, az önellenőrzést szolgáló kérdéseket, matematikatörténeti utalásokat.

A tankönyv elméleti részeinek a tanulása során különleges figyelmet kell fordítanotok a *dőlt* betűkkel szedett szavakra. Az így kiemelt szavak matematikai kifejezések, amelyeket tudnotok kell értelmezni, és meg kell jegyeznetek őket. A **félkövér** vagy **kék** betűkkel kiemelt mondatok – szabályok vagy fontos matematikai állítások. Ezeket is meg kell jegyeznetek, és tudnotok kell alkalmazni őket a példák és gyakorlatok megoldásánál.

A tankönyvben a matematikai folklór tárgykörébe tartozó feladványok, ismert matematikusok feladatai és történelmi matematikai rejtvények találhatók. Az algebra, a matematika egészéhez hasonlóan, nemcsak a tudományos megismerés fontos eszköze, hanem a tanulók logikai gondolkodását fejlesztő jó módszer és az egyetemes emberi kultúra része.

Minden paragrafusban megtalálható a *Szeretnétek többet tudni*? rubrika, amelyben a matematika iránt komolyabban érdeklődő tanulók találhatnak bővebb ismereteket, a jelölése . Az *Ellenőrizzétek magatokat*! rész kérdéseinek megválaszolásával rögzíthetitek, általánosíthatjátok és rendszerezhetitek az adott témakör tanulása során megszerzett ismereteiteket, tudásotokat és készségeiteket. Az *Oldjuk meg együtt*! rubrikában a legfontosabb gyakorlati feladatok megoldására találtok példákat. Ezekkel ajánlatos még azt megelőzően megismerkednetek, hogy hozzákezdtek a házi feladat elkészítéséhez (jelölése: »).

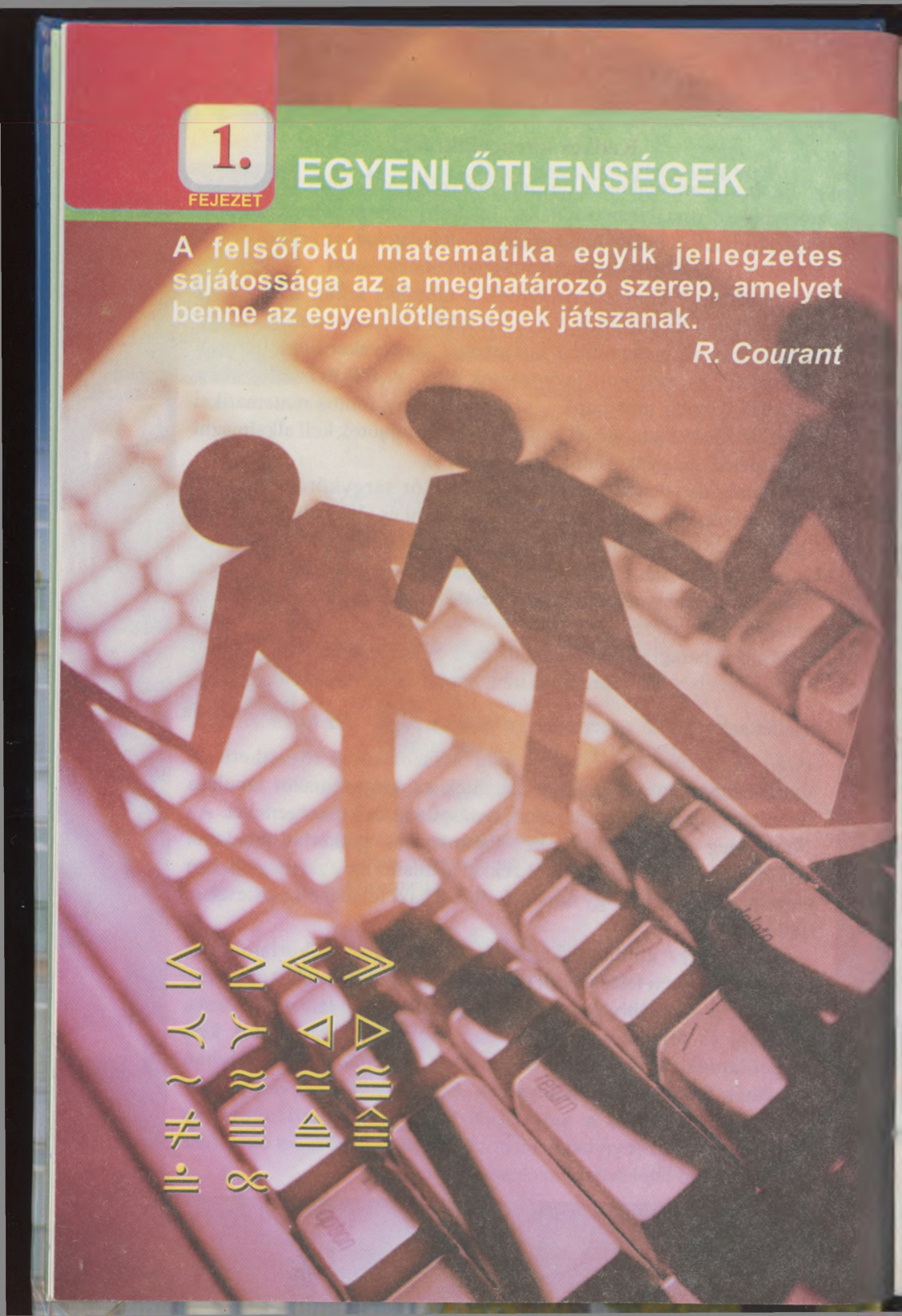
A tankönyv különböző nehézségi fokozatú gyakorlatokat is tartalmaz a szóbeli feladatoktól kezdve a meglehetősen nehéz példákig, feladatokig. Az utóbbiak sorszáma után csillag (*) található. Ezeket a példákat és feladatokat elsősorban azoknak a tanulóknak kell megoldaniuk, akik később szakosított matematikai osztályban szeretnék folytatni tanulmányaikat. A *Felkészülés a témaismereti értékelésre* rubrika a megtanult tananyag ismétlésében és rendszerezésében segít benneteket. A *Matematikatörténet* című rész minden tanuló látókörének szélesítését szolgálja.

1. FEJEZET

EGYENLŐTLENSÉGEK

A felsőfokú matematika egyik jellegzetes sajátossága az a meghatározó szerep, amelyet benne az egyenlőtlenségek játszanak.

R. Courant



Az *egyenlőtlenségeket* ugyanolyan gyakran használják, mint az egyenlőségeket. A segítségükkel célszerű módon modellálhatók a nagyobb – kisebb és a rövidebb –hosszabb relációk. Akárcsak az egyenlőségek, az egyenlőtlenségek is kifejezhetők számokkal és változókkal. Egyes egyenlőtlenségeket bizonyítanak, másokat megoldanak.

A fejezet fő témái:

- **a számegyenlőtlenségek tulajdonságai;**
- **kettős egyenlőtlenségek;**
- **egyváltozós egyenlőtlenségek megoldása;**
- **egyváltozós egyenlőtlenség-rendszerek.**

1.§. ÁLTALÁNOS TUDNIVALÓK AZ EGYENLŐTLENSÉGEKRŐL

Ha az a szám nagyobb vagy kisebb a b számnál, akkor a következőképpen írjuk le: $a < b$ vagy $a > b$. Például

$$3 < 5, \quad -7 > -13.$$

A „több" és a „kevesebb" reláció tartalma a következő meghatározással általánosítható.

Az a számot a b számnál nagyobbnak tekintjük, ha az $a - b$ különbség pozitív; az a szám kisebb a b számnál, ha az $a - b$ különbség negatív.

Mivel az $a - b$ különbség lehet negatív, pozitív vagy nulla, így a következő három egyenlőtlenség közül egy és csakis egy lehet igaz:

$$a > b, \quad a < b, \quad a = b.$$

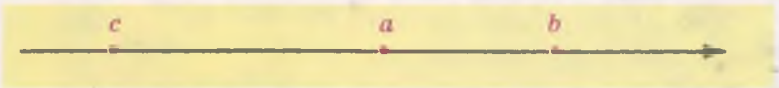
Az előző meghatározás segítségével összehasonlíthatunk számokat, azaz megállapíthatjuk, melyik a nagyobb és melyik a kisebb. Például ahhoz, hogy összehasonlítsuk a $\frac{4}{9}$ és $\frac{11}{25}$ törtet, meghatározzuk a különbségüket:

$$\frac{4}{9} - \frac{11}{25} = \frac{4 \cdot 25 - 11 \cdot 9}{9 \cdot 25} = \frac{1}{225}.$$

A törtek különbsége pozitív, tehát $\frac{4}{9} > \frac{11}{25}$.

A számegyenesen a kisebb számnak megfelelő pont a nagyobb számot jelölő ponttól balra helyezkedik el. Például az 1. ábra a következő relációt szemlélteti:

$$c < a, \quad a < b, \quad c < b.$$



1. ábra

Az egyenlőtlenség a többi között a kisebb – nagyobb, lejjebb – feljebb, rövidebb – hosszabb, szűkebb – tágabb, vékonyabb – vastagabb olcsóbb – drágább, fiatalabb – idősebb relációk absztrakt matematikai modellje. A < (kisebb) és > (nagyobb) jelek mellett gyakran használjuk még a ≤ kisebb vagy egyenlő (nem nagyobb) és a ≥ nagyobb vagy egyenlő (nem kisebb) jeleket.

Az $a \le b$ jelölés azt jelenti, hogy $a < b$ vagy $a = b$.

Az $a \ge b$ jelölés azt jelenti, hogy $a > b$ vagy $a = b$.

Például kijelenthető, hogy $2 \le 5$, $4 \ge 4$, $-\frac{1}{2} \le -0{,}5$.

A < és > jelek a ***szigorú egyenlőtlenség jelei***. Ezek a jelek ellentétesek, mert ha $a < b$, akkor $b > a$ és ez fordítva is igaz. A ≤ és ≥ jelek is ellentétesek ***és nem szigorú egyenlőtlenségeknek*** nevezzük őket. A <, >, a ≤ és ≥ jeleket ***relációs jeleknek*** nevezzük.

Ha két kifejezést relációs jellel összekapcsolunk, akkor *egyenlőtlenséget* kapunk.

Egyenlőtlenségek példái a $3 < \sqrt{10}$, $a^2 + b^2 \ge 2ab$, $3x - 5 > 0$.

Azt a kifejezést, amely a relációs jel jobb vagy bal oldalán van, az egyenlőtlenség jobb vagy bal oldalának nevezzük. Például az $5x + 4 < 8$ egyenlőtlenség bal oldala az $5x + 4$ kifejezés, a jobb oldala pedig a 8 (bármely számot szintén kifejezésnek tekintünk).

Azt az egyenlőtlenséget, melynek mindkét oldalán szám áll, *számegyenlőtlenségnek* nevezzük. A számegyenlőtlenségek lehetnek

igazak és hamisak. Például a $2 < 3$, $\sqrt{2} \geq 1$, $-3 < -5$ egyenlőtlenségek közül az első kettő igaz, a harmadik pedig hamis, mivel -3 nagyobb, mint -5.

A ***változót tartalmazó egyenlőtlenségek*** a változó néhány értéke esetén lehetnek igazak, ugyanakkor más értékek esetén hamisak. Például a $2x + 3 > 5$ egyenlőtlenség az $x = 2, 3, 4, 5$ értékek mellett igaz, de az $1, 0, -1, -2$ értékeknél hamis. Azt mondjuk, hogy a $2, 3, 4, 5$ értékek az egyenlőtlenséget igazzá teszik, az $1, 0, -1, -2$ értékek viszont nem.

A fentebb használt egyenlőtlenségjeleken ($<$, $>$, $\leq$, $\geq$) kívül gyakran alkalmazzák a $\neq$ (nem egyenlő) jelet. Ha például a „nem nagyobb" ($a \leq b$) reláció azt jelenti, hogy $a < b$ vagy $a = b$, akkor a „nem egyenlő" ($a \neq b$) reláció azt jelenti: $a < b$ vagy $a > b$.

A „nem egyenlő" reláció lényegesen különbözik a „nem nagyobb" relációtól. Az $=$, $<$, $>$, $\leq$, $\geq$ jelekkel kifejezett valamennyi egyenlőségi és egyenlőtlenségi relációk esetében igaz a *tranzitivitási* (tranzitivitás = átvihetőség) tulajdonság, vagyis az $a \leq b$ és $b \leq c$ relációból következik, hogy $a \leq c$. A „nem egyenlő" reláció esetében ez a tulajdonság nem mindig igaz: az $a \neq b$ és $b \neq c$ relációkból nem mindig következik az $a \neq c$. Például a $2 \neq 3$ és $3 \neq 2$, de a $2 \neq 2$ hamis, nem igaz.

Ezért a továbbiakban az egyenlőtlenségeken két olyan számot vagy kifejezést fogunk érteni, amelyek a $<$, $>$, $\leq$, $\geq$ jelek bármelyikével, de nem a $\neq$ jellel van összekapcsolva.

Ellenőrizzétek magatokat!

1. Milyen feltételek mellett lesz az a szám nagyobb, mint a c?
2. Mit nevezünk egyenlőtlenségnek?
3. Milyenek lehetnek az egyenlőtlenségek?
4. Milyen egyenlőtlenségeket nevezünk szigorúaknak, és milyeneket nem szigorúaknak?
5. Mit jelentenek az $a \leq b$, $a \geq b$ kifejezések? Olvassátok el ezeket!

Oldjuk meg együtt!

1. Az a és b szám közül melyik a kisebb, ha:
   a) $a - b = (-1)^2$; b) $a = b - 3$; c) $a - 5 = b$?

✓ Megoldás. a) $a - b = (-1)^2 = 1$ (pozitív szám), tehát $b < a$; b) megkeressük az a és b szám különbségét: $a - b = -3$ (negatív szám), vagyis $a < b$; c) $a - b = 5$ (pozitív szám), tehát $b < a$.

Felelet. a) $b < a$; b) $a < b$; c) $b < a$.

2. Milyen feltételek mellett van legnagyobb értéke a $4 - (2x + 3)^2$ kifejezésnek?

✓ Megoldás. A kifejezésnek a kivonandó legkisebb értéke mellett van a legnagyobb értéke. A $(2x + 3)^2$ kifejezésnek akkor van legkisebb értéke, amikor $2x + 3 = 0$, vagyis ha $x = -1{,}5$.

Felelet. Ha $x = -1{,}5$.

3. A különbségek közül melyik a legnagyobb, és hányszorosan: $2009^{2010} - 2009^{2009}$ vagy $2009^{2009} - 2009^{2008}$?

✓ Megoldás. $2009^{2010} - 2009^{2009} = 2009^{2009}(2009 - 1) = 2008 \cdot 2009^{2009}$;

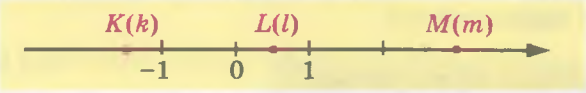
$2009^{2009} - 2009^{2008} = 2009^{2008}(2009 - 1) = 2008 \cdot 2009^{2008}$;

$(2008 \cdot 2009^{2009}) : (2008 \cdot 2009^{2008}) = 2009$.

Felelet. Az első különbség 2009-szer nagyobb a másodiknál.

Oldjátok meg szóban!

1. Melyik a nagyobb az x és y számok közül, ha:
   a) $x - y = 1$; b) $x - y = -1$; c) $y - x = 2$; d) $y - 5 = x$?
2. A k, l, m koordinátájú K, L, M pontok a 2. ábrán látható módon helyezkednek el a koordinátatengelyen. Hasonlítsátok össze a számokat!



2. ábra

   a) k és m; b) k és 1; c) m és l;
   d) 0 és l; e) k és l; f) m és -1.
3. Igaz-e az egyenlőtlenség:
   a) $2 \geq 2$; b) $-3 < -5$; c) $3 \leq 2$; d) $-5 \leq -2$?
4. Hasonlítsátok össze a számokat:
   a) 1,28 és $\frac{5}{4}$; b) 0,02 és $\frac{1}{50}$; c) $-\frac{1}{3}$ és $-0{,}33$; d) 1,6 és $\frac{5}{3}$!
5. Hasonlítsátok össze a törteket:
   a) $\frac{5}{7}$ és $\frac{3}{7}$; b) $-\frac{4}{3}$ és $-\frac{4}{5}$; c) $\frac{5}{6}$ és $\frac{6}{7}$; d) $-\frac{7}{13}$ és $-\frac{13}{27}$!
6. Mindig kisebb-e az $\frac{1}{x}$ x megfelelő értékénél?
7. Mindig kisebb-e a $\sqrt{x}$ x megfelelő értékénél?

A szint

8. Az a vagy a b szám a nagyobb, ha:

a) $a - b = 0{,}01$; b) $a - b = -3{,}7$; c) $a = 2{,}3 + b$;

d) $b - a = (-3)^2$; e) $a - b = 0$; f) $b = a + 1$?

9. Hasonlítsátok össze az m és n számokat, ha:

a) $m - n = 0{,}5$; b) $n - m = 5$; c) $m - 4 = n$; d) $m + 3 = n$!

10. Hasonlítsátok össze az x és az y számokat, ha:

a) $y - x = -1$; b) $x - y = 7$; c) $x = y - 3$; d) $y - x = 0$!

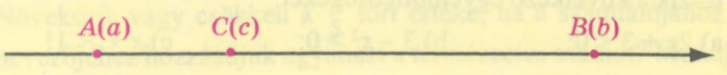
11. Melyek igazak az alábbi egyenlőtlenségek közül:

a) $-7 > -5$; b) $4{,}3 \geq -3{,}4$; c) $\sqrt{5} \leq \pi$;

d) $\frac{1}{0{,}5} > 0{,}5$; e) $\sqrt{2\frac{1}{4}} \geq 1{,}5$; f) $\pi \leq 3{,}14$?

12. Az a, b és c koordinátájú pontok a 3. ábra szerinti módon helyezkednek el. Az a, b és c számok közül melyik a legnagyobb és melyik a legkisebb? Igazak-e az alábbi egyenlőtlenségek:

a) $a < b$; b) $b < c$; c) $c < a$; d) $b \geq c$?



3. ábra

13. Hasonlítsátok össze a számokat:

a) $\frac{10}{11}$ és $\frac{19}{20}$; b) $\frac{28}{29}$ és $\frac{29}{30}$; c) $\frac{48}{49}$ és $0{,}98$;

d) $-\frac{7}{9}$ és $-\frac{9}{7}$; e) $\frac{2}{15}$ és $\frac{9}{17}$; f) $-\frac{5}{7}$ és $-\frac{1}{3}$!

14. Rendezzétek csökkenő sorrendbe:

$3{,}1$; π; $\sqrt{10}$; $2 + \sqrt{2}$; $5 - \sqrt{3}$!

15. Rendezzétek növekvő sorrendbe:

2; $\sqrt{5}$; -12; $2\frac{1}{2}$; 0; -3π!

16. A következő számok közül melyik a legnagyobb: $1{,}5; 1\frac{29}{50}$; $\frac{\pi}{2}$; $\sqrt{10} : 2$; $\sqrt{7} \cdot 0{,}5$?

17. Hasonlítsátok össze a $2x + 3$ és $3x - 2$ kifejezések értékeit, ha:
a) $x = -1$; b) $x = 0$; c) $x = 5$; d) $x = 7$!

18. Hasonlítsátok össze az $y = 2x - 1$ függvény értékeit, ha:
a) $x = 1$ és $x = 2$; b) $x = -1$ és $x = -2$; c) $x = 0{,}1$ és $x = 0{,}2$!

19. Hasonlítsátok össze az $y = x^2$ függvény értékeit, ha:
a) $x = -20$ és $x = 20$; b) $x = -2$ és $x = -1$; c) $x = -8$ és $x = 0$!

20. Bizonyítsátok be, hogy $10^{11} - 10^{10} > 10^{10} + 10^9$!

21. Igaz-e a $3x - 2 < 7$ egyenlőtlenség, ha:
a) $x = 4$; b) $x = 3$; c) $x = 2$; d) $x = 0$?

22. Az $x = 10$ esetén mely egyenlőtlenségek igazak:
a) $0{,}5x + 1 > 3$; b) $-7x + 3 < x$; c) $3 - x \geq x - 17$?

23. A c változó valamennyi valós értéke mellett igazak-e a következő egyenlőtlenségek:
a) $c^2 + 3 > 0$; b) $(c + 2)^2 > 0$; c) $(c - 1)^2 \geq 0$?

24. Bizonyítsátok be, hogy az n minden értékénél:
a) $n^4 + 1 > 0$; b) $(n - 5)^2 \geq 0$; c) $n^2 - 2n + 1 \geq 0$!

25. Nevezzétek meg az x változó néhány olyan értékét, melyek igazzá teszik a következő egyenlőtlenségeket:
a) $2x + 3 < 0$; b) $3 - x^2 > 0$; c) $x + \ < 1$!

B szint

26. Rendezzétek növekvő sorrendbe:

$(-\pi)^2$; $\sqrt{2}$; -1^2; $1\frac{2}{3}$; $-\sqrt{3}$; $\frac{\pi}{2}$; $(-2)^3$; $\sqrt{81}$; -5; $(-3)^0$!

27. Rendezzétek csökkenő sorrendbe:

-2π; $\sqrt{10}$; 297^0; $\left(-\frac{5}{2}\right)^2$; $\frac{1}{0{,}3}$; $\frac{\pi}{10}$; 0^{297}; $(-2)^5$; π; $-\frac{25}{4}$!

28. Hasonlítsátok össze az $5m + 1$ és a $19 - 3m$ értékeit, ha:
a) $m = 2$; b) $m = \sqrt{7}$; c) $m = 1 - \sqrt{2}$; d) $m = 1 + \sqrt{3}$!

29. Hasonlítsátok össze az $y = 12 + 45x$ és az $y = \frac{12}{x}$ függvények értékeit, ha:
a) $x = \frac{3}{5}$; b) $x = -\frac{1}{2}$; c) $x = -\frac{2}{3}$; d) $x = \frac{2}{5}$!

30. A különbségek közül melyik a legnagyobb, és hányszorosan:
$1999^{2000} - 1999^{1999}$ vagy $1999^{1999} - 1999^{1998}$?

31. Bizonyítsátok be, hogy a minden értékénél igaz az egyenlőtlenség:
a) $(a-3)^2 + 2 > 0$; b) $(2a+1)^2 + 0{,}5 > 0$;
c) $4a^2 - 4a + 1 \geq 0$; d) $9a^2 + 2 > 6a$!

32. Mi a nagyobb: két pozitív szám összegének a négyzete vagy négyzeteik összege?

33. Mely feltétel esetén lesz legkisebb az $1 + (2x-3)^2$ kifejezés értéke?

34. Mely feltétel esetén lesz legnagyobb az $1 - (2x-3)^2$ kifejezés értéke?

35. Hogyan helyezkednek el a koordinátatengelyen az $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ és $D(d)$ pontok, ha:
a) $a > b$, $a + b = 2d$ és $b + d = 2c$;
b) $a < b$, $2a = b + c$ és $2d = a + b$?

36. Keressetek az n változóhoz olyan értékeket, amelyek kielégítik az alábbi egyenlőtlenségeket:
a) $3n - 2 > 2n - 3$; b) $5n + 8 \leq 8n - 1$!

37. Két reciprok szám összege 2,5. Keressétek meg a számok nagyobbikát!

38. Növekszik vagy csökken a $\frac{2}{5}$ tört értéke, ha a számlálójához és a nevezőjéhez hozzáadjuk ugyanazt a természetes számot? Mondjatok példákat!

39. Melyik nagyobb az a és b számok közül, ha:
a) $a + 7{,}8 = b + 3{,}5$; b) $a - 4{,}5 = b - 2{,}3$;
c) $8{,}5 - a = 7{,}3 - b$; d) $2a + 3{,}5 = b - 3{,}5$?

40. Melyik nagyobb az a és b számok közül, ha:
a) $2{,}5x = 3{,}2y$; b) $5{,}3 : x = 7{,}1 : y$;
c) $x : 3{,}8 = y : 2{,}6$; d) $2x - 3y = 5{,}4$?

41. Hét füzet drágább, mint 9 ceruza. Mi drágább: 12 füzet vagy 15 ceruza?

42. Négy barátnő: Halász Dóra, Kulcsár Éva, Miskolci Zsuzsa és Kovács Zita a fivéreikkel együtt mentek korcsolyázni. A fiúk mindegyike magasabb volt a lánytestvérénél. A fiatalok páronként kezdtek korcsolyázni. Kiderült, hogy mindegyik pár fiútagja magasabb, mint a lánypartnere, de egyikük sem a lánytestvérével korcsolyázott. A fiúk között Halász András volt a legmagasabb, a lányok körében pedig Dóra – a legalacsonyabb. Ismeretes, hogy Miskolci Zsuzsa és Viktor

magasabb Kovács Lórántnál, de alacsonyabb Évánál. Kivel korcsolyázott párban Kulcsár Bálint?



43. Hasonlítsátok össze a kifejezések értékeit:

a) $a^2 + 36$ és $12a$; b) $4(x + 1)$ és $(x + 2)^2$;

c) $b^3 + 2$ és $2b + 1$; d) $(y - 3)^2$ és $(y - 2)(y - 4)$!

44. Hasonlítsátok össze az a és b nem negatív számok értékeit:

a) $a^2 \geq b^2$; b) $b - a = a - b$; c) $a - b = a + b$!

Vizsgáljátok meg az összes lehetséges esetet!

Ismétlő gyakorlatok

Számítsátok ki (**45–47**)!

45. a) $\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+12\frac{2}{15}\right) : \frac{1}{15}$; b) $\left(\frac{2}{5}-\frac{3}{10}+\frac{1}{20}\right) : 1\frac{2}{3}-\frac{3}{4}$;

c) $\left(1-\frac{2}{3}\right) : \frac{2}{3} + \left(\frac{4}{5}-1\right) \cdot 5$; d) $\left(\frac{7}{8}-\frac{1}{2}\right) : \frac{3}{4} - 5 : \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{8}\right)$.

46. a) $2^{13} \cdot 0{,}5^{13}$; b) $25^7 \cdot 0{,}04^7$; c) $0{,}5^{12} \cdot (-2)^{13}$;

d) $-5^{32} \cdot 0{,}2^{32}$; e) $0{,}1^{-21} \cdot 10^{-20}$; f) $0{,}2^{-41} \cdot (-0{,}5)^{-40}$.

47. a) $\sqrt{5^2 - 4^2}$; b) $\sqrt{13^2 - 12^2}$; c) $\sqrt{3^2 + 4^2}$;

d) $\sqrt{21{,}8^2 - 18{,}2^2}$; e) $\sqrt{45{,}8^2 - 44{,}2^2}$; f) $\sqrt{8{,}2^2 - 1{,}8^2}$.

Egyszerűsítsétek a kifejezést (**48–50**)!

48. a) $(c - 5)(c + 2) + 3c + 10$; b) $(x^2 + ax + a^2)(x - a) + a^3$;

c) $(a^2 - a + 1)(a + 1) - a^3$; d) $(x^2 - y)(x - y^2) - y^3 + xy$;

e) $(c^3-2c)(2c+c^3)+4c^2$; f) $(x^2-6x+9)^2-(x-3)^4$.

49. a) $\frac{a^2-1}{a^3+1}\cdot\left(a+\frac{1}{a-1}\right)+\left(a+\frac{1}{a}+1\right)\cdot\left(a+\frac{1}{a}-1\right)$;

b) $\left(\frac{a}{ab-b^2}+\frac{b}{a^2-ab}\right)\cdot\frac{a^2b-ab^2}{a^2+b^2}-1$.

50. a) $\sqrt{a}+\sqrt{4a}+\sqrt{9a}$; b) $7\sqrt{x}-\sqrt{9x}+\sqrt{25x}$;

c) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2+\sqrt{60}$; d) $\left(\sqrt{15}+2\right)^2-\sqrt{240}$;

e) $\sqrt{6+\sqrt{20}}-\sqrt{6-\sqrt{20}}$; f) $\sqrt{5+\sqrt{24}}-\sqrt{5-\sqrt{24}}$.

51. Oldjátok meg az egyenleteket:

a) $x^2+8x+15=0$; b) $x^2+10x+21=0$;

c) $y^2-7y-18=0$; d) $z^2-9z+14=0$;

e) $\frac{3x-1}{3x+1}=2-\frac{x-3}{x+3}$; f) $\frac{3c}{3c-2}+\frac{2c-9}{2c-5}=2$!

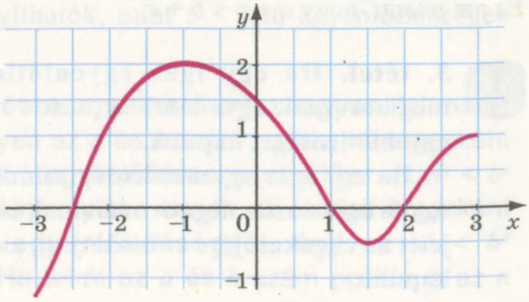
52. Oldjátok meg az egyenletrendszereket:

a) $\begin{cases}\frac{4}{x-2}-\frac{1}{y-6}=0,\\ \frac{3}{x+5}+\frac{2}{y-3}=2;\end{cases}$ b) $\begin{cases}\frac{3}{x+3}-\frac{2}{y}=0,\\ \frac{4}{x-1}+\frac{5}{y+1}=1!\end{cases}$

53. Ábrázoljátok grafikusan az alábbi függvényeket:

a) $y=3-x$; b) $y=\frac{6}{x}$; c) $y=x^2$; d) $y=-\sqrt{x}$!

54. Vizsgáljátok meg a 4. ábrán látható függvénygörbét, és magyarázzátok meg, hogy az mely intervallumokban növekszik, csökken, s melyekben pozitív, illetve negatív! Mutassátok meg a függvény legnagyobb értékét!



4. ábra

55. Miután a 40 g sót tartalmazó oldathoz 200 g vizet öntöttek, az oldat koncentrációja 10%-kal csökkent. Milyen volt a sóoldat koncentrációja kezdetben?

2.§. A SZÁMEGYENLŐTLENSÉGEK TULAJDONSÁGAI

Vizsgáljuk meg az $a < b$, $c > d$ egyenlőtlenségeket, ahol a, b, c és d tetszőleges valós szám.

1. tétel. **Ha $a < b$ és $b < c$, akkor $a < c$.**

Bizonyítás. Ha $a < b$ és $b < c$, akkor az $a - b$ és $b - c$ különbség negatív. Viszont ebben az esetben az összegük $(a - b) + (b - c) = a - c$ is negatív. De ha az $a - c$ különbség negatív, akkor $a < c$. Ezt kellett bebizonyítanunk.

Az 1. tétel az azonos relációs jelű egyenlőtlenségek *tranzitív tulajdonságait* fejezi ki.

Példa. Mivel $\sqrt{1,9} < \sqrt{2}$ és $\sqrt{2} < 1,42$, ezért $\sqrt{1,9} < 1,42$.

2. tétel. **Ha egy igaz egyenlőtlenség mindkét oldalához hozzáadjuk ugyanazt a számot, akkor igaz egyenlőtlenséget kapunk.**

Például, ha $a < b$ és c tetszőleges valós szám, akkor $a + c < b + c$.

Bizonyítás. Ha $a < b$, akkor az $a - b$ különbség negatív. Mivel $a - b = (a + c) - (b + c)$, ezért az $(a + c) - (b + c)$ különbség is negatív. Ez azt jelenti, hogy $a + c < b + c$.

3. tétel. **Ha egy igaz egyenlőtlenség mindkét oldalát megszorozzuk ugyanazzal a pozitív valós számmal, akkor igaz egyenlőtlenséget kapunk.**

Ha egy igaz egyenlőtlenség mindkét oldalát megszorozzuk egy és ugyanazon negatív számmal, és az egyenlőtlenség relációs jelét az ellenkezőjére változtatjuk, akkor igaz egyenlőtlenséget kapunk.

Bizonyítás. Legyen $a < b$ és c bármely pozitív szám. Ebben az esetben $a - b$, $(a - b)c$, tehát az $ac - bc$ különbség is negatív szám, vagyis $ac < bc$.

Ha $a < b$ és c tetszőleges negatív szám, akkor az $(a - b)c$ szorzat, következésképpen az $ac - bc$ különbség is pozitív lesz. Ezért $ac > bc$.

Példák. a) $3 < 4$ és $5 > 0$, ezért $3 \cdot 5 < 4 \cdot 5$ vagy $15 < 20$;

b) $3 < 4$ és $-2 < 0$, akkor $3 \cdot (-2) > 4 \cdot (-2)$ vagy $-6 > -8$.

Mivel a szorzást helyettesíthetjük reciprok számmal való osztással, ezért a harmadik tételben a szorzás szót osztással helyettesíthetjük.

Ha $a < b$ és $c > 0$, akkor $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$; ha $a < b$ és $c < 0$, akkor $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

4. tétel. Két azonos relációs jelű egyenlőtlenség bal és jobb oldalait külön-külön összeadhatjuk.

Ha például $a < b$ és $c < d$, akkor $a + c < b + d$.

Bizonyítás. Ha $a < b$ és $c < d$, akkor a 2. tétel alapján $a + c < b + c$ és $b + c < b + d$, ahonnan az 1. tétel szerint $a + c < b + d$.

Példa. $2 < 3$ és $5 < 7$, ezért $2 + 5 < 3 + 7$ vagy $7 < 10$.

5. tétel. Két azonos relációs jelű egyenlőtlenség tagonként beszorozható, ha a bal és a jobb oldala pozitív számokból áll.

Ha például $a < b$, $c < d$ és a, b, c, d is pozitív szám, akkor $ac < bd$.

Bizonyítás. Ha $a < b$ és $c < d$ és a c és b pozitív számok, akkor a 3. tétel alapján $ac < bc$ és $bc < bd$. Ebből viszont az 1. tétel szerint $ac < bd$.

Megjegyzés. A 4. és az 5. tétel érvényes három vagy tetszőleges számú egyenlőtlenségre is. Ha például $a < b$, $c < d$ és $n < m$, akkor $a + c + n < b + d + m$.

Az 1–5. tételek a $>$, $\geq$, $\leq$ relációs jelű egyenlőtlenségek esetében majdnem ugyanúgy bizonyíthatók, mint a $<$ jelű egyenlőtlenségek vonatkozásában.

Négyzetre vagy köbre emelhető-e az egyenlőtlenség mindkét oldala? Legyen az a és b szám pozitív; ha tagonként beszorozzuk az $a < b$, $a < b$ egyenlőtlenségeket, akkor az $a^2 < b^2$ egyenlőtlenséget kapjuk. Amennyiben ennek az oldalait tagonként beszorozzuk az $a < b$ egyenlőtlenséggel, úgy az $a^3 < b^3$ egyenlőtlenséget kapjuk. Ha tehát az a és b szám pozitív, s az n

természetes szám, akkor az $a < b$ egyenlőtlenségből következik, hogy $a^n < b^n$.

Ha az a és b szám legalább egyike negatív, akkor az $a < b$ egyenlőtlenségből nem mindig következik, hogy $a^n < b^n$. Például $-3 < 2$, de a $(-3)^2 < 2^2$, $(-3)^4 < 2^4$ egyenlőtlenségek nem igazak.

A „ha az a és b szám pozitív és $a < b$" kifejezés rövidebben is leírható: „ha $0 < a < b$". Vizsgáljátok meg, mindig igaz-e a következő állítás: „ha $0 < a < b$, akkor $\sqrt{a} < \sqrt{b}$".

Ellenőrizzétek magatokat!

1. Fogalmazzátok meg, és bizonyítsátok be az egyenlőtlenségek tranzitivitásáról szóló tételt!
2. Fogalmazzátok meg, és bizonyítsátok be az ugyanannak a számnak az egyenlőtlenség mindkét oldalához való hozzáadásának tételét!
3. Fogalmazzátok meg az egyenlőtlenség mindkét oldalának ugyanazzal a számmal való beszorzásának tételét!
4. Fogalmazzátok meg az azonos relációs jelű egyenlőtlenségek tagonkénti összeadásának tételét!
5. Fogalmazzátok meg az azonos relációs jelű egyenlőtlenségek tagonkénti beszorzásának tételét!

Oldjuk meg együtt!

1. Ismeretes, hogy az a és b szám pozitív, és az $a < 3$, $b < 6$. Bizonyítsátok be, hogy $ab < 20$!

✓ Megoldás. Mivel a és b pozitív számok, ezért az $a < 3$ és $b < 6$ egyenlőtlenségek összeszorozhatók: $a \cdot b < 3 \cdot 6$ vagy $ab < 18$. Ha $ab < 18$ és $18 < 20$, akkor $ab < 20$.

2. Következik-e az $a < 3$ és $b < 6$ egyenlőtlenségekből az $ab < 20$ egyenlőtlenség, ha az a és b számok legalább egyike negatív?

✓ Megoldás. Ha az a és b szám egyike negatív, a másik pedig pozitív, akkor az ab szorzat negatív. Ebben az esetben igaz az $ab < 20$ egyenlőtlenség.

Ha az a és b szám egyaránt negatív, akkor az $ab < 20$ egyenlőtlenség értelme változhat vagy nem változhat. (Másként fogalmazva: az egyenlőtlenség lehet mind igaz, mind nem igaz). Ha például $a = -1$, $b = -2$, akkor $(-1) \cdot (-2) < 20$, tehát az egyenlőtlenség értelme nem változik, vagyis igaz.

Ha $a = -7$, $b = -10$, akkor a $(-7) \cdot (-10) < 20$ egyenlőtlenség értelme ellentétére változik, vagyis nem igaz.

F e l e l e t . Nem.

3. Ismeretes, hogy $m \geq -5$. Pozitív vagy negatív a $-3m - 20$ kifejezés értéke?

✓ M e g o l d á s . Megszorozva az $m \geq -5$ egyenlőtlenség mindkét oldalát -3-mal azt kapjuk, hogy $-3m \leq 15$ (4. tulajdonság). Az egyenlőtlenség mindkét oldalához a -20 számot adjuk: $-3m - 20 \leq 15 - 20$ (2. tulajdonság), ahonnan $-3m - 20 \leq -5$, vagyis $-3m - 20 < 0$.

F e l e l e t . Negatív.

Oldjátok meg szóban!

56. Melyik a nagyobb az a és c számok közül, ha: a) $a - c < 0$; b) $a - c > 2$?

57. Az 5. ábra alapján mondd meg, melyik a nagyobb a következő kifejezések közül: az a vagy az $a + 2b$; a b vagy a $b - 2a$?



5. ábra

58. Hasonlítsátok össze az x és a z számot, ha:

a) $x < y$ és $y < z$; b) $x > y$ és $y > z$; c) $x \leq a$ és $a \leq z$!

59. Pozitív vagy negatív az n szám, ha:

a) $3n < 3{,}5n$; b) $-1{,}5n > -n$; c) $0{,}2n < -n$?

60. Melyik nagyobb az $\frac{1}{a}$ és $\frac{1}{b}$ törtek közül, ha $b < a < 0$?

61. Melyik kisebb az $\frac{x}{y}$ és $\frac{y}{x}$ negatív törtek közül, ha $x < y$?

62. Az a szám nagyobb 1-nél. Milyen a következő szám: $3a$, $-a$, $1 - a$, $1 + 2a$?

63. Az x szám kisebb -1-nél. Milyen a következő szám: $5x$, $5 - x$, x^4, $2 + x^2$?

A szint

64. Hasonlítsátok össze az a és a b számot, ha:

a) az $a - c$ és a $c - b$ különbség pozitív;

b) a $b - c$ és a $c - a$ különbség negatív;

c) az $a - n$ és az $n - b$ különbség nem negatív!

65. Hasonlítsátok össze az a és a b számot, ha:

a) $a - c > 0$ és $b - c < 0$; b) $a - x \leq 0$ és $x - b \leq 0$!

66. Hogyan helyezkednek el a számegyenesen az a, b, c és d koordinátájú pontok, ha $a < c$, $b > c$, $d > b$?

67. Írjátok fel a megfelelő igaz egyenlőtlenségeket:

a) hozzáadva a $12 < 18$ egyenlőtlenség mindkét oldalához 5-öt;

b) kivonva a $12 < 18$ egyenlőtlenség mindkét oldalából 77-et;

c) megszorozva a $12 < 18$ egyenlőtlenség mindkét oldalát 3-mal; –5-tel;

d) elosztva a $12 < 18$ egyenlőtlenség mindkét oldalát 3-mal; –6-tal!

68. Az $a > b$ egyenlőtlenség mindkét oldalát szorozzátok meg $\frac{2}{3}$-dal; $-\frac{5}{7}$-del!

69. Ismeretes, hogy $a > b$. Helyettesítsétek a * jelet a megfelelő relációs jellel:

a) $2a * 2b$; b) $1{,}5a * 1{,}5b$; c) $-a * -b$;

d) $-3a * -3b$; e) $-\frac{1}{2}a * -\frac{1}{2}b$; f) $2a^3 * 2b^3$!

70. Pozitív vagy negatív az a szám, ha:

a) $2a < 3a$; b) $0{,}5a > a$; c) $-5a < -4a$?

71. Adjátok össze tagonként a következő egyenlőtlenségeket:

a) $5 < 12$ és $7 < 8$; b) $3 < 6$ és $-3 < -2$;

c) $5 < 6$ és $x < z$; d) $a < b$ és $x \le z$!

72. Szorozzátok össze a következő egyenlőtlenségeket:

a) $2 < 3$ és $5 < 8$; b) $-4 < -1$ és $-5 < -4$;

c) $\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$ és $\frac{2}{5} < \frac{3}{5}$; d) $5 <$ és $\frac{1}{7} < \frac{1}{5}$!

73. Hasonlítsátok össze a $\frac{c}{a}$ és $\frac{c}{b}$ pozitív számokat, ha $a < b$ és $c > 0$!

B szint

74. Ismeretes, hogy $m < n$. Hasonlítsátok össze a számokat:

a) $m + 7$ és $n + 7$; b) $-0{,}1m$ és $-0{,}1n$;

c) $\sqrt{(-1)^2}m$ és $\sqrt{(-1)^2}n$; d) $1 - m$ és $1 - n$;

e) $5m - 1$ és $5n - 1$; f) $-2n - 1$ és $-1 - 2m$!

75. Ismeretes, hogy $x > y > 0$. Helyettesítsétek a * jelet a megfelelő relációs jellel:

a) $\sqrt{x} * \sqrt{y}$; b) $x^2 * xy$; c) $(1-\sqrt{2})x * (1-\sqrt{2})y$;

d) $\frac{y}{x} * 1$; e) $\frac{1}{x} * \frac{1}{y}$; f) $\frac{x^2y}{y-x} * \frac{xy^2}{y-x}$!

76*. Ismeretes, hogy $x < y < 0$. Helyettesítsétek a * jelet a megfelelő relációs jellel:

a) $x^3 * y^2$; b) $-x * 10y$; c) $\sqrt{-x} * \sqrt{-y}$;

d) $\frac{1}{x^2} * \frac{1}{y}$; e) $\frac{x}{x-y} * \frac{y}{x-y}$; f) $\frac{x+1}{xy} * \frac{y+1}{xy}$!

77. Bizonyítsátok be, hogy:

a) $x > y$ és $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$, akkor $x > 0$ és $y > 0$;

b) $a < b$ és $ab < 0$, akkor $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$!

78. Rendezzétek növekvő sorrendbe az $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ és $\frac{1}{d}$ pozitív számokat, ha $a < c$, $d < b$ és $d > c$!

79. Rendezzétek növekvő sorrendbe az $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ és $\frac{1}{d}$ negatív számokat, ha $a > c$, $d > b$ és $d < c$!

80. Bizonyítsátok be:

a) ha $a \le b$ és $b \le c$, akkor $a \le c$;

b) ha $a \le b$ és $c > 0$, akkor $ac \le bc$;

c) ha $a \le b$ és $c < 0$, akkor $ac \ge bc$!

81. Igaz-e az a és b pozitív szám esetében, hogy:

a) az $a < b$ egyenlőtlenségből adódóan $a^2 < b^2$;

b) az $a^2 < b^2$ egyenlőtlenségből adódóan $a < b$;

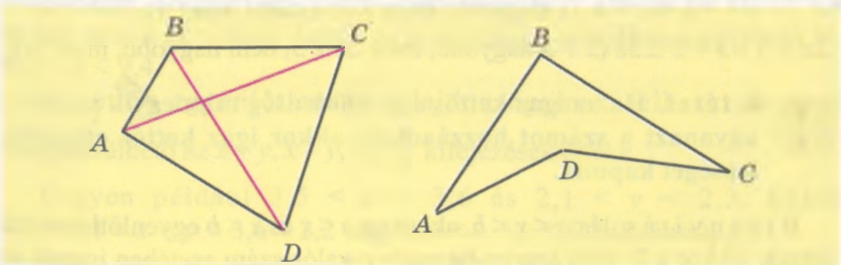
c) az $a < b$ egyenlőtlenségből adódóan $\sqrt{a} < \sqrt{b}$;

d) a $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ egyenlőtlenségből adódóan $a < b$?

82. Bizonyítsátok be, hogy: a) a négyszög átlója kisebb a félkerületénél; b) a négyszög átlóinak összege kisebb a kerületénél. Vizsgáljátok meg a két esetet (6. ábra)!

83. Az $x - y = \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)$ azonosság felhasználásával bizonyítsátok be, hogy, ha $\sqrt{x} > \sqrt{y}$, akkor $x > y$!

84. Bizonyítsátok be, hogy az $y = \sqrt{x}$ függvény az egész értelmezési tartományában növekvő értékeket vesz fel, vagyis ha $x_1 < x_2$, akkor $y_1 < y_2$!



6. ábra

85. Bizonyítsátok be, hogy:

a) az $y = x^2$ függvény növekszik, ha $x > 0$;

b) az $y = \frac{1}{x}$ függvény csökken, ha $x > 0$!

Ismétlő gyakorlatok

86. Áthalad-e az $y = x^2 - 5x + 6$ függvény görbéje az $A(-3; 14)$ ponton? És a $B(3; 14)$ ponton?

87. Az n mely értéke mellett halad át az $y = x^2 - 3x + n$ függvény görbéje az $M(3; 7)$ ponton? És a $K(-2; 3)$ ponton?

Bontsátok tényezőkre a háromtagú kifejezést (**88–89**)!

88. a) $x^2 + 2x - 35$; b) $6x^2 - x - 1$.

89. a) $6a^2 + a - 2$; b) $c^2 + \sqrt{2c} - 4$.

90. ***Sudoku játék.*** Írjátok át a táblázatot a füzetetekbe (7. ábra)! Töltsétek ki az üres kockákat számokkal 1-től 9-ig oly módon, hogy egyetlen vízszintes és egyetlen függőleges sorban, továbbá egyetlen 3x3-as kisnégyzetben sem szerepelhet kétszer ugyanaz a szám!

2	4		3		7			
				5	4	3	2	
7		3				5	8	
9				6			3	
8	3	6		1	5		4	2
			9	3		7		
6	1			9				
				7	1	4	6	
3	7		8	4				5

7. ábra

3.§. KETTŐS EGYENLŐTLENSÉGEK

Ha az $a < x$ és $x < b$ egyenlőtlenségek igazak, akkor azok leírhatók ***kettős egyenlőtlenség*** alakjában: $a < x < b$. A kettős egyenlőtlenségben három tag – bal, középső, jobb – és két relációs jel van. Példák kettős egyenlőtlenségekre:

$3 < x < 4$ (x nagyobb, mint 3 és kisebb, mint 4);

$2a + 3 < x + 3 \leq 5c$ ($x + 3$ nagyobb, mint $2a + 3$, nem nagyobb, mint $5c$).

6. tétel. **Ha az igaz kettős egyenlőtlenség mindegyik tagjához ugyanazt a számot hozzáadjuk, akkor igaz kettős egyenlőtlenséget kapunk.**

Bizonyítás. Ha $a < x < b$, akkor az $a < x$ és $x < b$ egyenlőtlenségek igazak. Ekkor a 2. tétel szerint bármely c valós szám esetében igazak az $a + c < x + c$ és $x + c < b + c$ egyenlőtlenségek. Vagyis $a + c < x + c < b + c$.

A c szám lehet mind pozitív, mind negatív. Például:
ha $2,5 < x - 3 < 2,6$ és $c = 3$, akkor $5,5 < x < 5,6$;
ha $0,7 < x + 1 < 1,2$ és $c = -1$, akkor $-0,3 < x < 0,2$.
Hasonlóképpen bizonyíthatók az alábbi állítások:



- **ha $a < x < b$ és $k > 0$, akkor $ka < kx < kb$;**
- **ha $a < x < b$ és $k < 0$, akkor $kb < kx < ka$;**
- **ha $a < x < b$ és $c < y < d$, akkor:**

$$a + c < x + y < b + d;$$

$$a - d < x - y < b - c;$$

$$ac < xy < bd \text{ (ha } a > 0 \text{ és } c > 0);$$

$$\frac{a}{d} < \frac{x}{y} < \frac{b}{c} \text{ (ha } a > 0 \text{ és } c > 0).$$

Figyeljétek meg a kettős egyenlőtlenséggel végzett kivonási és osztási műveletek szabályait! Az első egyenlőtlenség kisebb tagjából a második egyenlőtlenség nagyobb tagját vonják ki, a nagyobb tagjából pedig a kisebbet. Az első egyenlőtlenség kisebb tagját a második egyenlőtlenség nagyobb tagjával osztják, a nagyobb tagját pedig a kisebbel. Például ha $4 < x < 6$ és $2 < y < 3$, akkor

$4 - 3 < x - y < 6 - 2$ vagy $1 < x - y < 4$;

$\frac{4}{3} < \frac{x}{y} < \frac{6}{2}$ vagy $\frac{4}{3} < \frac{x}{y} < 3$.

A vizsgált tulajdonságok lehetővé teszik a kettős egyenlőtlenségek egyszerűsítését. Például a $16 < 3x - 2 < 19$ kettős egyenlőtlenség helyett vizsgálható a $18 < 3x < 21$ vagy a még egyszerűbb $6 < x < 7$ kettős egyenlőtlenség.

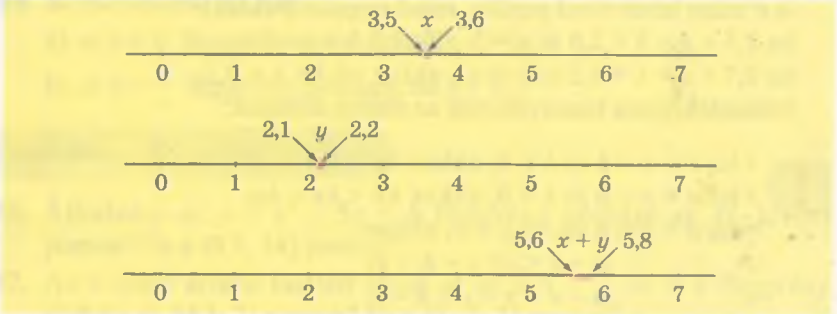
Különösen célszerű a kettős egyenlőtlenségek alkalmazása a mennyiségek és kifejezések ***értékeinek megbecsülésére.*** Az olyan mennyiségek, mint a tömeg, távolság, idő értéke mindig megközelítő pontosságú. Például nehéz deciméternyi pontossággal meghatározni a fa magasságát. Ezt ezért úgy jelölik, hogy nagyobb 9,2 m-nél, de kisebb 9,4 m-nél, ami a következő kettős egyenlőtlenség alakjában jegyezhető le: $9,2 < h < 9,4$.

A kettős egyenlőtlenség tulajdonságainak felhasználásával megbecsülhető az $x + y$, $x - y$, xy, $\frac{x}{y}$ kifejezések értéke.

Legyen például $3,5 < x < 3,6$ és $2,1 < y < 2,2$. Ekkor $3,5 + 2,1 < x + y < 3,6 + 2,2$ vagy $5,6 < x + y < 5,8$ (8. ábra);

$3,5 - 2,2 < x - y < 3,6 - 2,1$ vagy $1,3 < x - y < 1,5$;

$3,5 \cdot 2,1 < xy < 3,6 \cdot 2,2$ vagy $7,35 < xy < 7,92$;



8. ábra

$\frac{3,5}{2,2} < \frac{x}{y} < \frac{3,6}{2,1}$ vagy $1,59 < \frac{x}{y} < 1,72$.

A kettős egyenlőtlenségek révén elhagyható az abszolút érték jel az olyan alakú egyenlőtlenségekben, mint a $|x| < a$ és $|x| \leq a$, ahol $a > 0$.

Például a $|x| < 3$ egyenlőtlenség kielégíti x valamennyi olyan értékét, amelynek az abszolút értéke kisebb 3-nál. Ilyenek a 3-nál kisebb pozitív számok, a -3-nál nagyobb negatív számok és a 0 szám. Ez a számhalmaz a következő kettős egyenlőtlenséggel írható le: $-3 < x < 3$.

Hasonló módon írható le a $|x| \leq 3$: $-3 \leq x \leq 3$ egyenlőtlenség.

Figyeljétek meg! Bármely $|M| < a$ alakú egyenlőtlenség, amelyben $a > 0$ és M valamely kifejezés, a következő kettős egyenlőtlenség alakjában írható le: $-a < M < a$.

Például a $|x| > 3$ egyenlőtlenség nem írható le kettős egyenlőtlenség alakjában. Miért?

Ellenőrizzétek magatokat!

1. Mondjatok példákat kettős egyenlőtlenségre!
2. Mit jelent a „mennyiségek értékének becslése”?
3. Hogyan becsülhető meg kettős egyenlőtlenségek segítségével egy mennyiség két értéke összegének vagy szorzatának megközelítő értéke?
4. Hogyan becsülhető meg kettős egyenlőtlenségek segítségével egy mennyiség két értéke különbségének (hányadosának) megközelítő értéke?

Oldjuk meg együtt!

1. Ismeretes, hogy $10 < x < 12$. Milyen értékeket vehet fel a kifejezés: a) $3x - 5$; b) x^2?

✓ M e g o l d á s . a) Megszorozzuk 3-mal az egyenlőtlenség minden tagját: $3 \cdot 10 < 3 \cdot x < 3 \cdot 12$ vagy $30 < 3x < 36$.

Kivonunk az egyenlőtlenség minden tagjából 5-öt:

$30 - 5 < 3x - 5 < 36 - 5$ vagy $25 < 3x - 5 < 31$;

b) Mivel az adott egyenlőtlenség minden tagja pozitív, ezért négyzetre emelhetők: $100 < x^2 < 144$.

F e l e l e t : a) $25 < 3x - 5 < 31$; b) $100 < x^2 < 144$.

2. Becsüljétek meg a $0{,}2a - b$ kifejezés értékét, ha $5 < a < 15$ és $2 < b < 7$!

✓ M e g o l d á s . Ha $5 < a < 15$, akkor $1 < 0{,}2a < 3$. Ha $2 < b < 7$, akkor $-2 > -b > -7$ vagy $-7 < -b < -2$. Tagonként összeadjuk a kapott egyenlőtlenségeket: $-6 < 0{,}2a - b < 1$.

F e l e l e t . $-6 < 0{,}2a - b < 1$.

Oldjátok meg szóban!

91. Olvassátok el az egyenlőtlenséget:

a) $4 < a < 7$; b) $0 < 0{,}5 < 1$; c) $-3 < x < 3$!

92. Igazak-e a kettős egyenlőtlenségek:

a) $-7 < 0 < 7$; b) $0 < 5 < 10$; c) $-1 < -2 < -3$?

93. Kielégítik-e az $x = 3$ és az $x = -3$ értékek a következő feltételt:

a) $0 < x < 2x$; b) $-x < x^2 < 3x$; c) $-x < x^2 < -x^3$?

94. Az a mely egész értékei elégítik ki a kettős egyenlőtlenségeket:

a) $-1 < a < 1$; b) $-2 < a < 2$; c) $0{,}1 < a < 1$?

95. Léteznek-e az x-nek olyan értékei, amelyek nagyobbak, mint $\frac{8}{9}$ és kisebbek, mint $\frac{6}{7}$?

96. Becsüljétek meg az egyenlő oldalú háromszög kerületét, ha a szára nagyobb 1,8 m-nél és kisebb 2,1 m-nél! Lehet-e egyenlő $\sqrt{3}$ m^2-rel az adott háromszög területe?

A szint

97. Írd le kettős egyenlőtlenség alakjában a relációkat:

a) $x < 12$ és $x > 3$; b) $x > -2$ és $x < 2$; c) $x < 30$ és $x > -0{,}3$!

98. Léteznek-e a C-nek olyan értékei, amelyek: a) kisebbek -3-nál és nagyobbak $-\sqrt{10}$-nél; nagyobbak 10^{-2}-nél és kisebbek 10^2-nél? Ha igen, akkor írjátok le a megfelelő kettős egyenlőtlenséget!

99. Ismeretes, hogy $4 < n < 5$. Becsüljétek meg a kifejezések értékét:

a) $n + 3$; b) $n - 5$; c) $2n$; d) $-3n$; e) n^2!

100. Tudva, hogy $1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$, becsüljétek meg a kifejezések értékét:
a) $2 + \sqrt{3}$; b) $\sqrt{3} - 1$; c) $-\sqrt{3}$; d) $2\sqrt{3}$!

101. A négyzet oldala a cm, ahol $4{,}2 < a < 4{,}3$. Becsüljétek meg a kerületét és a területét!

102. Becsüljétek meg az $x + y$ összeg értékét, ha:
a) $4 \leq x < 5$ és $2 \leq y < 3$;
b) $-2 < x < 3$ és $-5 < y < 4$!

103. Becsüljétek meg az $x - y$ különbség értékét, ha:
a) $12 < x < 13$ és $5 < y < 6$;
b) $0{,}32 < x < 0{,}33$ és $0{,}25 < y < 0{,}27$!

» **104.** Becsüljétek meg az xy szorzat értékét, ha:
a) $3 < x \leq 4$ és $5 \leq y \leq 7$;
b) $-2 < x < -1$ és $-3 < y < -1$!

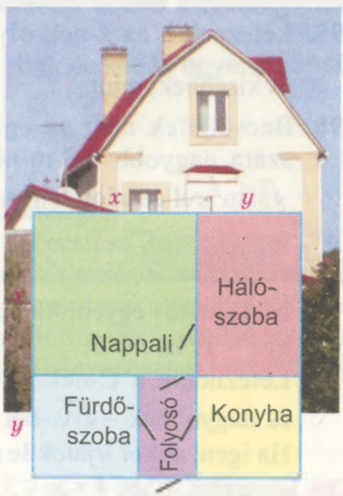
105. Becsüljétek meg az $x : y$ hányados értékét, ha:
a) $12 < x < 15$ és $5 < y < 6$;
b) $6 < x < 8$ és $2 < y < 3$!

» **106.** Ismeretes, hogy $-3 \leq x \leq 5$. Milyen értékeket vehetnek fel a kifejezések:
a) $2x + 3$; b) $0{,}1x - 2$; c) $2 - x$; d) $10 - 0{,}1x$?

107. A téglalap a hosszát és b szélességét (méterekben) megmérve a következő eredményt kapták: $1{,}3 < a < 1{,}4$, $0{,}6 < b < 0{,}8$. Becsüljétek meg a téglalap kerületét és területét!

108. A kocka élhossza c mm, ahol $1{,}53 \cdot 10^2 < c < 1{,}54 \cdot 10^2$. Becsüljétek meg: a) a kocka valamennyi élének összegét; b) a kocka felszínének területét; c) a kocka térfogatát! Az eredményeket kerekítsétek tizedekre!

» **109.** A 9. ábrán látható egy lakóház belterének beosztása. Ismeretes, hogy az egész ház és a nappali négyzet alakú. Becsüljétek meg a nappali, a hálószoba és az egész ház területét, ha $4{,}9 \text{ m} < x < 5{,}1 \text{ m}$, $2{,}9 \text{ m} < y < 3{,}1 \text{ m}$!



9. ábra

B szint

110. Az $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$ és $2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3$ egyenlőtlenségek alapján becsüljétek meg:

a) $\sqrt{2} + \sqrt{5}$; b) $\sqrt{5} - \sqrt{2}$; c) $2 - \sqrt{2}$; d) $\sqrt{5} : \sqrt{2}$!

111. Legyenek a háromszög szögei α és β, $62° < \alpha < 63°$, $95° < \beta < 96°$. Becsüljétek meg a háromszög harmadik szögének nagyságát!

112. Ismeretes, hogy $3{,}14 < \pi < 3{,}15$. Becsüljétek meg a körvonal hosszát és a kör területét, ha a sugara nagyobb 2,5 dm-nél és kisebb 2,6 dm-nél!

113. Ismeretes, hogy $10 < x \leq 12$. Milyen egész számú értékeket vehetnek fel a kifejezések:

a) $2x$; b) $\frac{x^2}{5}$; c) $3x - 5$; d) $\frac{12}{x}$?

114. Ismeretes, hogy $3 < x < 4$ és $1{,}2 < y < 1{,}3$. Milyen értékeket vehetnek fel a kifejezések:

a) $(x + y)^2$; b) $\sqrt{xy}$; c) $y^2 - x$; d) $\frac{y}{x} + \frac{x}{y}$?

115. Milyen tartományokban helyezkednek el a $\frac{3x - 2}{x}$ kifejezés értékei, ha:

a) $1 < x < 4$; b) $-5 < x < 0$; c) $-10 \leq x \leq 10$?

116. Milyen értékeket vehetnek fel az alábbi kifejezések a $-\frac{3}{4} < m < \frac{5}{6}$ és $3 < n < 10$ egyenlőtlenségek alapján:

a) $2m + 3n$; b) $4m - n$; c) $m + n^2$; d) $n^2 - m$?

117. Bizonyítsátok be az állításokat:

a) ha $a < x < b$, akkor $-b < -x < -a$;

b) ha $a < x < b$ és $a > 0$, akkor $\frac{1}{b} < \frac{1}{x} < \frac{1}{a}$;

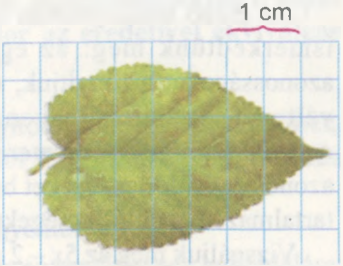
c) ha $a < x < b$ és $a > 0$, akkor $a^2 < x^2 < b^2$!

118. Bizonyítsátok be az állításokat:

a) ha $a < b$, akkor $a < \frac{a + b}{2} < b$;

b) ha $0 < a < b$, akkor $a < \sqrt{ab} < b$!

119. Írjátok fel kettős egyenlőtlenség alakjában a 10. ábrán látható alakzat területének értékét!



10. ábra

120. A derékszögű háromszög a és b befogói olyanok, hogy $8{,}4 < a < 8{,}5$, $6{,}5 < b < 6{,}6$. Becsüljétek meg a háromszög területét és kerületét!

121*. Írjátok le az abszolútértékes egyenlőtlenségeket kettős egyenlőtlenségek alakjában:

a) $|x| < 3$; b) $|x| \leq 0{,}5$; c) $2|x| < \pi$; d) $|x| - 7 \leq -6$!

122*. Írjátok le az abszolútértékes egyenlőtlenségeket kettős egyenlőtlenségek alakjában és egyszerűsítsétek:

a) $|2x - 1| < 3$; b) $|2 - 0{,}5x| \leq 2{,}5$; c) $\left|\sqrt{x} - 5\right| < 1$!

Ismétlő gyakorlatok

123. Egy motorkerékpáros 10 órakor elindult A városból B városba, 11 órakor pedig egy autós indult el A-ból B-be. Hány órakor érte utol az autós a motorkerékpárost, ha B-be 13 órakor érkezett meg, míg a motorkerékpáros 14 órakor futott be ugyanoda?

124. Írjátok le normálalakban az alábbi tömegeket:

a) Hold – 73 500 000 000 000 000 000 t;

b) Nap – 1 990 000 000 000 000 000 000 000 000 t!

125. Oldjátok meg az egyenletrendszereket:

a) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 12, \\ x + y = 6; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 8, \\ x - y = 2! \end{cases}$

4. §. EGYVÁLTOZÓS EGYENLŐTLENSÉGEK MEGOLDÁSA

Az előző osztályokban kétféle, változót tartalmazó egyenlőséggel ismerkedtünk meg: az egyenletekkel és az azonosságokkal. Az azonosságokat bizonyítjuk, az egyenletet megoldjuk. Ugyanígy kétféle, változót tartalmazó egyenlőtlenséget különböztetünk meg: ***azonos egyenlőtlenségeket*** és ***ismeretleneket tartalmazó egyenlőtlenségeket***. Az azonos egyenlőtlenségeket bebizonyítjuk (lásd a 7. §.), az ismeretleneket tartalmazó egyenlőtlenségeket megoldjuk.

Vizsgáljuk meg az $5x - 2 > 8$ egyenlőtlenséget, ahol x a változó. Ha az x változót 1-gyel helyettesítjük, akkor hamis számegyenlőtlenséget kapunk:

$5 - 2 > 8$. Azt mondjuk, hogy az $x = 1$ érték nem elégíti ki az adott egyenlőtlenséget. Ha az x változót 3-mal helyettesítjük, akkor igaz egyenlőtlenséget kapunk: $5 \cdot 3 - 2 > 8$. Az $x = 3$ érték kielégíti az adott egyenlőtlenséget, vagyis 3 az $5x - 2 > 8$ egyenlőtlenség megoldása.

Az egyismeretlenes *egyenlőtlenség megoldásának* a változó azon értékét nevezzük, mely kielégíti az adott egyenlőtlenséget.

Egyenlőtlenséget megoldani annyit jelent, mint megtalálni valamennyi megoldását vagy bebizonyítani, hogy nincs megoldása.

Egyenlőtlenségeket úgy oldunk meg, hogy egyszerűbb, az eredetivel egyenértékű (ekvivalens) egyenlőtlenségekkel helyettesítjük.

Két egyenlőtlenség *ekvivalens*, ha megoldásuk megegyezik, vagyis ha mindkettőt a változók ugyanazon értékei teszik igazzá. Azokat az egyenlőtlenségeket, amelyeknek nincsenek megoldásaik, szintén ekvivalenseknek tekintik.

Például az $5x - 2 > 8$ egyenlőtlenség ekvivalens az $5x > 2 + 8$, $5x > 10$ és $x > 2$ egyenlőtlenséggel is.

A változókat tartalmazó egyenlőtlenségek sok olyan tulajdonsággal rendelkeznek, amelyek megegyeznek az egyenletek tulajdonságaival.

1. **Ha az egyenlőtlenség egyik oldaláról ellenkező előjellel átviszünk egy tagot a másik oldalra, akkor az eredetivel ekvivalens egyenlőtlenséget kapunk.**

2. **Ha az egyenlőtlenség mindkét oldalát ugyanazzal a pozitív számmal szorozzuk vagy osztjuk, akkor az eredetivel ekvivalens egyenlőtlenséget kapunk.**

3. **Ha az egyenlőtlenség mindkét oldalát egyazon negatív számmal szorozzuk vagy osztjuk és az egyenlőtlenség irányát az ellenkezőjére változtatjuk, akkor az eredetivel ekvivalens egyenlőtlenséget kapunk.**

Ezek a tulajdonságok a 2. §-ban bizonyított tételekből következnek. Az alkalmazásukkal az egyenlőtlenségeket úgy oldjuk meg, mint az egyenleteket.

1. példa. Oldjuk meg az $5x < 2x + 15$ egyenlőtlenséget!

✓ M e g o l d á s . A $2x$ tagot átvisszük az egyenlőtlenség bal oldalára:

$$5x - 2x < 15.$$

Összevonjuk az egynemű tagokat:

$$3x < 15.$$

Elosztjuk az egyenlőtlenség mindkét oldalát 3-mal:

$$x < 5.$$

F e l e l e t. Az egyenlőtlenséget bármely 5-nél kisebb valós szám kielégíti.

2. példa. Oldjuk meg a $7(2 - x) \leq 3x + 44$ egyenlőtlenséget!

✓ M e g o l d á s. $14 - 7x \leq 3x + 44,$

$$-7x - 3x \leq -14 + 44,$$

$$-10x \geq 30, \quad x \geq -3.$$

F e l e l e t. Az egyenlőtlenséget bármely –3-nál nem kisebb valós szám kielégíti.

Megjegyzés. Az egyenlőtlenségek megoldását célszerű ***intervallummal*** megadni. Az 5-nél kisebb valós számok halmazát mínusz végtelenségtől 5-ig terjedő intervallumnak nevezzük, a jelölése $(-\infty; 5)$. Ez az intervallum a 11. ábrán satírozással van ábrázolva, míg az 5 értéket, amely nem tartozik a megoldások halmazába, világos köröcske jelzi.

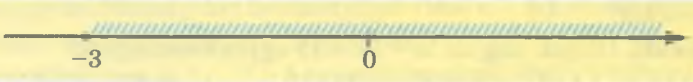


11. ábra

A –3-nál nem kisebb valamennyi valós szám halmazát –3-tól a végtelenségig terjedő intervallumnak nevezzük, beleértve a –3 értéket is. A jelölése $[-3; \infty)$. Szemléletes ábrázolása a 12. ábrán látható, ezen a megoldások halmazába tartozó –3 értéket sötét köröcske jelöli.

Következésképpen a fenti egyenlőtlenségek megoldása intervallumok segítségével is felírható: $(-\infty; 5)$, $[-3; \infty)$.

Mint már tudjátok, az egyenletek között a legegyszerűbbek az $ax = b$ alakú lineáris egyenletek. Az egyismeretlenes egyenlőtlenségek esetében is a lineáris egyismeretlenes egyenlőtlenségek a legegyszerűbbek.



12. ábra

Ha *a* és *b* megadott számok és az *x* ismeretlen változó, akkor a következő egyenlőtlenségek

$$ax < b,\ ax > b,\ ax \le b,\ ax \ge b \qquad (*)$$

mindegyikét egy *x* változós *lineáris egyenlőtlenségnek* nevezzük.

Példák lineáris egyenlőtlenségekre:

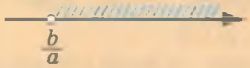
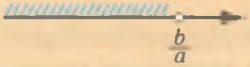
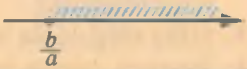
$$2x < 3, \quad -7x > 14, \quad 0{,}5x \le 1, \quad 9x \ge 0.$$

A lineáris egyenlőtlenségeket gyakran a következő formában írják:

$$ax - b < 0, \quad ax - b > 0, \quad ax - b \le 0, \quad ax - b \ge 0.$$

Ha az a nullától eltérő szám, akkor a (*) egyenlőtlenségek mindegyikének megoldása olyan halmaz, amelynek végtelen számegyenes felel meg.

A lineáris egyenlőtlenség megoldásainak függését a változó együtthatóinak értékétől és a relációs jeltől az alábbi táblázat szemlélteti.

$ax > b$	$ax \le b$
Ha $a > 0$, akkor $x > \frac{b}{a}$, $x \in \left(\frac{b}{a}; \infty\right)$  	Ha $a > 0$, akkor $x \le \frac{b}{a}$, $x \in \left(-\infty; \frac{b}{a}\right]$ 
Ha $a < 0$, akkor $x < \frac{b}{a}$, $x \in \left(-\infty; \frac{b}{a}\right)$  	Ha $a < 0$, akkor $x \ge \frac{b}{a}$, $x \in \left[\frac{b}{a}; \infty\right)$ 

Ha $a = 0$, akkor vagy az (*) egyenlőtlenségek egyikének sincs megoldása (például $0x > 5$) vagy mindegyikének a valós számok halmaza a megoldása (például $0x < 5$).

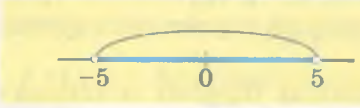
A lineáris egyenlőtlenségek megoldására vezethető vissza a legegyszerűbb abszolútértékes egyenlőtlenségek megoldása.

Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket:

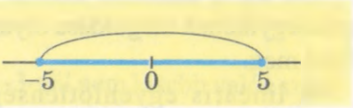
a) $|x| < 5$; b) $|x| > 3$; c) $|x| \leq -2$; d) $|x| > -0{,}5$!

a) Az egyenlőtlenséget az x összes olyan értéke kielégíti, amelyeknek az abszolút értéke kisebb 5-nél. Ilyen minden 5-nél kisebb valós szám, minden -5-nél nagyobb szám és a 0 szám. Ezeknek a számoknak a halmaza a $-5 < x < 5$ kettős egyenlőtlenségekkel írható le. A számegyenesen ennek a számhalmaznak a 13. ábrán látható intervallum felel meg. A -5 és az 5 nem tartozik ehhez az intervallumhoz, nem elégítik ki az adott egyenlőtlenséget, míg a $|x| \leq -5$ egyenlőtlenséget kielégítik (14. ábra).

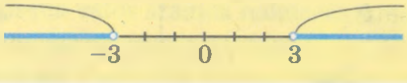
b) A $|x| > 3$ egyenlőtlenséget kielégítik a 3-nál nagyobb és a -3-nál kisebb valamennyi szám (15. ábra).



13. ábra



14. ábra



15. ábra

c) Minden szám abszolút értéke nemnegatív szám, amely nem lehet kisebb a -2 negatív számnál vagy egyenlő -2-vel. Ezért az adott egyenlőtlenségnek nincs megoldása.

d) Minden nemnegatív szám nagyobb $-0{,}5$-nél. Ezért az adott egyenlőtlenséget minden valós szám kielégíti.

Ellenőrizzétek magatokat!

1. Mondjatok példákat ismeretlent tartalmazó egyenlőtlenségekre!
2. Mit nevezünk az ismeretlent tartalmazó egyenlőtlenségek megoldásának?
3. Hány megoldása lehet az egyváltozós egyenlőtlenségnek?
4. Hogyan írható le az ismeretlent tartalmazó egyenlőtlenség megoldásainak halmaza?

Oldjuk meg együtt!

1. Oldjátok meg a $2x + 3 < 2(x + 3)$ egyenlőtlenséget!

✓ Megoldás. $2x + 3 < 2x + 6$,

$2x - 2x < 6 - 3$,

$0x < 3$.

A $0x < 3$ egyenlőtlenség x minden értéke mellett igaz.

Felelet. $(-\infty; \infty)$.

2. Oldjátok meg a $6z + 7 \geq 2(3z + 4)$ egyenlőtlenséget!

✓ Megoldás. $6z + 7 \geq 6z + 8$,

$6z - 6z \geq 8 - 7$,

$0z \geq 1$.

A $0x \geq 1$ egyenlőtlenséget nem elégíti ki z egyetlen értéke sem.

Felelet. Az egyenlőtlenségnek nincsenek megoldásai.

3. Oldjátok meg az $\frac{x-5}{6} + \frac{x-8}{3} > \frac{5x}{2} - 1$ egyenlőtlenséget!

✓ Megoldás. Az egyenlőtlenség mindkét oldalát megszorozzuk 6-tal (6, 3 és 2 legkisebb közös többszöröse):

$x - 5 + 2(x - 8) > 3 \cdot 5x - 6$;

$x - 5 + 2x - 16 > 15x - 6$;

$x + 2x - 15x > -6 + 5 + 16$;

$-12x > 15$; $x < -\frac{15}{12}$; $x < -1{,}25$.

Felelet. $(-\infty; -1{,}25)$.

4. Oldjátok meg a $-2 \leq 10x - 3 \leq 5$ kettős egyenlőtlenséget!

✓ Megoldás. $-2 + 3 \leq 10x - 3 + 3 \leq 5 + 3$,

$1 \leq 10x \leq 8$,

$0{,}1 \leq x \leq 0{,}8$.

Felelet. $[0{,}1; 0{,}8]$.

Oldjátok meg szóban!

126. Oldjátok meg az egyenlőtlenségeket:

a) $2x < 6$; b) $-3x > 9$; c) $10x < 20$;

d) $0{,}5z > 2$; e) $\frac{2}{3}y < 10$; f) $-\sqrt{2x} > 2$!

127. Hány megoldásuk van az egyenlőtlenségeknek:

a) $x^2 + 1 < 0$; b) $|x| < 0$; c) $|x| \leq 0$?

128. Oldjátok meg az egyenlőtlenségeket:

a) $x + 3 < x$; b) $x - 3 \leq x$; c) $3 + x > 3$!

129. A 0, 1, 2, 3, 4, 5 számok közül melyek elégítik ki az egyenlőtlenségeket:

a) $2x - 5 > 0$; b) $4x + 1 \leq 13$; c) $3x + 4 \geq 5$?

A szint

130. Jelöljétek intervallumok alakjában a koordináta egyenesen az alábbi egyenlőtlenségeket kielégítő halmazokat:
a) $x < 4$; b) $x > -1$; c) $x \leq 0{,}5$!

Oldjátok meg az egyenlőtlenségeket **(131–134)**!

131. a) $x + 2 > 5$; b) $x - 4 > 0$; c) $2 + x \geq 3$;
d) $3x > 15$; e) $4y < 36$; f) $5z \geq 35$.

132. a) $3x > 15$; b) $x + 7 > 0$; c) $2x - 5 \geq 0$;
d) $-4x \geq 20$; e) $x - 1{,}5 \leq 0$; f) $10 + 5x < 0$.

133. a) $-x < 5$; b) $-z \geq -4$; c) $-x < 0$;
d) $-5x \leq 15$; e) $-3x > -3$; f) $5z \leq -1$.

134. a) $3x + 2 < 5$; b) $7x - 4 \geq 8$; c) $9x + 5 > 5$;
d) $5x - 4 < 3x$; e) $6z + 1 > 2z$; f) $y + 5 < 2y$.

135. Ekvivalensek-e az egyenlőtlenségek:
a) $2x + 3 > x + 8$ és $x > 5$;
b) $2x - 3 \geq 2$ és $2x - 4 \geq 1$;
c) $3 - 5x < x$ és $6x > 3$;
d) $3x - 1 < 6 - 2x$ és $1 - 3x < 2x - 6$?

Oldjátok meg az egyenlőtlenségeket **(136–139)**!

136. a) $8x - 3 > 5x + 6$; b) $7y - 13 < 5y - 9$;
c) $2x - 3 \leq 3x - 8$; d) $x - 15 \geq 4x + 3$;
e) $3 + x > 2x - 3$; f) $5 - 2y < y + 8$;
g) $3 - 5x > 4 - 5x$; h) $8 + 6z \leq 13 + 6z$.

137. a) $6x + 21 \leq 5x + 8$; b) $3x + 7 < 7x + 3$;
c) $7x - 5 > 3x + 7$; d) $2x - 9 \geq 9x + 5$;
e) $x - 15 < 6x - 10$; f) $11x - 3 \leq 8x - 15$;
g) $18 - 7x \geq 5x + 30$; h) $17 - x > 10 - 6x$.

138. a) $3(x + 1) > x + 5$; b) $2(x - 1) + 4 < x + 7$;
c) $4(x - 2) < x + 1$; d) $3(x + 2) - 4 > x + 2$;
e) $2(x + 3) \geq 5x - 9$; f) $4(x + 3) - 3x \leq x - 5$.

139. a) $-5(x - 1) < 3 - 7x$; b) $2(3 - x) - x < 7 + 3x$;
c) $3(2 - x) > x - 6$; d) $-3(2 + x) + 5x \leq 2x + 1$;
e) $8 - 3(x - 2) > 4x$; f) $5y < 12 - 4(y + 5)$.

140. Milyen feltételek mellett vesznek fel negatív értékeket a kifejezések:
a) $7 + 5x$; b) $10 - 0{,}5x$; c) $\sqrt{2} - 2x$?

141. Milyen feltételek mellett vesznek fel nemnegatív értékeket a kifejezések:
a) $2{,}5 + 0{,}5x$; b) $3{,}9 + 1{,}5x$; c) $1{,}2 - 3x$?

142. Milyen feltételek mellett vesznek fel 10-nél nagyobb értékeket a kifejezések:

a) $3 + 7x$; b) $5{,}4 - 2{,}3x$; c) $12 - x\sqrt{x}$?

143. Milyen feltételek mellett lesz nagyobb a $3x - 7$ kifejezés értéke a kifejezések megfelelő értékénél:

a) $2x + 1$; b) $5x - 2$; c) $3x - 5$?

Oldjátok meg az egyenlőtlenségeket **(144–147)**!

144. a) $\frac{5x}{7} \le 3$; b) $\frac{-3x}{4} < 5$; c) $0 > \frac{5x}{11}$; d) $\frac{2x}{5} > -3$;

e) $-\frac{x}{2} \le 1$; f) $\frac{3x-1}{4} \le 2$; g) $\frac{2x+5}{7} > 3$; h) $\frac{7x-3}{5} \ge x$.

145. a) $\frac{3x}{5} > 2$; b) $\frac{4x}{7} < 4$; c) $\frac{2x}{3} < -4$; d) $0 \ge \frac{17x}{5}$;

e) $\frac{6x+1}{2} > 3$; f) $\frac{4x-11}{5} \le 0$; g) $\frac{3}{5}(x-4) > 12$.

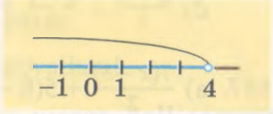
146. a) $(x + 2)^2 > 5x + x^2$; b) $(x + 3)^2 - 2x \ge 5x + x^2$;

c) $4 - (x - 2)^2 > x - x^2$; d) $(7 - x)^2 - x^2 \le x - 11$.

147. a) $(x - 3)^2 \le x^2 - x$; b) $(x - 2)^2 + 7x < x^2 - 3x$;

c) $1 - (x + 2)^2 < 5 - x^2$; d) $(x - 5)^2 - 7 > x^2 + 8$.

148. Írjatok le három olyan egyenlőtlenséget, amelyek megoldásainak a halmaza megfelel a 16. ábrán látható intervallumnak!



16. ábra

149. Az n mely legnagyobb természetes szám értéke elégíti ki az egyenlőtlenségeket:

a) $18 - 3(n - 15) > 11n$;

b) $0{,}3(n - 2) < 1{,}2 - 0{,}5(n + 2)$?

150. Az m mely legkisebb egész értéke elégíti ki az egyenlőtlenségeket:

a) $3m + 8(2m - 1) > 5m + 35$;

b) $m^2 + 4m \le (m + 2)^2$?

B szint

151. Az x mely értékei mellett lesznek az $y = \frac{2}{3}x - 7$ függvény értékei:

a) pozitívak; b) negatívak;

c) mai mari decât 5; d) $-\frac{1}{3}$-nál nem kisebbek?

» **152.** Az x mely értékei mellett lesznek az $y = 5{,}2 - 2{,}5x$ függvény értékei:
a) negatívak; b) pozitívak; c) 7,7-nél nem nagyobbak?

153. Az x változó mely értékei mellett van értelme a kifejezéseknek:

a) $\sqrt{3x-6}$; b) $\sqrt{4-x}$; c) $\sqrt{-(2-x)}$;

d) $\sqrt{0{,}5-0{,}3x}$; e) $\sqrt{1-5(x+3)}$; f) $x+\sqrt{2-x}$?

Oldjátok meg az egyenlőtlenségeket **(154–161)**!

» **154.** a) $3(x+4)+2(3x-2) > 5x-3(2x+4)$;
b) $2x-6-5(2-x) \le 12-5(1-x)$;
c) $x+2 < 5(2x+8)+13(4-x)-3(x-2)$.

155. a) $y+7 > 4(2-y)-12(4-2y)+17(y-1)$;
b) $0{,}2(x-2)-0{,}3(3-x) \ge 0{,}4(2x-1)-0{,}5(x-1)$;
c) $2{,}5(2-z)-3{,}5(z-1) \le 2{,}5(z+2)-1{,}5(2-z)$.

156. a) $\frac{x}{2}+\frac{x}{4} > 6$; b) $\frac{3x}{2}-\frac{x}{3} > 2$; c) $x+\frac{x}{2} \ge 15$;

d) $\frac{2+x}{3}-\frac{3-x}{2} > 0$; e) $\frac{3-y}{4}-\frac{y+2}{5} \ge 2$.

» **157.** a) $\frac{7(x-3)}{2}+5(6-2x)+14 < \frac{x-3}{2}$;

b) $3(2x-4)+5(x-2)-3 \le \frac{9}{2}(x-2)$.

158. a) $\frac{3(2+c)}{2}-6 < \frac{7c-2}{3}-\frac{12+4c}{5}$;

b) $\frac{5z-18}{10}-\frac{27-10z}{14} > \frac{3z-12}{5}-\frac{9-4z}{7}$.

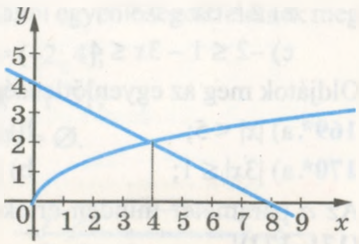
159. a) $(x-2)(x-3) > x^2$; b) $(x+5)(x-7) < x^2$;
c) $(2x-1)(3x+5) \le 6x^2$; d) $(3x-2)(3+2x) \ge 6x^2$;
e) $(3x-1)^2 \le 9x(x-2)$; f) $(3x-2)^2 \ge (3x+2)^2$.

» **160.** a) $(z-2)^2 < (z-3)(z+5)$; b) $(y+3)^2 \ge y(y-5)$;
c) $\left(\frac{1}{x}+x\right)^2 > \frac{1}{x^2}+x^2$; d) $\left(\frac{1}{x}-x\right)^2 > \frac{1}{x^2}+x^2$.

161. a) $\frac{1}{\sqrt{2}-1} - 3x > \sqrt{2}$; b) $\frac{1}{\sqrt{2}+1} - \frac{x}{2} > \sqrt{2} - 1$;

c) $\frac{2x-3}{3+\sqrt{2}-\sqrt{3}} > 0$; d) $\frac{2-\sqrt{2}}{3x+2} < 0$.

162. A 17. ábrán a $y = \sqrt{x}$ és $y = 4 - \frac{x}{2}$ függvények görbéi láthatók. Ezeket alapul véve határozzátok meg a $\sqrt{x} < 4 - \frac{x}{2}$ egyenlőtlenség megoldásainak halmazát!



17. ábra.

163. Oldjátok meg grafikusan az egyenlőtlenségeket:

a) $\sqrt{x} > \frac{8}{x}$; b) $\sqrt{x} \geq x^2$; c) $\sqrt{x} < x - 2$!

164. Állítsatok össze olyan x változós egyenlőtlenséget:

a) amelynek egyetlen megoldása sincs;

b) amelyet minden valós szám igazzá teszi;

c) amelynek csak az egy 5-ös szám a megoldása;

d) amelynek megoldáshalmaza a $(-2; 3)$ intervallum!

165. A turistáknak legkésőbb 3 óra múlva vissza kell térniük a szálláshelyükre. Mekkora távolságra tudnak leúszni motorcsónakkal a folyón a vízfolyás irányában, ha a vízi jármű sebessége 18 km/h, a vízfolyás sebessége pedig 4 km/h?

166*. Oldjátok meg az egyenlőtlenségeket:

a) $(2x-3)(5x+2) - (3x-1)(4x+2) > 2(1-x)(1+x) - x$;

b) $(3x-2)(3x+2) - (2x-3)^2 \leq 5x(x+7) + 10$;

c) $(4x+1)(3x-5) + (2x+3)(5x-4) < 2x^2 + 5(2x-1)^2$;

d) $(3x+1)^2 - (2x-3)(3-2x) \geq (2x+1)^2 + (3x-7)(3x+7)$!

167. a) $-3 \leq 5x - 1 \leq 4$; b) $1 < 3x + 4 < 7$;

c) $-5 \leq 3 - 2x < 1$; d) $-8 < 7 - 5x < -3$;

e) $0,7 < 3x + 1 < 1,3$; f) $-3,4 \le 5 - 2x \le 1,8$;

g) $-\frac{2}{5} < \frac{4x-1}{3} < \frac{3}{5}$; h) $-\frac{2}{3} < \frac{2-0,5x}{5} \le \frac{1}{3}$!

168. Oldjátok meg a kettős egyenlőtlenségeket, és határozzátok meg a legnagyobb egész számú megoldását:

a) $2 < 3x - 5 < 7$; b) $-3 \le 4 - 2x \le 3$;

c) $-2 \le 1 - 3x \le 4$; d) $-0,3 < 2,7 + 0,1x < 1,7$!

Oldjátok meg az egyenlőtlenségeket **(169–170)**!

169*. a) $|x| < 5$; b) $|x - 3| \le 7$; c) $|2x - 3| < 1$.

170*. a) $|3x| \le 1$; b) $|x + 7| < 3$; c) $|1 - 5x| \le 2$.

Az a paraméter minden értékére oldjátok meg az egyenlőtlenségeket **(171–172)**!

171*. a) $ax > 5$; b) $ax \le 0$; c) $(2a - 1)x < 4a^2 - 4a + 1$.

172*. a) $ax > a$; b) $a^2x \le 0$; c) $a^2 + a - 12 \le (9 - a^2)x$.

Ismétlő gyakorlatok

173. Végezzétek el a műveleteket:

a) $8 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^5$; b) $5 \cdot 10^{-8} - 8 \cdot 10^{-7}$;

c) $(4,2 \cdot 10^9)^2$; d) $(3,7 \cdot 10^5) \cdot 2,4 \cdot 10^8$;

e) $(3,6 \cdot 10^6) : (2,4 \cdot 10^3)$!

174. Ábrázoljátok a függvény grafikonját:

a) $xy + 6 = 0$; b) $y^2 - x = 0$!

175. Korábban 3 kg hús annyiba került, mint amennyibe most 2 kg kerül. Hány százalékkal drágult a hús?

5.§. INTERVALLUMOK

Az egyenlőtlenség megoldásainak halmaza leggyakrabban intervallum. Az intervallum fogalmát gyakran alkalmazzák a matematika egyéb területein is. Ezért ajánlatos különbséget tenni az intervallumok típusai között, és megtanulni megtalálni a metszetüket és uniójukat.

Két intervallum metszetének a közös részüket nevezzük.

Például a $(-\infty; 4)$ és $(-3; \infty)$ intervallumok metszete $(-3; 4)$.

Mivel két halmaz metszetét $\cap$ jellel jelölik, ezért ezt a következőképpen írjuk:

$$(-\infty; 4) \cap (-3; \infty) = (-3; 4).$$

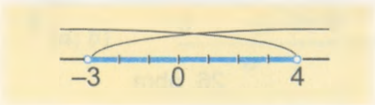
Szemléletesen ezt az egyenlőséget a 18. ábra mutatja.

Egyéb példák. A 19–21. ábráknak az alábbi egyenlőségek felelnek meg:

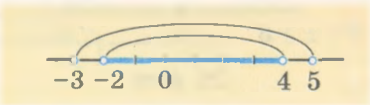
$$(-3; 5) \cap (-2; 4) = (-2; 4);$$

$$[-3; 5) \cap (-4; -3] = \{-3\};$$

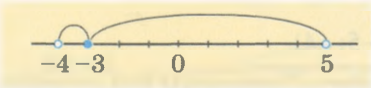
$$(-3; 5) \cap (-5; -4) = \varnothing.$$



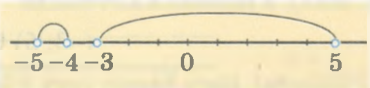
18. ábra



19. ábra



20. ábra



21. ábra

A második egyenlőség azt mutatja, hogy a $[-3; 5)$ és a $(-4; -3]$ intervallumoknak egy közös számuk van, a -3.

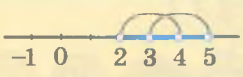
A $\varnothing$ jellel az *üres halmazt* jelölik. Az utolsó egyenlőség azt mutatja, hogy a $(-3; 5)$ és a $(-5; -4)$ intervallumoknak nincs közös számuk.

Két intervallum uniójának (egyesítésének, összegének) nevezzük azt a számhalmazt, amely mindegyik intervallum mindegyik számát és csakis ezeket a számokat tartalmazza.

Két intervallum uniójának jele: $\cup$. Ezért a következőket írjuk:

$$(2; 4) \cup (3; 5) = (2; 5).$$

Szemléletesen ezt az egyenlőséget a 22. ábra illusztrálja.



22. ábra

A 23–25. ábrák megfelelnek az alábbi egyenlőségeknek:

$$(-3; 5) \cup (-2; 4) = (-3; 5);$$

$$[-3; 5) \cup (-4; -3] = (-4; 5);$$

$$(-\infty; 4) \cup (-3; 0) = (-\infty; 4).$$



23. ábra



24. ábra



25. ábra



26. ábra

A (–3; 5) és (–5; –4) intervallumok uniója két különálló halmazból áll (26. ábra); a jelölése a következő:

$$(-3; 5) \cup (-5; -4).$$

Előfordul, hogy három vagy több intervallum unióját kell vizsgálni.

Három intervallum metszete olyan számhalmaz, amely mindhárom intervallumnak elemei. Például:

$$(-4; 5) \cap (-\infty; 6) \cap [-3; 7) = [-3; 5);$$

$$(-4; 5) \cup (-\infty; 6) \cup [-3; 7) = (-\infty; 7).$$

Ezeknek az egyenlőségeknek megfelel a 27. *a* és *b* ábra.



a *b*

27. ábra

Mivel az intervallumoknak több típusa létezik, ezért ennek megfelelő elnevezést kell alkalmazni a jelölésükre. Hagyományosan a következő elnevezéseket használják. Ha *a* és *b* tetszőleges számok, akkor:

$(-\infty; a)$, $(b; -\infty)$ – végtelen intervallumok;

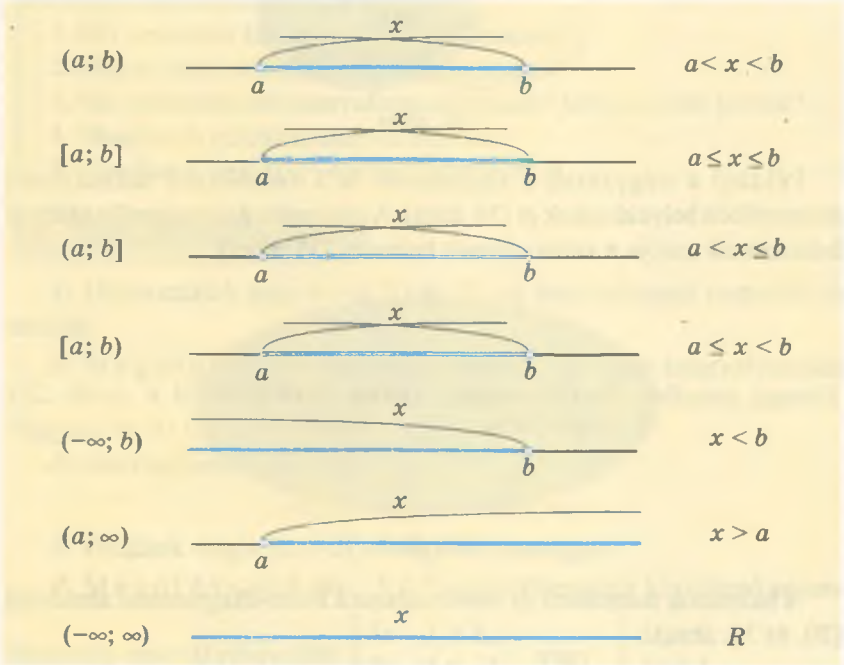
$(a; b)$ – nyílt intervallum;

$[a; b]$ – zárt intervallum;

$[a; b)$ – jobbról nyílt intervallum;

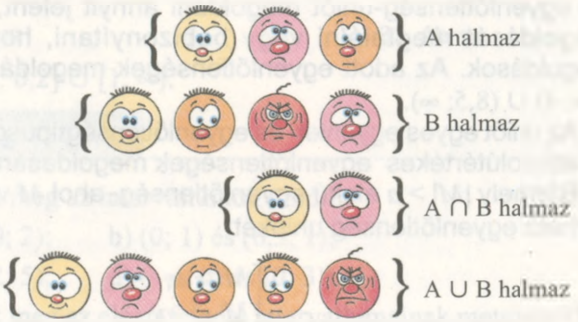
$(a; b]$ – balról nyílt intervallum.

A 28. ábrán az intervallumok típusai és azok jelölési módjai láthatók.

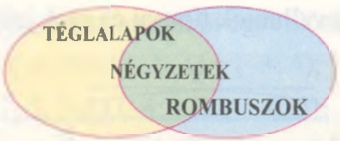


28. ábra

Az intervallumok a *halmazok* speciális esete. Ezeken kívül vizsgálnak olyan halmazokat, amelyeknek tetszőleges objektumok az elemei: emberek, állatok, növények, évszakok, a hét napja, mértani alakzatok, egyenletek, függvények. A metszet vagy unió fogalmak bármilyen halmazra alkalmazhatók (29. ábra).

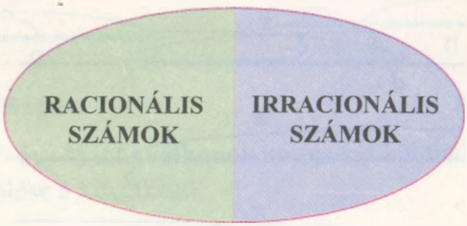


29. ábra



30. ábra

Például a négyzetek a *téglalapok* és a *rombuszok* halmazának metszetében helyezkednek el (30. ábra). A racionális és irracionális számok halmazának uniója a valós számok halmaza (31. ábra).



31. ábra

A halmazok metszeteit és unióit célszerű Euler-diagrammal ábrázolni (30. és 31. ábra).

Előfordul, hogy meg kell határozni két vagy több egyenlőtlenség megoldásainak unióját. Ilyen esetekben *egyenlőtlenség-unióról* beszélnek. Ezeket szögletes zárójelekkel jelölik:

$$\begin{bmatrix} 2x > 17, \\ x - 1 < 3, \end{bmatrix} \text{ vagy } \begin{bmatrix} x > 8{,}5, \\ x < 4. \end{bmatrix}$$

Az *egyenlőtlenség-unió* megoldásának a változó azon értékét nevezik, amely az adott egyenlőtlenségek legalább egyikét kielégíti. Az egyenlőtlenség-uniót megoldani annyit jelent, mint valamennyi megoldását megtalálni vagy bebizonyítani, hogy nem léteznek megoldások. Az adott egyenlőtlenségek megoldásainak halmaza a $(-\infty; 4) \cup (8{,}5; \infty)$.

Az uniót egyes egyenlet- és egyenlőtlenségtípusok, egyebek mellett az abszolútértékes egyenlőtlenségek megoldására használják.

Bármely $|M| > a$ alakú egyenlőtlenség, ahol M valamely kifejezés, leírható egyenlőtlenség unióként:

$$\begin{bmatrix} M > a, \\ M < -a. \end{bmatrix}$$

Ellenőrizzétek magatokat!

1. Mit nevezünk két intervallum metszetének?
2. Milyen jellel jelölik két halmaz metszetét?
3. Mit nevezünk két intervallum uniójának? Milyen jellel jelölik?
4. Mondjatok példákat intervallumokra!
5. Mondjatok példákat végtelen halmazokra!

Oldjuk meg együtt!

1. Határozzátok meg a $(-6; 8)$ és $(5; \infty)$ intervallumok metszetét és unióját!

✓ M e g o l d á s . Ábrázoljátok mértanilag az adott intervallumokat (32. ábra). A közös számaik (elemeik) az $(5; 8)$ intervallumot képezik. Vagyis $(-6; 8) \cap (5; \infty) = (5; 8)$.

Az intervallumok uniója:

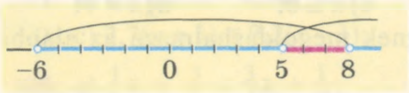
$$(-6; 8) \cup (5; \infty) = (-6; \infty).$$

2. Oldjátok meg a $|5x - 3| \geq 2$ egyenlőtlenséget!

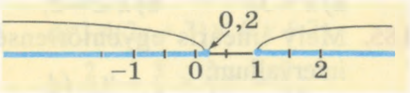
✓ M e g o l d á s . a) A $|5x - 3| \geq 2$ egyenlőtlenség a következő egyenlőtlenség-unióval ekvivalens $\left[\begin{array}{l} 5x - 3 \geq 2, \\ 5x - 3 \leq -2, \end{array}\right.$ vagy $\left[\begin{array}{l} 5x \geq 5, \\ 5x \leq 1, \end{array}\right.$

ahonnan $\left[\begin{array}{l} x \geq 1, \\ x \leq 0{,}2. \end{array}\right.$

A 33. ábra az adott egyenlőtlenséget kielégítő megoldásuniónak megfelelő intervallumot mutatja.



32. ábra



33. ábra

F e l e l e t : $(-\infty; 0{,}2] \cup [1; \infty)$.

Oldjátok meg szóban!

176. Határozzátok meg az intervallumok unióit:

a) $(0; 1)$ és $(0; 2)$; b) $(0; 1)$ és $(0{,}5; 1)$;

c) $(1; 2]$ és $[2; 5)$; d) $(-\infty; 0)$ és $[0; 3)$!

177. Határozzátok meg az előző feladat intervallumainak metszeteit!

178. Milyen természetes számokat tartalmaz a (1; 8) intervallum? És a [1; 8] intervallum?

179. Milyen egész számokat tartalmaznak az intervallumok:
a) [–3; 4]; b) (–3; 4); c) (–3; 4]; d) [–3; 4)?

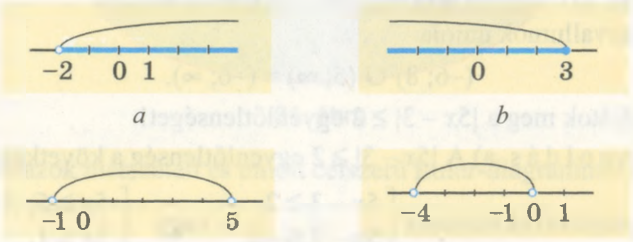
180. Az a és b valamennyi értéke mellett tartalmazza-e a $[a; b]$ intervallum a $(a; b)$ intervallumot?

181. Mivel egyenlő a $[a; b]$ és $(a; b)$ intervallumok metszete? És az uniójuk?

A szint

182. Ábrázoljátok a koordináta-egyenesen az intervallumokat:
a) $(2; \infty)$; b) $(-\infty; 0)$; c) $[-3; \infty)$; d) $(-\infty; -4]$!

183. Írjátok le jelekkel a 34. ábrán látható intervallumoknak megfelelő intervallumokat!



34. ábra

184. Ábrázoljátok intervallumok alakjában és koordináta-egyenesen is az alábbi egyenlőtlenségek megoldáshalmazát:
a) $x < 3$; b) $x \geq -2$; c) $x \leq 0$; d) $x > 7$!

185. Mely lineáris egyenlőtlenségnek megoldáshalmaza az alábbi intervallum:
a) $(3; \infty)$; b) $(-2; \infty)$; c) $(-\infty; 7]$; d) $[-3; \infty)$?

186. Mely lineáris egyenlőtlenségnek van a 34. ábrán látható megoldáshalmaza?

187. Ábrázoljátok jelekkel és grafikusan az alábbi kettős egyenlőtlenségek megoldáshalmazát:
a) $-3 < x < 2$; b) $0 < x < 4$; c) $-5 < x < 0$!

188. Határozzátok meg az alábbi intervallumok unióját és metszetét:
a) [2; 3] és [3; 5]; b) [–5; 0] és [–3; 0];
c) [–5; 7] és [–7; 5); d) (–2; –1) és [–3; –1];
e) (1; 2) és (–2; 1); f) $(-\infty; 2)$ és $[-2; \infty)$!

189. Másoljátok át a táblázatot a füzetetekbe és töltsétek ki a megadott intervallumok unióival és metszeteivel!

S.sz.	Intervallumok	Unió	Metszet
1.	$(0; 3)$ és $(0; 5)$		
2.	$(-2; 0)$ és $(-3; 0)$		
3.	$(-\infty; 1)$ és $(0; 2)$		
4.	$(-2; \infty)$ és $(0; \infty)$		
5.	$(-\infty; 1)$ és $(0; \infty)$		

190. Hasonlítsátok össze az a és c számokat, ha:

a) $(-\infty; a) \cup (c; \infty) = R$; b) $(a; x) \cap (x; c) = \emptyset$;

c) $(y; a) \cap (c; y) = \emptyset$; d) $(a; \infty) \cup (-\infty; c) = R$!

Oldjátok meg az egyenlőtlenségeket és a feleleteket írjátok le intervallum alakjában (**191–192**)!

191. a) $5x - 3 > 12$; b) $3x + 5 \geq 11$; c) $0{,}5x + 2{,}6 > 3$;

d) $1 + 2x < 7$; e) $5 - 3x < 2$; f) $-1{,}3x - 9 \leq 4$.

192. a) $3x \leq 1 - 2x$; b) $-7x < 3x + 5$; c) $5x > x - 2$;

d) $-2x > 9 - 5x$; e) $2x \leq 7x + 3$; f) $1{,}1x \geq x - 5$.

Ábrázoljátok a koordináta-egyenesen az egyenlőtlenségek megoldáshalmazait (**193–195**)!

193. a) $0{,}5x - 4(x - 3) > 3x$; b) $6x < 0{,}2x - 2(x + 3)$;

c) $0 < y - 0{,}3(2 - y)$; d) $4 \geq 5z - 0{,}2(1 - z)$.

194. a) $0{,}3 \leq 1{,}2 + 0{,}5(x - 2)$; b) $0 < 4{,}5 + 0{,}7(2y - 3)$;

c) $2{,}7(x + 3) < 7{,}2(x - 3)$; d) $3{,}4(2x + 3) < 6(x + 2)$.

195. a) $\frac{1}{2}x + \frac{3}{4} < \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$; b) $\frac{2}{5}y - \frac{3}{4} > \frac{3}{4}y - \frac{2}{5}$;

c) $x - \frac{2}{5}(x - 3) > 0{,}4$; d) $2y - \frac{1}{2} < 0{,}2(y + 3)$.

B szint

196. Milyen feltételek mellett igaz:

a) $(a; b) \cup (m; n) = (a; b)$; c) $(a; b) \cap (m; n) = (a; b)$?

197. Hasonlítsátok össze az x és a, y és c számokat, ha:

a) $(a; c) \cap (x; y) = (a; c)$; b) $(a; c) \cap (x; y) = (x; y)$;

c) $(a; c) \cup (x; y) = (a; c)$; d) $(a; c) \cup (x; y) = (a; y)$!

198. Írjátok le kettős egyenlőtlenség alakjában az a, x és y számok közötti relációt, ha:

a) $(a; \infty) \cap (x; y) = (a; y)$; b) $(a; \infty) \cup (x; y) = (a; \infty)$;

c) $(-\infty; a) \cup (x; y) = (-\infty; y)$; d) $(-\infty; a) \cap (x; y) = (-\infty; a)$!

199. Milyen 2-es nevezőjű törtek találhatók az intervallumokban:

a) $(1; 6)$; b) $(2; 3)$; c) $[-5; 0]$; d) $[-2; 3]$?

200. Vegyük a $[a; b]$ intervallum hosszának a $b - a$ különbséget. Hányszor nagyobb az első intervallum hossza a második hosszánál:

a) $[0; 10]$ és $[0; 5]$; b) $[1; 15]$ és $[1; 3]$;

c) $[-6; 10]$ és $[-3; 5]$; d) $[na; nb]$ és $[a; b]$?

201. Az x mely értékei mellett tartozik bele a $3x + 2$ kifejezés az alábbi intervallumokba:

a) $[-1; 5]$; b) $(1; 17)$; c) $[0; 3)$; d) $(-7; -1]$?

202. Az x mely értékei mellett tartozik bele az $1{,}3 - 0{,}3x$ kifejezés az alábbi intervallumokba:

a) $(-0{,}2; 2{,}5)$; b) $[1; 4)$; c) $(-2{,}6; 0{,}2]$; d) $[-2; 0{,}1]$?

Oldjátok meg az egyenlőtlenségeket, a megoldásaikat írjátok le intervallumok alakjában (**203–204**)!

203. a) $5(x + 2) + 2(x - 3) < 3(x - 1) + 4(x + 3)$;

b) $3(2x - 1) + 3(x - 1) \geq 5(x + 2) + 2(2x + 3)$;

c) $2(x - 3) + 5(x - 2) > 3(2 - x) - 2(3 - x)$;

d) $9(x - 2) - 2(3x - 2) \leq 5(x - 2) - 2(x + 5)$.

204. a) $\frac{x-2}{2} - \frac{2x-3}{3} < \frac{x-4}{6} - \frac{x+1}{3}$;

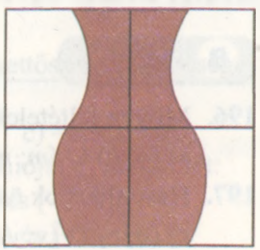
b) $\frac{x-2}{2} + \frac{1+7x}{4} - \frac{x+11}{3} \geq \frac{5+2x}{4}$;

c) $\frac{3-2x}{2} - \frac{x-1}{3} > \frac{5-3x}{4} - \frac{4x+3}{6}$;

d) $\frac{6x-5}{3} - \frac{11+7x}{5} < \frac{4x+3}{5} - \frac{2x+3}{10}$.

205. Egy négyzet területét 1-nek véve mely intervallumba tartozik a 35. ábrán látható alakzat:

$[1; 2)$, $[2; 3)$, $[3; 4)$ vagy $[4; 5)$?



35. ábra

Határozzátok meg azoknak a halmazoknak az unióit és metszeteit, amelyek az egyenlőtlenségek megoldásai (**206–207**)!

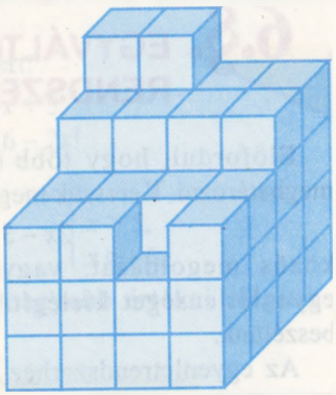
206. a) $\frac{5x-1}{4} + \frac{x+1}{2} < 0$ és $\frac{x-3}{5} - \frac{2x-1}{10} \geq 4$;

b) $\frac{3+x}{2} + \frac{2-x}{3} \geq 0$ és $\frac{4x+3}{7} + \frac{x+1}{2} < 2$.

207. a) $3x - \frac{2x-1}{4} > 0$ és $\frac{x+1}{2} - \frac{x+3}{4} \geq 2$;

b) $\frac{3-x}{15} - \frac{x-3}{3} > 0$ és $\frac{3x-2}{4} - \frac{5x+1}{3} > 1$.

208. A 36. ábrán egy 4×4-es négyzetre n számú kockából összerakott alakzat látható. A következő intervallumok közül melyikbe tartozik az n szám: (57; 67), (50; 69) vagy [55; 65]?



36. ábra

Oldjátok meg az egyenlőtlenségeket (**209–210**)!

209*: a) $|x| > 1$; b) $|x + 2| > 5$; c) $|3x + 1| > 5$;
d) $|5x| > 2$; e) $|x - 1| > 3$; f) $|5 - 2x| > 3$.

210. a) $|x + 5| > -3$; b) $|1 - 3x| < -1$; c) $|2x - 1| > 0$;
d) $|x - 1| \leq 0$; e) $|5x + 3| \geq 0$; f) $|8 - 4x| < 0$.

Ismétlő gyakorlatok

211. Határozzátok meg a szorzatok értékét:

a) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{18} \cdot \sqrt{40}$; b) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{48} \cdot \sqrt{50}$;

c) $\sqrt{42} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{27} \cdot \sqrt{18}$; d) $\sqrt{15} \cdot \sqrt{72} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{45}$!

212. Határozzátok meg az egyenletek gyökeit:

a) $5\sqrt{x} = 0$; b) $10\sqrt{x} = 4$; c) $6\sqrt{x} - 48 = 0$;

d) $3\sqrt{x} + 20 = 0$; e) $4\sqrt{x} + 9 = 11$; f) $7 - 2\sqrt{x} = 12$!

213. ***Al-Karkhi feladata.*** Határozzátok meg annak a téglalapnak a területét, amelynek az alapja magasságának a kétszerese, területe pedig szám szerint a kerületével egyenlő!

214. Az osztály tanulói karácsonyi üdvözlőlapokat váltottak egymással. Hány tanuló volt az osztályban, ha 812 képeslapra volt szükség egymás köszöntéséhez?

6.§. EGYVÁLTOZÓS EGYENLŐTLENSÉG-RENDSZEREK

Előfordul, hogy több egyenlőtlenség közös megoldását kell meghatározni. Keressük meg például a következő két egyenlőtlenség

$$2x - 3 < 5 \quad \text{és} \quad 2 - 3x < 11$$

közös megoldását, vagyis x azon értékeit, melyek mindkét egyenlőtlenséget kielégítik. Ilyenkor ***egyenlőtlenség-rendszerről*** beszélünk.

Az egyenletrendszerhez hasonlóan az egyenlőtlenség-rendszert is kapcsos zárójellel jelöljük:

$$\begin{cases} 2x - 3 < 5, \\ 2 - 3x < 11. \end{cases}$$

Az egyváltozós egyenlőtlenség-rendszer megoldása a változónak az az értéke, mely kielégíti a rendszer mindegyik egyenlőtlenségét.

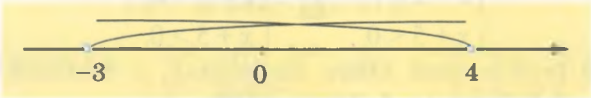
Az egyenlőtlenség-rendszert megoldani annyit jelent, mint meghatározni az összes megoldását vagy megmutatni, hogy nincs megoldása.

Oldjuk meg a vizsgált egyenlőtlenség-rendszert, fokozatosan helyettesítve mindegyik egyenlőtlenséget egyszerűbb, vele ekvivalens egyenlőtlenséggel:

$$\begin{cases} 2x - 3 < 5, \\ 2 - 3x < 11; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x < 8, \\ -3x < 9; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 4, \\ x > -3! \end{cases}$$

Az egyenlőtlenség-rendszer megoldásainak halmaza egyenlőtlenségei megoldáshalmazainak metszete lesz. Határozzuk meg a metszetet koordináta-egyenes segítségével.

Az első egyenlőtlenség megoldása a 4-nél kisebb valamennyi szám, a másodiknak valamennyi –3-nál nagyobb szám (37. ábra).



37. ábra

A rendszer mindkét egyenlőtlenségét igazzá teszik az x olyan értékei, mint a $-3 < x < 4$. Az x értékeinek ezen halmaza a $(-3; 4)$ intervallum. A –3 és a 4 nem tartozik az intervallumhoz.

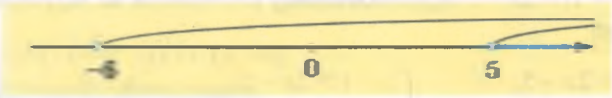
Oldjunk meg még két egyenlőtlenség-rendszert:

a) $\begin{cases} 3x - 1 > 14, \\ 2 - x < 8; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 1 > x + 3, \\ 5x - 1 < 6 - 2x! \end{cases}$

✓ Megoldás.

a) $\begin{cases} 3x - 1 > 14, \\ 2 - x < 8; \end{cases}$ $\begin{cases} 3x > 15, \\ -x < 6; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 5, \\ x > -6. \end{cases}$

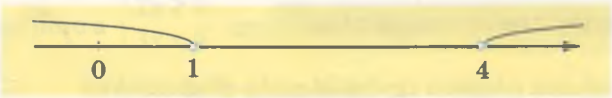
Mind a két egyenlőtlenséget x 5-nél nagyobb értékei elégítik ki (38. ábra).



38. ábra

b) $\begin{cases} 2x > x + 4, \\ 5x < 7 - 2x; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 4, \\ 7x < 7; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 4, \\ x < 1. \end{cases}$

Nem létezik olyan szám, amely egyszerre kisebb 1-nél és nagyobb 4-nél (39. ábra).



39. ábra

Felelet. a) $(5; \infty)$; b) nincs megoldás.

Egyenlőtlenség-rendszerek megoldására vezethető vissza például az alábbi egyenlőtlenségek megoldása:

a) $(x-2)(x+5)<0$; b) $\frac{x-2}{x+5}<0$.

✓ Megoldás. a) Két szám szorzata negatív, ha az egyik szám negatív, a másik pedig pozitív. Vagyis az adott egyenlőtlenség két egyenlőtlenség-rendszer megoldására vezethető vissza:

$$\begin{cases} x-2>0, \\ x+5<0 \end{cases} \quad \text{és} \quad \begin{cases} x-2<0, \\ x+5>0. \end{cases}$$

Az első rendszernek nincs megoldása, a második rendszer megoldásainak halmaza a $(-5; 2)$ intervallum.

b) A tört értéke negatív, ha vagy a számláló vagy a nevező negatív. Ezért a b) egyenlőtlenség megoldása ugyanolyan, mint az a) egyenlőtlenség megoldása, és mindkettőre a felelet is ugyanolyan.

Felelet. a) $(-5; 2)$; b) $(-5; 2)$.

Oldjuk meg az egyenlőtlenségeket:

a) $|2x-3|\le 5$; b) $|x-1|>2x-5$!

a) A $|2x-3|\le 5$ egyenlőtlenség és a $-5\le 2x-3\le 5$ kettős egyenlőtlenség ekvivalens a következő egyenlőtlenség-rendszerekkel:

$$\begin{cases} 2x-3\le 5, \\ 2x-3\ge -5, \end{cases} \quad \text{vagy} \quad \begin{cases} 2x\le 8, \\ 2x\ge -2. \end{cases}$$

Megoldásainak halmaza $[-1; 4]$.

b) A $|x-1|>2x-5$ egyenlőtlenség ekvivalens az egyenlőtlenség-együttessel:

$$\left[\begin{array}{l} x-1>2x-5, \\ x-1<-(2x-5); \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x-1>2x-5, \\ x-1<5-2x; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x<4, \\ 3x<6; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x<4, \\ x<2. \end{array}\right.$$

Az adott egyenlőtlenséget a $(-\infty; 4)$ és $(-\infty; 2)$ intervallumokba tartozó valamennyi szám kielégíti. Ezek uniója $(-\infty; 4)$.

Felelet. a) $[-1; 4]$; b) $(-\infty; 4)$.

Ellenőrizzétek magatokat!

1. Mondjatok példákat egyenlőtlenség-rendszerekre!
2. Mit jelent az egyváltozós egyenlőtlenség-rendszer megoldása?
3. Mit jelent megoldani az egyenlőtlenség-rendszert?
4. Hogyan határozható meg a rendszer megoldása, ha ismert a rendszert alkotó egyenlőtlenségek megoldása?

Oldjuk meg együtt!

1. Oldjátok meg az egyenlőtlenség-rendszert:

$$\begin{cases} (z^2-2)\cdot 3 \geq 3z^2-5, \\ z^2+2z \leq (z-1)(z+1)! \end{cases}$$

✓ Megoldás. $\begin{cases} 3z^2-6 \geq 3z^2-5, \\ z^2+2z \leq z^2-1; \end{cases}$ $\begin{cases} -6 \geq -5, \\ z \leq -0{,}5. \end{cases}$

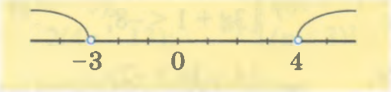
Az első egyenlőtlenség nem igaz, ezért a rendszernek nincs megoldása.

Felelet. A rendszernek nincs megoldása.

2. A koordináta-egyenes felhasználásával oldjátok meg a $|x-2|+|x+1|>7$ egyenlőtlenséget!

✓ Megoldás. A $|x-2|$ kifejezés az x és 2 koordinátájú pontok közötti távolság, a $|x+1|$ kifejezés az x és -1 koordinátájú pontok közötti távolság.

A 40. ábrán látható, hogy az x koordinátájának 4-nél nagyobbnak vagy -3-nál kisebbnek kell lennie.



40. ábra

Felelet. $(-\infty; -3) \cup (4; \infty)$.

Oldjátok meg szóban!

215. Vannak-e megoldásai az egyenlőtlenség-rendszereknek:

a) $\begin{cases} x>3, \\ x<2; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x>0, \\ x<5; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x>-3, \\ x<2; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x\leq -3, \\ x\leq 2? \end{cases}$

216. Kielégíti-e a $\begin{cases} 2x \geq 0, \\ 3x<6 \end{cases}$ egyenlőtlenség-rendszert az alábbi szám:

a) 2; b) 3; c) 0; d) 6?

217. A következő egyenlőtlenségek közül:

a) $|x|<3$; b) $|x|-1<0{,}5$; c) $|x|>5$; d) $7-|x|<0$

melyik ekvivalens a megfelelő egyenlőtlenségek rendszerével? Melyik ekvivalens a megfelelő egyenlőtlenség-együttessel?

A szint

218. Megoldása-e a 2 a következő az egyenlőtlenség-rendszereknek:

a) $\begin{cases} x-3<5, \\ 4x+2>9; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x \geq x+2, \\ 12<8x-5; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 0{,}5x \geq 2x-3, \\ 3x-1>4? \end{cases}$

219. A -1, 0, 1, 2, 3 számok közül melyekre teljesül az egyenlőtlenség-rendszer:

a) $\begin{cases} 3-x \geq 0, \\ 7+x>0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+3>5, \\ 1-x<0? \end{cases}$

220. Oldjátok meg az egyenlőtlenség-rendszert és jelöljetek meg két olyan egész számot, amelyek kielégítik azt:

a) $\begin{cases} 2x+7 \geq 0, \\ 3x+6 \geq 0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-5<0, \\ 3x+9<0; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x+1<0, \\ 2x+5>0! \end{cases}$

Oldjátok meg az egyenlőtlenség-rendszert (**221–224**)!

221. a) $\begin{cases} 2x+3>x, \\ 4x-x<3; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2-5x<7, \\ 3x+1<-8; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 8 \leq 4x+8, \\ 0>3x+6. \end{cases}$

222. a) $\begin{cases} 5y-1<2y, \\ 3-2y<y; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4-3y \geq -2y, \\ y-3 \geq 4; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5y-7 \leq 3y, \\ 2-4y<5. \end{cases}$

223. a) $\begin{cases} 0{,}5z-2<z, \\ 0{,}3-2z>3z; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 0{,}8x-3 \geq 5, \\ 0{,}8x+1 \geq 9; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 1-1{,}5x<x, \\ 1+1{,}5x<16. \end{cases}$

224. a) $\begin{cases} \frac{x}{2}-1>\frac{x}{3}, \\ x-1<7; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 6z+1<4z, \\ \frac{z}{2}-\frac{z}{5}>0{,}3; \end{cases}$ c) $\begin{cases} \frac{x-1}{2}<\frac{x-2}{3}, \\ 2x-3>0. \end{cases}$

225. Adjatok az a-nak olyan értékeket, amely mellett az a), b), c) egyenlőtlenség-rendszereknek: 1) van megoldásuk; 2) nincs megoldásuk:

a) $\begin{cases} x>a, \\ x<3; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x<a, \\ x<-3; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x \geq a, \\ -x \geq 2. \end{cases}$

Oldjátok meg az egyenlőtlenség-rendszereket (**226–228**)!

226. a) $\begin{cases} 15-3x<9x-12, \\ 8x-7>5x+4; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 12-z<8z-15, \\ 7z-6>6z+4; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2(x-3) \le 5x+7, \\ 3+4x > 3(x-5); \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5(x+2) \ge 2x-4, \\ 3(x+3) < 7-8x. \end{cases}$

227. a) $\begin{cases} 3-2(x-1) < 0, \\ 5-3(x-4) > 0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} -4(2x-1) < 3, \\ -5(x-3) \ge 4; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x \le 2-3(x+1), \\ 5x \ge 3+(x-4); \end{cases}$ d) $\begin{cases} 8(1+x) > 3(2x-1), \\ 5 < 3x-2(8x-3). \end{cases}$

228. a) $\begin{cases} 2x-0{,}2(x-2) > 4, \\ \frac{x}{2} - 6 \le \frac{x}{8}; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4 - \frac{x-1}{3} \ge x, \\ 7x - 1 \ge 48; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 0{,}5x+3 \le 2{,}5-3x, \\ 5-0{,}2x \le 0{,}2-5x; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 0{,}4z+2 \ge 3{,}5-2z; \\ 7-1{,}3z \ge 0{,}3-5z. \end{cases}$

» **229.** Határozzátok meg az egyenlőtlenség-rendszerek egész számú megoldásait:

a) $\begin{cases} 2n+3 < 4(3n-5), \\ 8-4n < 7-2(4n-13); \end{cases}$ b) $\begin{cases} n(n+1) > (n+2)(n-2), \\ (n-3)^2 \ge 3-n(2-n)! \end{cases}$

230. Oldjátok meg a kettős egyenlőtlenséget:

a) $-2 < 3x-4 < 5$; b) $3 < 2-x < 5$;

c) $0{,}4 \le 2x+1 \le 0{,}6$; d) $0{,}7 \le 3-2x \le 1{,}2$;

e) $-1 \le \frac{1}{3}(6-z) < 1$; f) $-2{,}5 < \frac{1}{2}(1-3y) \le 1{,}5!$

B szint

Oldjátok meg az egyenlőtlenség–rendszereket (**231–234**)!

231. a) $\begin{cases} C^2-3 < (C+3)^2, \\ 2C+C^2 > (C-2)^2; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5-(x+3)^2 > (x-2)(1-x), \\ x(x+7) < (x+7)^2-7; \end{cases}$

c) $\begin{cases} (z^2-2)\cdot 3 \ge 3z^2, \\ z^2+2z \le (z-1)z; \end{cases}$ d) $\begin{cases} (x-1)^2+3x \ge (x-1)(x+1), \\ (x+3)(x-1) \ge (x+2)^2-1. \end{cases}$

» **232.** a) $\begin{cases} (x+1)^2 > x^2+4, \\ (x-1)^2 > x^2-4; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 7+(x+3)^2 < 5x+(x-3)^2, \\ (x-1)(x+2) < (x+1)(x-2); \end{cases}$

c) $\begin{cases}(x-1)^2 \geq x^2+7,\\(x-2)^2 \geq x^2-8;\end{cases}$ d) $\begin{cases}3x-(x+1)^2 \leq 5-(1-x)^2,\\(x-3)(x+3) > (x+7)(x-7).\end{cases}$

233. a) $\begin{cases}\frac{2y+15}{9} - \frac{1-y}{5} \geq \frac{y}{3},\\2y > \frac{19-2y}{2} - \frac{11-2y}{4};\end{cases}$ b) $\begin{cases}4\frac{2}{3}x - 1 < 3x + 3\frac{1}{3},\\\frac{3x+12}{5} + 3 > \frac{8+x}{2};\end{cases}$

c) $\begin{cases}\frac{4x+3}{3} - \frac{3x-1}{8} < 1 + \frac{8-x}{6},\\\frac{7x+3}{5} + \frac{3x+1}{2} > 4 + \frac{x-4}{2}.\end{cases}$

234. a) $\begin{cases}c + 0{,}25 < \frac{14c+3}{12},\\c - \frac{1-3c}{4} < \frac{c+8}{6};\end{cases}$ b) $\begin{cases}\frac{a}{3} + \frac{a}{2} < \frac{5}{3},\\6 - \frac{a+16}{3} < -2a;\end{cases}$

c) $\begin{cases}\frac{2x-1}{3} - x \leq \frac{11-x}{6} - 2,\\3(x-1)^2 + 8x + 2 \leq x(3x-2) + 1.\end{cases}$

235. Az x változó mely értékei mellett van értelme a kifejezéseknek:

a) $\sqrt{5-x} + \sqrt{x-3}$; b) $\sqrt{2x-1} - \sqrt{3x+2}$;

c) $\sqrt{x+3} + \frac{1}{\sqrt{x-3}}$; d) $\frac{\sqrt{2x+3}}{5} + \frac{5}{\sqrt{3x+2}}$?

236. Az x változó mely értékei mellett tartozik a $4x-1{,}5$ kifejezés a következő intervallumokhoz:

a) $(1; 2)$; b) $[-2; 0]$; c) $(-\infty; 0)$; d) $[3; 7)$?

237. A C mely értékei mellett tartozik a $\frac{2-3c}{4}$ kifejezés a következő intervallumokhoz:

a) $(-\infty; 0)$; b) $[0; \infty)$; c) $(-1; 1)$; d) $[1; 8]$?

Oldjátok meg az egyenlőtlenségeket (**238–241**)!

238. a) $(x+2)(x-7) < 0$; b) $(x-3)(2x-5) > 0$;

c) $(3-2z)(1+z) \geq 0$; d) $(2y+8)(7-4y) \leq 0$;

e) $0{,}5x(x+3) < 0$; f) $(x^2+1)(5-x) \leq 0$.

239. a) $(2x+1)(10x-7) \geq 0$; b) $(5-2x)(1-3x) \leq 0$;

c) $(x^2+5)(x+5) > 0$; d) $x^3+2x^2+x < 0$;

e) $5x^2-3x-2 \leq 0$; f) $x^3+3x^2 > 0$.

240. a) $\frac{x+3}{x-7} > 0$; b) $\frac{5-2x}{2x-7} \geq 0$; c) $\frac{3-x}{2x-1} < 0$;

d) $\frac{(x^2+3)x}{2x-3} < 0$; e) $\frac{3x+5}{x(x^2+1)} > 0$; f) $\frac{x^3}{x-3} \leq 0$.

241. a) $\frac{3x-1}{x+5} \leq 0$; b) $\frac{5-2x}{2+5x} > 0$; c) $\frac{-3x}{7x-14} \leq 0$;

d) $\frac{3x-1}{2x+4} < 2$; e) $\frac{2x+3}{4-x} > 5$; f) $\frac{x-4}{3x+2} > 3$.

242. Az n mely értékei mellett lesz az $\frac{1}{n+1}$ és $\frac{1}{n-1}$ kifejezések különbsége nagyobb a szorzatuknál?

243. Az n mely értékei mellett lesz a $\frac{3}{n-4}$ és $\frac{3}{3-n}$ kifejezések összege kisebb a szorzatuknál?

244. Oldjátok meg a három egyenlőtlenségből álló rendszert:

a) $\begin{cases} 2x-1 > 5, \\ 4x-3 < 37, \\ 3x-5 > 7; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x-2 \leq 5x-8, \\ 2x-1 \leq 4(2-x), \\ 2x-7 < 3(1-x)! \end{cases}$

245. Oldjátok meg a kettős egyenlőtlenségek rendszerét:

a) $\begin{cases} 0 < 1-2x < 1, \\ 3 < 3x+4 < 5; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 1 < 5-3x < 3, \\ -3 < 3-2x < 1! \end{cases}$

246. Oldjátok meg az egyenlőtlenségeket:

a) $x^2 \leq 25$; b) $x^2 > 16$; c) $x^2 < 2$!

247. Igaz-e az a pozitív értéke esetén, hogy az egyenlőtlenségek:

a) $x^2 < a^2$ ekvivalens a $|x| < a$ egyenlőtlenséggel;

b) $x^2 > a^2$ ekvivalens a $|x| > a$ egyenlőtlenséggel?

248. Oldjátok meg kétféle módszerrel az egyenlőtlenségeket:

a) $|x - 1| < 2$; b) $(x - 1)^2 < 4$; c) $(2x + 1)^2 < 9$;

d) $|x - 8| > 1$; e) $(x - 2)^2 \geq 25$; f) $(5x - 3)^2 > 49$!

Oldjátok meg az egyenlőtlenségeket (**249–251**)!

249*. a) $|2x + 3| < 5$; b) $|x - 3| + |x + 1| \leq 7$;

c) $|3x - 1| \geq 2$; d) $|x - 2| + |x + 1| \geq 3$.

250*. a) $|5 - x| > 0{,}5$; b) $|x - 1| + |1 - x| > 1$;

c) $|4x - 3| < x$; d) $|x - 7| > |x - 1|$.

251*. a) $(x - 3)\sqrt{x - 2} < 0$; b) $(2x - 1)\sqrt{3x - 2} > 0$;

c) $(5 - 2x)\sqrt{x^2 + 3} \geq 0$; d) $(4x - 5) : \sqrt{3x - 1} \leq 0$.

Ismétlő gyakorlatok

252. Bontsátok fel tényezőkre a négyzetes háromtagokat (másodfokú polinomokat):

a) $x^2 - 10x + 21$; b) $a^2 + 2a - 15$; c) $2x^2 + 5x - 3$;

d) $c^2 - 11c - 26$; e) $9a^2 + 3a - 2$; f) $4c^2 + 25c + 25$!

253. Bizonyítsátok be, hogy a $17^{10} + 3 \cdot 7^{10} - 3 \cdot 7^9 + 17^9$ kifejezés maradék nélkül osztható 36-tal!

254. Írjátok le normálalakban a számokat:

a) 47 000 000; b) 308 000 000; c) 0,000000039;

d) 0,00000407; e) $803 \cdot 10^9$; f) $0{,}067 \cdot 10^7$;

g) $3{,}7 \cdot 100^5$; h) $0{,}42 \cdot 10^{-7}$; i) 2000^5!

255. Ábrázoljátok az egyenleteket grafikusan:

a) $2x + 3y = 6$; b) $xy = 12$;

c) $x^2 + y^2 = 4$; d) $y^2 - x^2 = 0$!

7. §. EGYENLŐTLENSÉGEK BIZONYÍTÁSA

Előfordul, hogy azt kell bizonyítani: az adott változós egyenlőtlenséget a változók minden megadott értéke igazzá teszi. Ez legkönnyebben a „kevesebb" és a „több" fogalmak meghatározása alapján tehető meg:

ha $a > b$, akkor $a - b$ pozitív szám.

1. példa. Bizonyítsátok be, hogy az a változó bármely valós értékére igaz a következő egyenlőtlenség:

$$a^2 + 2 > 2a!$$

Bizonyítás. $a^2 + 2 - 2a = a^2 - 2a + 1 + 1 = (a-1)^2 + 1$. Az a változó bármely valós értéke mellett a $(a-1)^2$ kifejezés értéke nemnegatív, ezért a $(a-1)^2 + 1$ kifejezés értéke mindig pozitív. Tehát $a^2 + 2 > 2a$.

2. példa. Bizonyítsátok be, hogy pozitív a és b mellett:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}\,!$$

Bizonyítás. $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}$.

A kapott $\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}$ kifejezés bármely pozitív a és b esetén nemnegatív. Tehát, ha $a > 0$ és $b > 0$, akkor

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}\,.$$

Az egyenlőség csak akkor áll fenn, ha $a = b$.

Megjegyzés. Az $\frac{a+b}{2}$ kifejezést az a és b számok ***számtani középarányosának***, a $\sqrt{ab}$ kifejezést pedig ***mértani középarányosuknak*** nevezzük. Ezért a bebizonyított egyenlőtlenség így is megfogalmazható:

két pozitív szám számtani középarányosa nem kisebb mértani középarányosuknál.

3. példa. Bizonyítsátok be, hogy pozitív a, b és c esetén:

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc!$$

Bizonyítás. Mivel két pozitív szám számtani középarányosa nem kisebb, mint a mértani középarányosuk, ezért

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}\,; \quad \frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc}\,; \quad \frac{c+a}{2} \geq \sqrt{ca}\,.$$

Az egyenlőtlenségeket tagonkénti összeszorzásával a következőt kapjuk:

$$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{b+c}{2} \cdot \frac{c+a}{2} \geq \sqrt{ab \cdot bc \cdot ca}\,,$$

vagyis

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc.$$

A *változót tartalmazó állítás bebizonyítása* annak megmutatását jelenti, hogy az adott állítás a változók minden megengedett értéke mellett igaz. Az *állítás cáfolása* annak bizonyítását jelenti, hogy az adott állítás hamis.

A *változót tartalmazó egyenlőtlenség cáfolása* annak igazolását jelenti, hogy az adott egyenlőtlenség a változó akár *egyetlen* értéke mellett is hamis.

Példa. Cáfoljátok a $(n + 1)^2 > n^2$ egyenlőtlenséget!

C á f o l a t. Ha $n = -1$, akkor az egyenlőtlenség a következő alakot veszi fel: $0^2 > 1^2$. Ez az egyenlőtlenség hamis. Ezért hamis az adott egyenlőtlenség is.

Azt a példát, amely bármely állítást cáfol, *ellenpéldának* nevezzük.

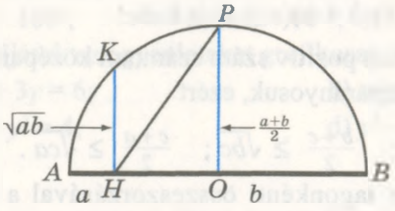
A számtani és a mértani középarányosokon kívül a tudósok gyakran vizsgálják két vagy több szám négyzetes középarányosát. Több szám *négyzetes középarányosának* nevezzük a négyzeteik számtani középarányosából vont négyzetgyökkel egyenlő számot. Az a és b vagy x, y és z számok négyzetes középarányosa megfelelően:

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}, \quad \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}}.$$

Két szám négyzetes középarányosa mindig nagyobb számtani középarányosuknál. Próbáljátok meg bebizonyítani, hogy bármely a és b pozitív számok esetében:

$$\sqrt{ab} \le \frac{a + b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

A 41. ábra felhasználásával illusztráljátok, hogy igaz az ilyen kettős egyenlőtlenség!



41. ábra

Ellenőrizzétek magatokat!

1. Mit jelent az „állítás bizonyítása”! Mit jelent az „állítás cáfolata”?
2. Mit jelent az „egyenlőtlenség bizonyítása”?
3. Fogalmazzátok meg, mi két szám számtani és mértani középarányosa!
4. Hasonlítsátok össze két pozitív szám számtani és mértani középarányosát!

Oldjuk meg együtt!

Bizonyítsátok be, hogyha $a < b$, akkor $a < \frac{a+b}{2} < b$! Fogalmazzátok meg ezt az állítást!

Bizonyítás. Ha $a < b$, akkor $2a < a + b$, ahonnan $a < \frac{a+b}{2}$.

Ha $a < b$, akkor $a + b < 2b$, ahonnan $\frac{a+b}{2} < b$.

A két esetet egyesítve:

ha $a < b$, akkor $a < \frac{a+b}{2} < b$.

A kapott kettős egyenlőtlenség a következőképpen fogalmazható meg: **két egymással nem egyenlő valós szám számtani közepárányosa nagyobb az adott számok kisebbikénél és kisebb azok nagyobbikánál.**

Oldjátok meg szóban!

256. Határozzátok meg a következő számok számtani közepárányosát:

a) 1,3 és 2,7; b) 38 és 0;

c) 409 és –409; d) 10, 20 és 30!

257. Határozzátok meg a következő számok mértani közepárányosát:

a) 50 és 8; b) 1000 és 40;

c) 0,2 és 0,8; d) 5^{11} és 5^{-7}!

Bizonyítsátok be az egyenlőtlenséget (**258–259**)!

258. a) $(a-2)^2 + 3 > 0$; b) $(1-2a)^2 + 1 > 0$;

c) $(a+2)^2 > 4a$.

259. a) $a^2 + 6a + 10 > 0$; b) $9 - 12a + 4a^2 \geq 0$;

c) $a^4 + 1 \geq 2a^2$.

A szint

Bizonyítsátok be az egyenlőtlenséget (**260–263**)!

260. a) $a^2 + 2a + 2 > 0$; b) $a^2 - 2a + 5 > 0$;

c) $2a^2 + 4a + 5 > 0$; d) $2a^2 + a + 1 > 0$.

261. a) $a^2 + 3 > 2a$; b) $a^2 + 5 > 4a$;

c) $2a^2 + 1 > 2a$; d) $3a^2 + 1 > 2a$.

262. a) $(2a-1)(2a+1) < 4a^2$; b) $(a-3)^2 > a(a-6)$;

c) $a^2 + 65 > 16a$; d) $a^4 + 82 > 18a^2$.

263. a) $(a+1)^2 \geq 4a$; b) $99 + 20a < (a+10)^2$;

c) $\frac{2a}{1+a^2} \leq 1$; d) $\frac{a^2+4}{4} \geq a$.

264. Bizonyítsátok be, hogy x minden negatív értéke esetén:

a) $(x-1)(x-2) > 0$; b) $x^2 + 9 > 10x$;

c) $(x-3)(3-x) < 0$; d) $(2-x)(x-3) < 0$!

265. Bizonyítsátok be, hogy c minden pozitív értéke esetén:

a) $c + \frac{1}{c} \geq 2$; b) $9c + \frac{1}{c} \geq 6$; c) $(c+1)\left(\frac{1}{c}+1\right) \geq 4$!

B szint

Bizonyítsátok be az egyenlőtlenséget (**266–267**)!

266. a) $a^2 - ab + b^2 \geq 0$;

b) $a^2 + b^2 + 2 \geq 2(a+b)$.

267. a) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$;

b) $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a+b+c)$.

268. Bizonyítsátok be, hogy bármely két valós szám négyzetének összege nem kisebb kétszeres szorzatuknál!

269. Mi a nagyobb:

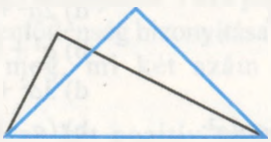
a) két pozitív szám négyzeteinek összege vagy összegük négyzete;

b) két negatív szám négyzeteinek összege vagy összegük négyzete?

270. Bizonyítsátok be, hogy két valós szám négyzeteinek félösszege nem kisebb félösszegük négyzeténél!

271. Az egyenlő területű összes négyszög közül a négyzetnek a legkisebb a kerülete. Bizonyítsátok be!

272. Az egyenlő átfogójú összes derékszögű háromszög közül az egyenlő szárú háromszög területe a legnagyobb (42. ábra). Bizonyítsátok be!



42. ábra

273. Egy adott körbe beírt valamennyi négyszög közül legnagyobb területe a négyzetnek van. Bizonyítsátok be!

Bizonyítsátok be az egyenlőtlenségeket a változók bármely valós értékei esetére (**274–278**)!

274. a) $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$; b) $(a + b + 1)^2 \leq 3\,(a^2 + b^2 + 1)$.

275. a) $a^4 + b^4 + 2c^2 \geq 4abc$; b) $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geq 4abcd$.

276. a) $8a^2 + 14ab + 7b^2 + 1 > 0$; b) $2a^2 + 5c^2 + 2ac + 1 > 0$.

277. a) $(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)\,(x^2 + y^2)$;

b) $\sqrt{(a+x)^2 + (b+y)^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{x^2 + y^2}$.

278. a) $|a| + |b| \geq |a + b|$; b) $|a| - |b| \leq |a - b|$.

Bizonyítsátok be, hogy igazak a számegyenlőtlenségek (**279–281**)!

279. a) $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} < 2$; b) $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}} < 3$.

280. a) $\sqrt{3+2\sqrt{3+2\sqrt{3+2\sqrt{3}}}} < 3$; b) $\sqrt{12-\sqrt{12-\sqrt{12}}} > 3$.

281. a) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{99\cdot 100} < 1$;

b) $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{100^2} < 1$.

Ismétlő gyakorlatok

282. Oldjátok meg az egyenleteket:

a) $\frac{4}{x+3} = -2x$; b) $\frac{3}{x+3} + \frac{5x}{x-1} = -1$!

283. Az $x^3 + 2x^2 - 9x + a = 0$ egyenlet egyik gyöke: –2. Határozzátok meg az egyenlet többi gyökét!

284. Az érc 60% vasat tartalmaz. A belőle olvasztott nyersvas vastartalma 98%. Hány tonna vasércből olvasztható 1000 t nyersvas?

285. Számítsátok ki, hogy $f(9)$, $f(99)$, $f(999)$, ha $f(x) = \frac{2x^2 - 6x + 4}{2x^2 - 2x - 4}$!

OLDJÁTOK MEG ÖNÁLLÓAN A FELADATOKAT!

I. változat

1°. Oldjátok meg a $3x - 5 < 13$ egyenlőtlenséget!

2. Oldjátok meg az egyenlőtlenség–rendszereket:

a°) $\begin{cases} 2x + 3 > 7, \\ x - 5 \le 1; \end{cases}$ b•) $\begin{cases} 3 - \frac{x-2}{2} \le x, \\ 5(x - 2) < 8x + 1! \end{cases}$

3•. Oldjátok meg a $-1 \le 2x - 3 < 5$ kettős egyenlőtlenséget!

II. változat

1°. Oldjátok meg a $4x - 7 < 13$ egyenlőtlenséget!

2. Oldjátok meg az egyenlőtlenség–rendszereket:

a°) $\begin{cases} 3x - 7 < 5, \\ 2x + 1 \ge 3; \end{cases}$ b•) $\begin{cases} 2 - \frac{x-1}{3} \ge x, \\ 7(x - 3) > 5x - 2! \end{cases}$

3°. Oldjátok meg a $-3 < 2c + 1 \le 7$ kettős egyenlőtlenséget!

III. változat

1°. Oldjátok meg az $5x - 4 > 26$ egyenlőtlenséget!

2. Oldjátok meg az egyenlőtlenség–rendszereket:

a°) $\begin{cases} 5x - 2 \le 18, \\ 2x + 3 > 5; \end{cases}$ b•) $\begin{cases} 4 - \frac{2-x}{3} > x, \\ 2(x - 4) \ge 5x - 2! \end{cases}$

3°. Oldjátok meg a $-2 \le 3n + 4 < 10$ kettős egyenlőtlenséget!

IV. változat

1°. Oldjátok meg a $7x + 3 > 38$ egyenlőtlenséget!

2. Oldjátok meg az egyenlőtlenség-rendszereket:

a°) $\begin{cases} 4x - 3 > 5, \\ 5x + 2 \le 27; \end{cases}$ b•) $\begin{cases} 3 - \frac{x-4}{2} < 3x, \\ 5(x - 1) \ge 3x - 1! \end{cases}$

3•. Oldjátok meg a $-5 < 2m - 1 \le 7$ kettős egyenlőtlenséget!

A FEJEZET TARTALMÁNAK ÖSSZEFOGLALÁSA

Ha két kifejezést $<$, $>$, $\leq$ vagy $\geq$ relációs jellel kapcsolunk össze, akkor *egyenlőtlenséget* kapunk. Azt az egyenlőtlenséget, melynek mindkét oldalán szám áll, *számegyenlőtlenségnek* nevezzük.

A számegyenlőtlenségek tulajdonságai

Ha: $a < b$ és $b < c$, akkor $a < c$;
$a < b$ és c tetszőleges szám, akkor $a + c < b + c$;
$a < b$ és $c > 0$, akkor $ac < bc$;
$a < b$ és $c < 0$, akkor $ac > bc$;
$a < b$ és $c < d$, akkor $a + c < b + d$;
$a < b$, $c < d$ és a, b, c, d pozitív számok, akkor $ac < bd$.

Az $a < x < b$, $a \leq x < b$, $a < x \leq b$, $a \leq x \leq b$ alakú egyenlőtlenségeket *kettős egyenlőtlenségeknek* nevezzük. Ezeket a mennyiségek és kifejezések értékeinek megbecsülésére célszerű alkalmazni. Tehát ha $a < x < b$ és $c < y < d$, akkor

$$a + c < x + y < b + d, \quad a - d < x - y < b - c,$$
$$ac < xy < bd, \quad a : d < x : y < b : c.$$

A két utóbbi kettős egyenlőtlenség akkor igaz, ha az a és c számok pozitívak.

A $2x + 17 < 1$ és a $12 - 3x \geq 2$ az egyváltozós egyenlőtlenségek példái.

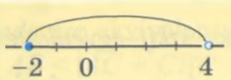
A *változókat tartalmazó egyenlőtlenségek* az egyenletekhez hasonlóak.

Az ismeretlent tartalmazó *egyenlőtlenség megoldásának* a változó azon értékét nevezzük, mely kielégíti az adott egyenlőtlenséget, azaz igaz számegyenlőtlenséggé alakítja át. *Egyenlőtlenséget megoldani* annyit jelent, mint megtalálni valamennyi megoldását, vagy bebizonyítani, hogy nincs megoldása.

Az egyenlőtlenség megoldásainak halmaza leggyakrabban *intervallum*. Például a $2x + 7 < 15$ és $8 + 3x \geq 2$ egyenlőtlenségek megoldásai a következő halmazok: $(-\infty, 4)$ és $[-2; \infty)$.

Az egyazon változót tartalmazó több egyenlőtlenség *egyenlőtlenség-rendszert* alkot, ha a közös megoldásaikat kell meghatározni. Az egyenlőtlenség-rendszert megoldani annyit jelent, hogy meg kell határozni valamennyi megoldását vagy bebizonyítani, hogy nincs megoldásuk. A következő egyenlőtlenség-rendszer

$$\begin{cases} 2x + 7 < 15, \\ 3x + 8 \geq 2 \end{cases}$$



megoldáshalmaza: $[-2; 4)$.

MATEMATIKATÖRTÉNET

Az emberek már az időszámításunk előtt is meg tudták határozni, hogy két szám közül melyik a nagyobb és melyik a kisebb. Eukleidész (i. e. III. sz.) *Elemek* című művében található egy egyenlőtlenségnek a bizonyítása, amely a jelenlegi jelrendszerrel a következőképpen írható le: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Abban az időben azonban az a és b nem tetszőleges számokat, hanem szakaszhosszakat jelölt; a bizonyítása mértani módszerrel, egyenlőtlenségjelek nélkül történt.

Archimédesz (i. e. III. sz.) bebizonyította azt az egyenlőtlenséget, amely mai formában a következőképpen írható le: $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$.

A < és > jeleket először egy angol matematikus, T. Harriot alkalmazta az 1600-as évek elején. Annak ellenére, hogy az egyenlőtlenségjelek alkalmazását később javasolták, mint az egyenlőségjelet, mégis korábban kezdték használni a V betű nyomdai alkalmazásának köszönhetően, míg = jel abban az időben még nem volt a nyomdákban.

A nem szigorú egyenlőtlenségek jeleit 1670-ben vezetette be J. Wallis angol matematikus, azzal a különbséggel, hogy a vonást ő még az egyenlőtlenségjel fölött használta. Az ilyen jeleket ritkán használták. A számunkra megszokott formájukban a ≤ és ≥ jeleket egy francia matematikus, P. Burger javasolta 1734-ben.

A korszerű matematikában és alkalmazott tudományokban az egyenlőtlenséget gyakran használják a középarányosok, így több valós szám számtani és mértani középarányosai között. Például ha $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ tetszőleges számok, $n \in N$, $n \geq 2$, akkor igaz a következő egyenlőtlenség:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}}.$$

Ismeretesek olyan egyenlőtlenségek, amelyeknek saját nevük van.

Az n pozitív számok számtani és mértani középarányosai közötti egyenlőtlenséget *Couchy–egyenlőtlenségnek* nevezik:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}.$$

Bunyakovszkij–egyenlőtlensége:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)\,(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2).$$

Agustin Louis Couchy – francia matematikus, a Párizsi Akadémia, a londoni Royal Society és több más tudományos akadémia tagja. A matematika különböző ágazataiban – számtan és számelmélet, algebra, matematikai analízis, differenciál-egyenletek, elméleti és égi mechanika, matematikai fizika – tevékenykedett. Összességében több mint 800 publikációja jelent meg. A Párizsi Akadémia 27 kötetben jelentette meg összegyűjtött műveit.



Agustin Louis Couchy (1789–1857)

A XIX. században élt ukrán matematikusok közül az egyenlőtlenségek problematikáját leginkább **Viktor Jakovics Bunyakovszkij** kutatta. A Vinnyicaterületi Barban született, Franciaországban és Németországban tanult. Párizsban védte meg a disszertációját és szerezte meg 1825-ben a doktori címet. Az általa bebizonyított egyenlőtlenséget gyakran tulajdonítják H. Schwarz német matematikusnak, de Bunyakovszkij 16 évvel korábban oldotta meg a problémát. Az ukrán tudós népességstatisztikai kérdések kutatásával, az orosz hadsereg kontingensnagyságának, a bírósági tanúvallomások valósághűségének, a megfigyelések során előforduló tévedések matematikai vonatkozásaival is foglalkozott. 1858–ban az orosz kormány statisztikai és biztosítási főszakértője volt (207. old.).



V. J. Bunyakovszkij (1804–1889)

Az egyenlőtlenségeket a mértanban is alkalmazzák. Például az $ABC\Delta$ csak akkor és csakis akkor létezik, amikor igaz a következő három egyenlőtlenség:

$$AB < BC + CA,\ BC < CA + AB \text{ és } CA < AB + BC.$$

Igaz–e, hogy a három egyenlőtlenség rendszere ekvivalens a következő kettős egyenlőtlenséggel: $|AC - CB| < AB < |AC + CB|$?

FELKÉSZÜLÉS A TÉMAISMERETI ÉRTÉKELÉSRE

1. sz. tesztfeladat

1. Válasszátok ki az igaz egyenlőtlenséget:

a) $0{,}2 > \sqrt{2}$; b) $-1 < -2$; c) $5 \geq 5$; d) $2^{-1} \leq 2^{2}$!

2. Az $5 > 3$ és $2 > -1$ egyenlőtlenségek összege a következő egyenlőtlenség:

a) $4 > 5$; b) $4 < 5$; c) $7 > 2$; d) $7 \geq 2$!

3. Mutassátok meg a szigorú egyenlőtlenséget:

a) $15 \geq 5$; b) $2 \leq 2$; c) $7 > -2$; d) $-10 \geq 10$!

4. Az $x^2 + 2x + 1 \leq 0$ egyenlőtlenséget az alábbi számok elégítik ki:

a) 2; b) 1; c) 0; d) -1.

5. Hány egész szám elégíti ki a $-1 \leq x \leq 1$ egyenlőtlenséget:

a) egy; b) kettő; c) három; d) négy?

6. Válasszátok ki a $\sqrt{3}$-nak megfelelő intervallumot:

a) $[2; 3]$; b) $(-\infty; \sqrt{3})$;

c) $(2\sqrt{3}; 3\sqrt{3})$; d) $(-\sqrt{3}; \infty)$.

7. Válasszátok ki azt az egyenlőtlenséget, amelynek nincs megoldása:

a) $|x| \geq -3$; b) $x < -3$; c) $7 - |x| < 0$; d) $x^2 < 0$!

8. A $\begin{cases} 2x \leq 3 \\ x + 1 \leq 2 \end{cases}$ egyenlőtlenség-rendszernek a következő megoldáshalmaza van:

a) $(-\infty; 1]$; b) $[1{,}5; \infty)$; c) $(-\infty; 1{,}5]$; d) $[2; 3]$!

9. Melyik az $x^2 - 2x \geq x^2 + 2$ egyenlőtlenség legnagyobb számértékű megoldása:

a) 2; b) 1; c) -1; d) -2?

10. Határozzátok meg az $y = \frac{1}{x^2} + \sqrt{x}$ függvény értelmezési tartományát:

a) $(-\infty; 0]$; b) $(-\infty; 0)$; c) $[0; \infty)$; d) $(0; \infty)$!

Típusfeladatok az 1. sz. dolgozathoz

1. Hasonlítsátok össze a törteket:

a°) $\frac{5}{7}$ és $\frac{3}{7}$; b°) $-\frac{4}{3}$ és $-\frac{4}{3}$; c•) $\frac{5}{6}$ és $\frac{6}{7}$; d•) $-\frac{7}{13}$ és $-\frac{13}{27}$!

2. Ismeretes, hogy $x < y$. Hasonlítsátok össze:

a°) $x - 3$ és $y - 3$; b°) $1{,}3x$ és $1{,}3y$;

c•) $-2x$ és $-2y$; d•) $5 - x$ és $5 - y$!

3. Adva van: $7 < b < 12$, $2 < c < 5$. Becsüljétek meg a kifejezés értékét:

a°) $3b$; b°) bc; c•) $3b + 2c$; d•) $\frac{3b + 2c}{bc}$!

4. Oldjátok meg az egyenlőtlenséget:

a°) $2x - 5 < 7$; b°) $3x + 7 < 7x + 3$;

c•) $4 - (x - 2)^2 > x - x^2$; d•) $\frac{x - 3}{5} - \frac{2x - 1}{10} \geq 4$!

5•. Határozzátok meg az A és C halmazok unióját és metszetét, ha:

a) $A = (2; 5)$, $C = (1; 3)$; b) $A = (-3; \infty)$, $C = (-\infty; 3]$;

c) $A = (-\infty; \pi)$, $C = [\sqrt{10}; \sqrt{11}]$!

6. Oldjátok meg az egyenlőtlenség-rendszereket:

a°) $\begin{cases} 6x - 7 \geq 4x - 3, \\ 3x + 16 \geq 8x - 4; \end{cases}$ b•) $\begin{cases} x(x + 7) \geq (x - 7)^2, \\ (3x - x)(x + 3) \geq 0{,}5x - x^2! \end{cases}$

7•. Határozzátok meg a függvény értelmezési tartományát:

$$y = \sqrt{2x + 3} - \frac{9}{\sqrt{9 - 2x}}.$$

8•. Oldjátok meg az egyenlőtlenséget:

a) $|5x - 3| \leq 1$; b) $|3x - 15| > 9$!

9••. Oldjátok meg az egyenletet:

$$|x + 1| + |x - 2| = 3!$$

10••. Bizonyítsátok be az egyenlőtlenséget, ha: $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$:

$$(a + 2c)(c + 2b)(b + 2a) > 16\sqrt{2}\,abc!$$

2. FEJEZET

MÁSODFOKÚ FÜGGVÉNY

Az emberi tudásnak nincs olyan területe, amelynek ne lennének részei a függvények és grafikus ábrázolásaik.

K. F. Lebegyincev



A függvény – sok folyamat vizsgálatának célszerű matematikai modellje. Az $y = ax^2 + bx + c$ képlettel leírható függvény – másodfokú függvény. A görbéje – parabola. Az ilyen függvényeket gyakran alkalmazzák a tudomány különböző ágazataiban. Ezek a másodfokú egyenletekhez és egyenlőtlenségekhez kapcsolódnak.

A fejezet fő témái:

- **a függvények tulajdonságai;**
- **függvény-transzformációk;**
- **másodfokú függvény;**
- **másodfokú egyenlőtlenségek;**
- **másodfokú egyenletrendszerek.**

8.§. FÜGGVÉNYEK

A függvény az egyik legfontosabb matematikai fogalom. Sok példa hozható fel a változók közötti összefüggéssel és megfeleltetéssel kapcsolatban. Az $S = 4\pi R^2$ képlet például a gömb sugara és felületének területe közötti összefüggést fejezi ki.

A $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ képlettel az inga l hossza és T lengési periódusa közötti megfeleltetés határozható meg. Vagyis T az l függvénye (itt $\pi \approx 3{,}14$, $g \approx 9{,}8$ m/s^2.

Idézzük fel a függvényekkel kapcsolatos fontosabb ismereteket.

Függvénynek nevezünk minden olyan megfeleltetést, amely valamely D halmaz minden x eleméhez csakis egy y elemet rendel hozzá. Ebben az esetben az x-et ***független változónak*** vagy ***argumentumnak***, az y-t ***függő változónak***, a D halmazt a függvény ***értelmezési tartományának*** nevezzük. Az y összes értékének halmazát, amelyet a függvény felvehet, a függvény ***értékkészletének*** nevezzük és E betűvel jelöljük.

Függvénygörbének nevezzük a koordinátasík valamennyi olyan pontjának halmazát, amelyek abszcisszái az argumentum értékeivel, az ordinátái a függvény megfelelő értékeivel egyenlők.

A függvényt leggyakrabban képlettel, értéktáblázattal vagy grafikonnal adják meg. Például az $y = x^2$ képlet azt a függvényt adja meg, amely a számok és négyzeteik közötti megfeleltetést fejezi ki. Ha a függvény értelmezési tartományának a $[-3; 3]$ intervallumhoz tartozó egész számokat tekintjük, akkor a függvényt a következő értéktáblázat foglalja magában:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

Ennek a függvénynek a grafikonja a 43. ábrán látható hét pont. Értelmezési tartománya a $D = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ halmaz, értékkészlete az $E = \{0, 1, 4, 9\}$ halmaz.

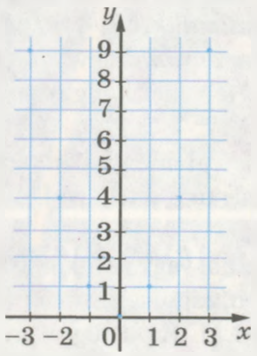
Ha az $y = x^2$ függvény értelmezési tartománya a $[-2; 2]$ intervallum, akkor a függvény grafikonja a 44. ábrán látható parabola egy része. A függvény értékkészlete a $[0; 4]$ intervallum.

Az összes valós szám $\boldsymbol{R}$ halmazán értelmezett $y = x^2$ függvény grafikonja egész parabola (45. ábra). Ennek a függvénynek értelmezési tartománya a valós számok $\boldsymbol{R}$ halmaza, értékkészlete a $[0; \infty)$ intervallum.

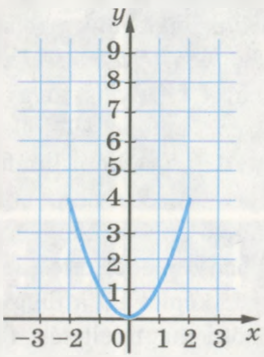
Idézzünk fel néhány függvényt.

y = kx az egyenes arányosság függvénye k ≠ 0. A grafikonja olyan egyenes, amely áthalad az origón. A függvény értelmezési tartománya az $\boldsymbol{R}$ halmaz, értékkészlete szintén az $\boldsymbol{R}$ halmaz. Például az $y = 2x$ függvény görbéje a 46. ábrán látható.

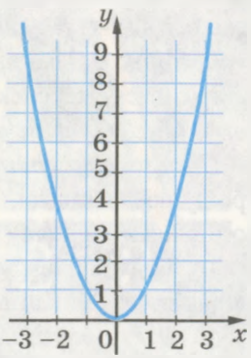
y = kx + b függvényeket lineáris függvényeknek nevezzük. A grafikonja olyan egyenes, mely nem párhuzamos az y tengellyel. Értelmezési tartománya az $\boldsymbol{R}$ halmaz, értékkészlete szintén az $\boldsymbol{R}$ halmaz, ha $k \neq 0$. Ha $k = 0$, akkor értékkészlete egyetlen szám, a b. Például: $y = x + 2$ (47. ábra), $y = 3{,}5$ (48. ábra).



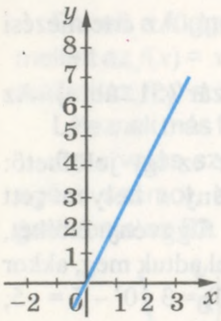
43. ábra



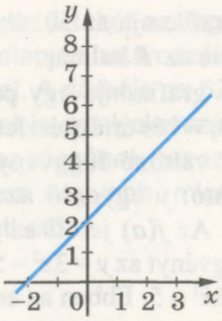
44. ábra



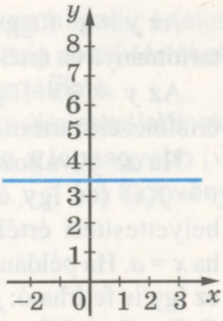
45. ábra



46. ábra



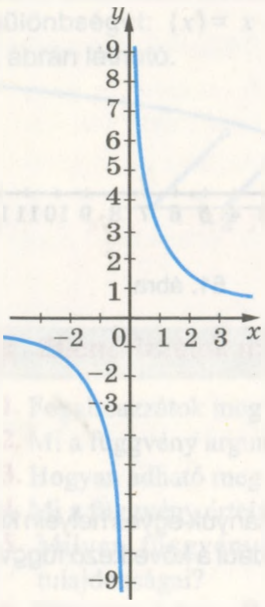
47. ábra



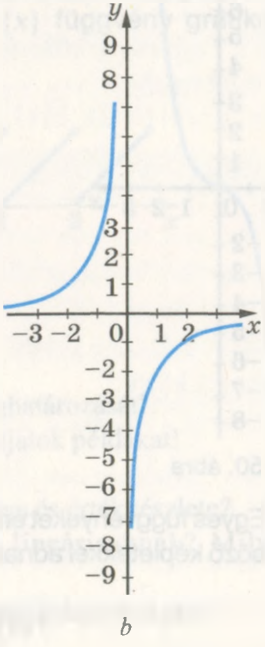
48. ábra

$y = \frac{k}{x}$ – ***fordított arányosság*** **($k \neq 0$).** A grafikonja hiperbola. Ha $k > 0$, akkor a hiperbola ágai a koordináta-rendszer I. és III. negyedében találhatók, ha $k < 0$, akkor a II. és IV. negyedében vannak. Az $y = \frac{k}{x}$ függvény értelmezési tartománya: az $\boldsymbol{R}$ halmaz, a nulla kivételével, értékkészlete ugyanaz a halmaz $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$.

Például az $y = \frac{3}{x}$ (49. *a* ábra), $y = -\frac{2}{x}$ (49. *b* ábra).



a



b

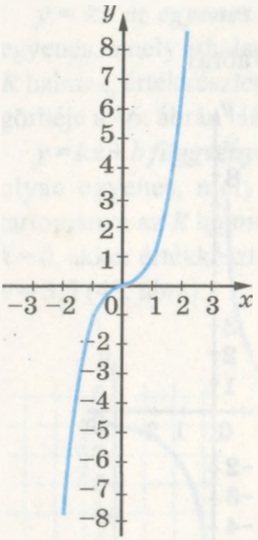
49. ábra

Az $y = x^3$ függvény grafikonja az 50. ábrán látható. Az értelmezési tartománya és értékkészlete az $\boldsymbol{R}$ halmaz.

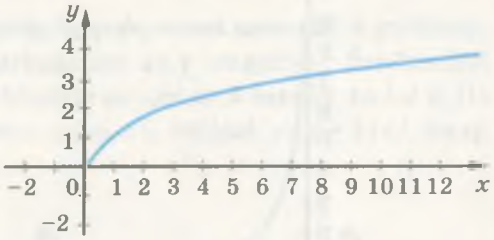
Az $y = \sqrt{x}$ függvény grafikonja egy parabolaszár (51. ábra). Az értelmezési tartománya $[0; \infty)$ és értékkészlete $[0; \infty)$.

Ha az y változó az x változó függvénye, akkor ez így jelölhető: $y = f(x)$ (és így olvasható: y egyenlő az f függvény x helyen vett helyettesítési értékével). Az $f(a)$ jelöli az $y = f(x)$ függvény értékét, ha $x = a$. Ha például a függvényt az $y = 3x^2 - 5$ képlettel adtuk meg, akkor ez így is felírható: $f(x) = 3x^2 - 5$. Ebben az esetben $f(0) = 3 \cdot 0^2 - 5 = -5$; $f(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 5 = 7$.

M e g j e g y z é s. Ha az $y = f(x)$, akkor gyakran azt mondják, hogy y az x függvénye, vagyis az y változót nevezik függvénynek. Pedig a függvényen nem egy függő változót kell érteni, hanem a két változó közötti megfelelést. Ráadásul nem bármilyen megfelelést, hanem csak egyértelmű megfelelést, amikor az x változó minden értékéhez *egyetlen* y érték van hozzárendelve.



50. ábra



51. ábra

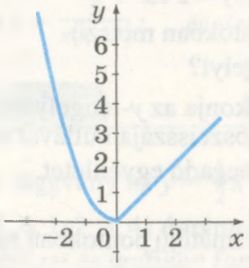
Egyes függvényeket értelmezési tartományuk egyes helyein különböző képletekkel adnak meg. Ilyen például a következő függvény:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ ha } x < 0, \\ x, \text{ ha } x \geq 0. \end{cases}$$

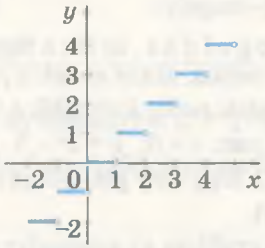
Ennek a függvénynek az értékét az argumentum negatív értékei mellett az $f(x) = x^2$ képlet alapján határozzák meg, míg pozitív értékek mellett az $f(x) = x$ képlettel. A görbéje az 52. ábrán látható.

Léteznek más függvények is, amelyeket számotokra új jelekkel jelölnek.

Az x valós szám *egész részének* nevezzük azt a legnagyobb $[x]$ egész számot, amely nem nagyobb, mint x. Az $y = [x]$ függvény grafikonja az 53. ábrán látható.

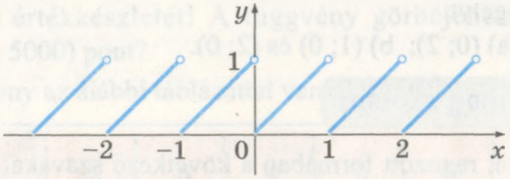


52. ábra



53. ábra

Az x valós szám *törtrészének* nevezzük e szám és egész részének a különbségét: $\{x\} = x - [x]$. Az $y = \{x\}$ függvény grafikonja az 54. ábrán látható.



54. ábra

Ellenőrizzétek magatokat!

1. Fogalmazzátok meg a függvény meghatározását!
2. Mi a függvény argumentuma? Mondjatok példákat!
3. Hogyan adható meg a függvény?
4. Mi a függvény értelmezési tartománya és értékkészlete?
5. Milyen függvényeket nevezünk lineárisaknak? Milyenek a tulajdonságai?
6. Nevezzétek meg a fordított arányosság tulajdonságait!
7. Mi a függvény grafikonja (görbéje)?

Oldjuk meg együtt!

1. A függvényt az $f(x) = x^3 + 1$ képlet adja meg. Határozzátok meg: $f(-3)$, $f(0)$, $f(-1)$, $f(\sqrt{2})$ értékeit!

Megoldás. $f(-3) = (-3)^3 + 1 = -27 + 1 = -26$,
$f(0) = 0^3 + 1 = 0 + 1 = 1$, $f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^3 + 1 = 2\sqrt{2} + 1$.

Felelet. $f(-3) = -26$, $f(0) = 1$, $f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} + 1$.

2. Az $y = x^2 - 3x + 2$ függvény mely pontokban metszi:
a) az y-tengelyt; b) az x-tengelyt?

Megoldás. a) Ha a függvény grafikonja az y-tengelyt valamely pontban metszi, akkor ennek a pontnak az abszcisszája nullával egyenlő, a koordinátái pedig kielégítik a függvényt megadó egyenletet.

Adva van: $x = 0$; $y = 0^2 - 3 \cdot 0 + 2 = 2$.

Tehát a függvény grafikonja a (0; 2) koordinátájú pontokban metszi az y-tengelyt.

b) Ha grafikon az x-tengelyt valamely pontban metszi, akkor ennek a pontnak az ordinátája nullával egyenlő, a koordinátái pedig kielégítik a függvényt megadó egyenletet.

Adva van: $y = 0$; $x^2 - 3x + 2 = 0$; $x_1 = 1$; $x_2 = 2$.

Tehát a függvény grafikonja a (1; 0) és (2; 0) koordinátájú pontokban metszi az x-tengelyt.

Felelet. a) (0; 2); b) (1; 0) és (2; 0).

Oldjátok meg szóban!

286. Mondjátok ragozott formában a következő szavakat: a) *függvény*; b) *argumentum*; c) *grafikon*!

287. Adjátok meg képlettel azt a függvényt, amely kifejezi a megfelelést a számok és: a) a kőbeik; b) az ellentétes számaik; c) a reciprok számaik között!

288. Milyenek a következő képletekkel megadott függvények grafikonjai:

a) $y = 3x + 1$; b) $y = x^2$; c) $y = 3$;

d) $y = \frac{3}{x}$; e) $y = \frac{x}{3}$; f) $y = \sqrt{x}$?

289. Igaz-e, hogy:

a) az $y = \frac{2}{3}x - 5$ függvény görbéje egyben a $2x - 3y = 15$ egyenlet görbéje?

b) az $y = \sqrt{x}$ függvény görbéje ugyanolyan, mint az $y^2 = x$ függvényé. Miért?

290. A függvények melyikének a görbéje halad át a koordináta-rendszer origóján: a) $y = 2(x - 3)$; b) $y = 2x^2$; c) $y = x(x - 2)$?

291. Határozzátok meg a függvények értelmezési tartományát:

a) $y = 3x - 2$; b) $y = 4 - x^2$; c) $y = -2{,}5$;

d) $y = \frac{5}{x(x-3)}$; e) $y = \sqrt{2x-4}$; f) $y = \frac{1}{x}\sqrt{5-2x}$!

A szint

292. A függvény az $y = \frac{1}{2}x^2$ képlettel van megadva a $D = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ értelmezési tartományban. Adjátok meg a függvényt táblázat és grafikon formájában!

293. Ábrázoljátok az $y = \frac{1}{2}x^2$ függvény görbéjét a $[-4; 4]$ intervallumban! Határozzátok meg a függvény értékkészletét!

294. Az $y = \frac{1}{2}x^2$ függvény az $\boldsymbol{R}$ halmazon van megadva. Határozzátok meg az értékkészletét! A függvény görbéjéhez tartozik-e az $A(-100; 5000)$ pont?

295. A függvény az alábbi táblázattal van megadva:

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	5	10	15	20	25	30	35	40

Adjátok meg a függvényt képlettel! Mutassátok meg az értelmezési tartományát és az értékkészletét!

296. A függvény az $f(x) = x^2 + 10$ képlettel van megadva. Számítsátok ki: $f(2)$, $3f(2)$, $2f(3)$, $0{,}5f(10)$!

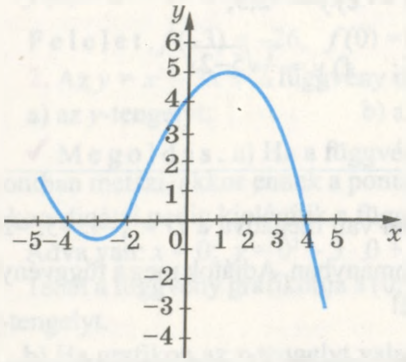
297. A függvény az $f(x) = x^3 - 5$ képlettel van megadva. Határozzátok meg: $f(-3)$, $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(7)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(\sqrt{3})$!

» **298.** A függvény az $f(x) = x^2 - x$ képlettel van megadva. Határozzátok meg: a) $f(-2) + f(-1)$; b) $f(0) + f(1)$; c) $f(2) - f(30)$!

299. $f(x) = x^2 - x + 1$. Határozzátok meg:

a) $f(0) + f(1) + f(2) + f(3)$; b) $f(10) - f(-9) + f(8) - f(-7)$!

300. Az 55. ábrán az $y = f(x)$ függvény látható.



55. ábra

Határozzátok meg:

a) az adott függvény értelmezési tartományát és értékkészletét;

b) $f(-5)$, $f(-4)$, $f(0)$, $f(4)$, $f(5)$;

c) az argumentum mely értékei esetén $f(x) = 4$, $f(x) = 0$;

d) az x mely értékei mellett legnagyobb, legkisebb az $f(x)$!

Határozzátok meg a függvények értelmezési tartományát (**301–302**)!

301. a) $y = 3x - 2$; b) $y = \frac{3}{x-2}$; c) $y = \frac{10}{x^2+1}$;

d) $y = \frac{1}{(x-3)(x-4)}$; e) $y = \sqrt{x^2+1}$; f) $y = \sqrt{x+5}$.

» **302.** a) $y = 5x - 1$; b) $y = \sqrt{x+1}$; c) $y = \sqrt{4-x}$;

d) $y = \frac{2x}{5-x}$; e) $y = \frac{3}{(x-4)(x+1)}$; f) $y = \frac{x-1}{1+x}$.

303. Ábrázoljátok a függvények grafikonját:

a) $y = 3x - 2$; b) $y = 0{,}5x - 1$; c) $y = -3x$;

d) $y = 7 - 2x$; e) $y = 5$; f) $y = 3 - x$!

» **304.** Ábrázoljátok az alábbi képletekkel megadott függvények grafikonját:

a) $f(x) = 2 - 3x$; b) $f(x) = -1$;

c) $f(x) = 3 - 2x$; d) $f(x) = 0{,}5x$!

305. Határozzátok meg a függvények értelmezési tartományát:
a) $f(x) = 7$; b) $f(x) = 2x$; c) $y = x^2$!

306. Az $y = \sqrt{25 - x^2}$ függvény görbéjéhez tartozik-e az A (3; 4) pont? A B (–4; 3) pont?

307. Áthalad-e az $y = x(x - 3)$ függvény görbéje az A (2; –2); B (–1; 4); C (1,5; –2,25) pontokon?

308. Az A (–2; –6); B (1,5; 8); C (–3; 4); D (–2; –6); E (3; 4) pontok melyike tartozik az alábbi függvényekhez:
a) $y = -10x - 26$; b) $y = \frac{12}{x}$; c) $y = \sqrt{x^2 + 7}$?

309. Az alábbi függvények:
a) $y = 2{,}5x$; b) $y = 3 - 2x$; c) $y = 2(x - 1)$ görbéi mely pontokban metszik az x- és y-tengelyt?

310. Jelöljétek a hőfokot a Celsius-, Fahrenheit- és a Kelvin-skálák szerint rendre t_C, t_F, t_K betűkkel! Az átszámítási képletek a következő módon írhatók le: $t_F = \frac{9}{5}(t_C + 32)$, $t_K = t_C + 273$. Határozzátok meg a Celsius-skála szerinti 10 tetszőleges hőmérsékleti érték Fahrenheit- és a Kelvin-skálák szerinti megfelelő hőmérsékleti értékét! A kapott adatokat foglaljátok táblázatba! A kapott hozzárendeléseket ábrázoljátok grafikusan!

B szint

311. A függvény az $f(x) = x^2$ képlettel van megadva. Valamennyi a szám esetén teljesül-e az $f(-a) = f(a)$ egyenlőség?

312. A függvény az $f(x) = x^3$ képlettel van megadva. A független változó x valamennyi értéke esetén igaz-e az $f(-x) = -f(x)$ egyenlőség?

313. Határozzátok meg az $f(-2)$; $f(-1)$; $f(0)$; $f(1)$; $f(2)$ értékeit, ha a függvények a következő képletekkel vannak megadva:
a) $f(x) = 2x^2 + 3$; b) $f(x) = 3x^3 - 2$;
c) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$; d) $f(x) = \sqrt{x^2 + 8x + 15}$!

314. A függvény az $y = \frac{6x}{1 + x}$ képlettel van megadva az első tíz természetes szám halmazán. Adjátok meg a függvényt táblázattal!

315. A függvény az $y = 2$ képlettel van megadva a $D = \{-4; -2{,}75; -1; 1{,}25; 4; 11\}$ értelmezési tartományban. Adjátok meg a függvényt táblázattal és grafikonnal!

316. Határozzátok meg a $9x - 2y = 14$ egyenletnek – görbéje megrajzolása nélkül – azt a pontját, amelynek az ordinátája az abszcisszájával egyenlő!

317. Határozzátok meg az $y = x^2 - 2$ egyenletnek – görbéje megrajzolása nélkül – azt a pontját, amelynek az ordinátája és abszcisszája ellentétes számok!

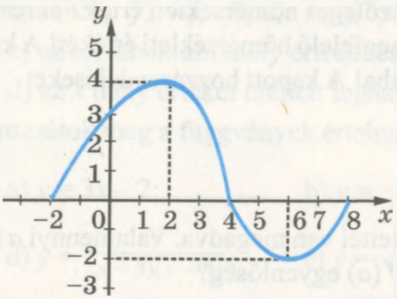
318. Minden természetes számnak vele ellentétes szám felel meg. Van-e ilyen, függvény szerinti megfelelés? Ha van ilyen, akkor adjátok meg képlettel és grafikusan!

319. Minden természetes számnak vele egyenlő szám felel meg. Van-e ilyen, függvény szerinti megfelelés? Ha van ilyen, akkor milyen a görbéje?

320. Az $y = f(x)$ az 56. ábrán látható görbével van megadva. A független változó mely értékei esetén:

a) $f(x) = 0$, $f(x) \le 0$; b) $f(x) = -2$, $f(x) > -2$, $f(x) \le -2$;

c) $f(x) = 3$, $f(x) \ge 3$; $f(x) < 3$?



56. ábra

321. Mely pontokban metszik az x- és az y- tengelyt a következő függvények:

a) $y = \frac{1}{2}x + 3$; b) $y = x - \frac{4}{7}$; c) $y = \frac{2}{5}x + \frac{5}{2}$;

d) $y = x^2 - 4$; e) $y = x^2 - 2x$; f) $y = 6 - 5x - x^2$?

Ábrázoljátok azonos koordináta-rendszerben az alábbi függvények görbéit **(322–324)**!

322. $y = x^2$, $y = x^2 + 3$ és $y = x^2 - 2$.

323. $y == \sqrt{x}$, $y = \sqrt{x} + 2$ şi $y = \sqrt{x} - 3$.

324. $y = |x|$, $y = |x| + 1$ és $y = |x| - 2$.

325. Az m mely értéke mellett halad át az $y = m - 2x$ függvény görbéje az A (2; 3) ponton? Áthalad-e ugyanez a görbe a B (3; 1) ponton?

326. Az m mely értéke mellett halad át az $y = x^2 + m$ függvény görbéje a K (–2; 5) ponton?

327. Az $y = \sqrt{x+m}$ függvény görbéje áthalad a P (5; 5) ponton. Mivel egyenlő m?

328. Rajzoljátok meg az alábbi függvények görbéit:

a) $y = \frac{4}{x}$; b) $y = -\frac{3}{x}$; c) $y = \frac{12}{x}$;

d) $y = 2x^2$; e) $y = 0{,}5x^2$; f) $y = x^2 - 1$!

329*. Határozzátok meg az alábbi függvények értelmezési tartományát:

a) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 5}}$; b) $y = \frac{-\sqrt{x^3 + 5x}}{4}$;

c) $y = \frac{1}{x^3 + 5x^2}$; d) $y = \sqrt{x+5} + \sqrt{5-x}$;

e) $y = \sqrt{x^2 - 6x + 10}$; f) $y = \frac{\sqrt{x^2 - 3x - 4}}{16 - x^2}$!

330*. ***A. M. Kolmogorov feladata.*** Milyen kiegészítő feltétellel kell felruházni az x értékét az $f(x) = 1$ képletben, hogy az $f(x) = \left(\sqrt{x}\right)^2 + \left(\sqrt{1-x}\right)^2$ függvény értékkészletét megkapjuk?

331*. Rajzoljátok meg az alábbi függvények görbéit:

a) $y = \begin{cases} 4, & \text{ha } x < -2, \\ x^2, & \text{ha } -2 \le x \le 1, \\ 2 - x, & \text{ha } x > 1; \end{cases}$

b) $y = \begin{cases} x + 1, & \text{ha } x \le 1, \\ 3 - x, & \text{ha } 1 < x < 4, \\ -1, & \text{ha } x \ge 4; \end{cases}$

c) $y = |2x - 3|$; d) $y = 2|x| - 3$; e) $y = |x + 1| - |x|$;

f) $y = \frac{|x|}{x}$; g) $y = \frac{6}{|x|}$; h) $y = \sqrt{x^2 + 10x + 25}$!

332*. Az áru iránti kereslet függvénye: $QD = 9 - p$. Az árukínálat függvénye: $Q_S = 2p - 6$. Itt QD a kereslet mértéke és Q_S a kínálat mértéke (millió db évente) p ár (pénzegység). Határozzátok meg a kiegyensúlyozott árat (a kereslet egyenlő a kínálattal) és az eladás mértékét! Hogyan hat az áru kiegyensúlyozott árának értékére a kereslet 20%-os csökkenése?

Ismétlő gyakorlatok

333. Hasonlítsátok össze a kifejezések értékét:

a) $3\sqrt{2}$ és $\sqrt{20}$; b) $3\sqrt{5}$ és $\sqrt{44}$; c) $\sqrt{13}$ és $2\sqrt{3}$;

d) $3\sqrt{7}$ és 8; e) $4\sqrt{5}$ és 9; f) $5\sqrt{2}$ és7!

334. Milyen határok között mozog a $3x - 2$ kifejezés értéke, ha:

a) $1 < x < 4$; b) $-5 < x < 0$; c) $-10 \le x \le 10$?

335. Oldjátok meg az egyenlőtlenségeket:

a) $\frac{2x+3}{3x+1} > 0$; b) $\frac{x-6}{1-x} > -1$; c) $\frac{9-2x}{x} \ge 1$!

9.§. A FÜGGVÉNYEK TULAJDONSÁGAI

Ahhoz, hogy vizsgálni lehessen a környező világban előforduló jelenségeket és folyamatokat, először meg kell tanulni a megfelelő matematikai modellek jellegzetes tulajdonságainak elemzését. Ez mindenekelőtt a függvényekre vonatkozik.

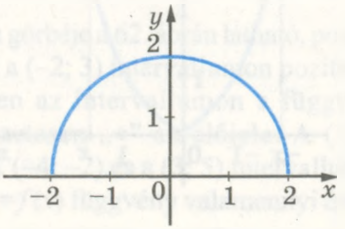
A függvények tulajdonságainak leírását rendszerint az értelmezési tartományával kezdik, megjelölve az összes értéket, amelyet a független változó felvehet.

Ha a függvény képlettel van megadva, s az értelmezési tartománya nincs megjelölve, akkor azt olyannak tekintik, mint a képletbe tartozó változó megengedett értékeinek tartományát.

Ha a függvény grafikusan van megadva, akkor az értelmezési tartománya görbéjének az x-tengelyre eső vetülete, értékkészlete pedig görbéjének az y-tengelyre eső vetülete (57. ábra). Például az $y = x^2$ függvény értelmezési tartománya az összes valós szám $\boldsymbol{R}$ halmaza, értékkészlete a $[0; \infty)$ intervallum. Az $y = \sqrt{4 - x^2}$ függvény értelmezési tartománya és értékkészlete a $[-2; 2]$ és $[0; 2]$ intervallum (58. ábra).



57. ábra



58. ábra

A függvény vizsgálatában a következő lépés annak meghatározása, hogy páros vagy páratlan-e az adott függvény.

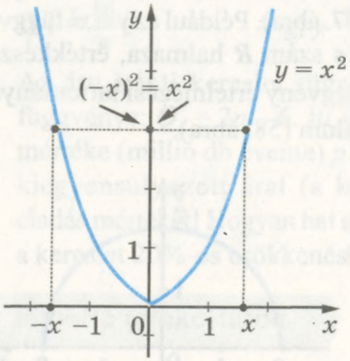
Az $y = f(x)$ függvényt *párosnak* nevezzük, ha értelmezési tartománya szimmetrikus a nullához viszonyítva és az x értelmezési tartományából vett minden értékére nézve igaz, hogy $f(-x) = f(x)$.

Az $y = f(x)$ függvényt *páratlannak* nevezzük, ha értelmezési tartománya szimmetrikus a nullához viszonyítva és az x értelmezési tartományából vett minden értékére nézve igaz, hogy $f(-x) = -f(x)$.

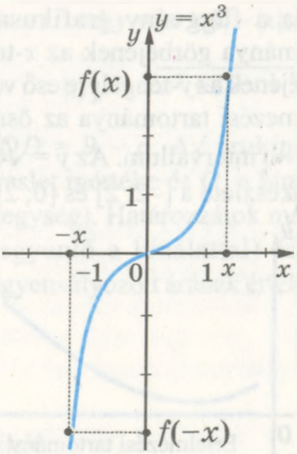
Léteznek nem páros és nem páratlan függvények. Ezek olyan függvények, amelyeknek vagy az értelmezési tartománya nem szimmetrikus a nullához viszonyítva, vagy amelyekre nézve nem teljesül az $f(-x) = \pm f(x)$ egyetlen feltétele sem.

Ha a függvény grafikusan van megadva, akkor elég egyszerű annak kiderítése, hogy páros-e vagy páratlan, mivel **a páros függvény görbéje szimmetrikus az y-tengelyhez viszonyítva, a páratlané pedig a koordináta-rendszer kezdőpontjához képest**.

Példa. Az $y = x^2$ függvény, amelynek $\boldsymbol{R}$ az értelmezési tartománya és az $y = x^2$, amelynek $[-5; 5]$ az értelmezési tartománya – páros függvények (59. ábra). Az $y = x^3$ függvény, amelynek $\boldsymbol{R}$ az értelmezési tartománya és az $y = x^3$, amelynek $[-27; 27]$ az értelmezési tartománya – nem páros

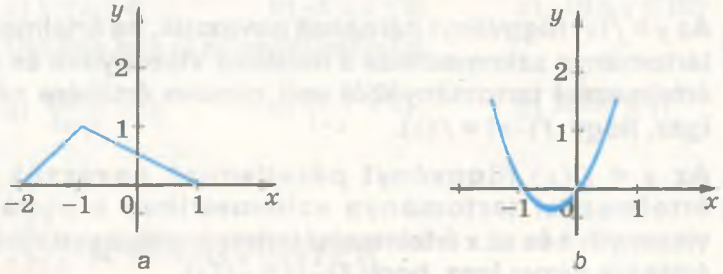


59. ábra



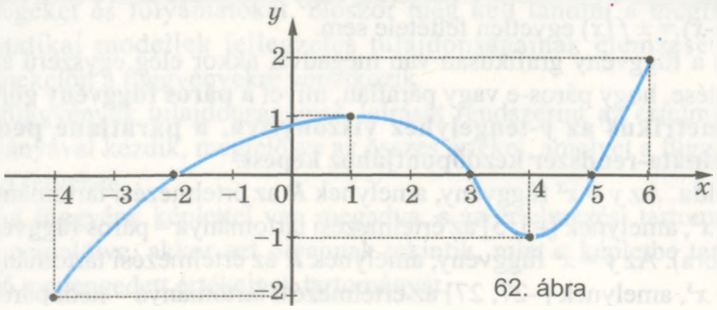
60. ábra

függvények (60. ábra). De például a [–2; 1] értelmezési tartományú függvény és a bármilyen értelmezési tartománnyal rendelkező mindegyik $y = x^2 + x$ függvény – se nem páros, se nem páratlan (61. *a*, *b* ábra).



61. ábra

Vizsgáljuk meg az $y = f(x)$ függvényt, amelynek a görbéje a 62. ábrán látható. Ha $x = -2$, $x = 3$ és $x = 5$, akkor a függvény értéke nullával egyenlő.



62. ábra

A független változó (argumentum) értékeit, amelyek mellett a függvény értéke nullával egyenlő, a *függvény zérushelyeinek* nevezzük.

Az $y = x - 6$ függvény értéke csak az x egy értéke, $x = 6$ esetén nulla.

Az $y = f(x)$ függvény zérushelyeinek meghatározásához meg kell oldani az $f(x) = 0$ egyenletet. Ennek az egyenletnek a gyökei a függvény zérushelyei.

Az $y = f(x)$ függvénynek, amelynek a görbéje a 62. ábrán látható, pozitív, zéró és negatív értékei vannak. Értékei a $(-2; 3)$ intervallumon pozitívak. Ez az intervallum stabil előjelű: ezen az intervallumon a függvény valamennyi értékének állandó, nevezetesen „+" az előjele. A $(5; 6)$ intervallum is stabil, „plusz" előjelű. A $(-4; -2)$ és a $(3; 5)$ intervallumok ugyancsak stabil előjelűek: a vizsgált $y = f(x)$ függvény valamennyi értéke ezeken az intervallumokon negatív.

A függvény értéktartományának azokat az intervallumait, amelyeken a függvény nem változtatja előjelét (azaz csak pozitív vagy csak negatív az értéke), *monoton előjelű intervallumoknak* nevezzük. A monoton (stabil) előjelű intervallumon a függvénygörbe nem metszi az abszcisszatengelyt.

Figyeljétek meg a 62. ábrán látható függvényt. A $[-4; 1]$ intervallumon a görbe felfelé ível: az x ezen intervallumhoz tartozó értékeinek növekedésével nőnek a függvény megfelelő értékei.

Ha $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) < f(x_2)$.

Ilyenkor azt mondják, hogy a $[-4; 1]$ intervallumon az $y = f(x)$ függvény *növekszik* (vagy *növekvő*). A függvény a $[4; 6]$ intervallumon is növekvő.

A $[1; 4]$ intervallumon az $y = f(x)$ függvény görbéje lefelé ível: a független változó értékeinek növekedésével csökkennek a függvény megfelelő értékei. Ilyenkor azt mondják, hogy ezen az intervallumon az $y = f(x)$ *csökkenő*.

A függvényt valamely intervallumon *növekvőnek* nevezzük, ha az ezen intervallumhoz tartozó független változó minden nagyobb értékének nagyobb függvényérték felel meg.

A függvényt valamely intervallumon *csökkenőnek* nevezzük, ha az ezen intervallumhoz tartozó nagyobb argumentumértéknek kisebb függvényérték felel meg.

Léteznek olyan függvények, amelyek növekvők (vagy csökkenők) értelmezési tartományuk egészében. Például az $y = 2x$, $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$ függvények növekvők, az $y = -2x$, $y = -\sqrt{x}$ függvények pedig csökkenők.

A *függvény vizsgálata* legfontosabb tulajdonságainak a kiderítését jelenti:

1) értelmezési tartományának a meghatározását;
2) értékkészletének a meghatározását;
3) az adott függvény párosságának vagy páratlanságának a kiderítését;
4) a függvénygörbe y-tengellyel való metszéspontjának a meghatározását;
5) a függvény zérushelyeinek és monoton előjelű intervallumának a meghatározását;
6) a növekedés és csökkenés intervallumának a meghatározását;
7) a függvénygörbe megrajzolását.

A függvény tulajdonságainak jellemzése során gyakran utalnak arra is, hogy mely pontokban a legnagyobb és mely pontokban a legkisebb az értéke. A függvény, amelynek a görbéje a 62. ábrán látható, az $x = 6$ pontban veszi fel a legnagyobb értékét; ez 2-vel egyenlő. Legkisebb értékét, a –2-t a függvény az $x = -4$ pontban éri el.

A függvény értéke az $x = 1$ pontban a legnagyobb a hozzá legközelebb eső összes ponttal összehasonlítva. Ilyenkor azt mondják, hogy az adott függvénynek az $x = 1$ pontban *maximuma*, míg az $x = 4$ pontban *minimuma* van.

Az $\boldsymbol{R}$ értelmezési tartomány egészén megadott $y = 0{,}5x - 2$, $y = x^2$, $y = x^3$ függvények folytonos vonalak. Az $y = \frac{1}{x}$ függvény görbéje két külön ágból áll. Ha $x = 0$, a függvénynek nem létezik értéke. Ilyenkor azt mondják, hogy az $x = 0$ pontban *szakadása* van.

Ellenőrizzétek magatokat!

1. Mi a függvény értelmezési tartománya és értékkészlete? Ezek hogyan határozhatók meg görbe segítségével?
2. Milyen függvényt neveznek párosnak? Páratlannak?
3. Milyen a páros függvény görbéje? A páratlané?
4. Mit neveznek a függvény zérushelyének?
5. Milyen függvényeket nevezünk növekvőnek? Milyeneket csökkenőnek?
6. Előfordul-e, hogy a függvény egyik intervallumon csökken, a másikon pedig növekszik?

Oldjuk meg együtt!

1. Határozzátok meg az $y = x^2 - x - 6$ függvény zérushelyeit!

✓ M e g o l d á s . Oldjuk meg az $x^2 - x - 6 = 0$ egyenletet!

$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25;$

$x_1 = \frac{1-\sqrt{25}}{2} = -2, \quad x_2 = \frac{1+\sqrt{25}}{2} = 3.$

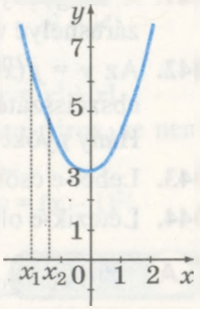
F e l e l e t . Az adott függvény zérushelyei: –2 és 3.

2. Bizonyítsátok be, hogy az $y = x^2 + 3$ függvény a $(-\infty; 0)$ intervallumon csökkenő!

✓ M e g o l d á s . Legyen x_1 és x_2 az adott függvény x változójának $(-\infty; 0)$ intervallumhoz tartozó két, tetszőleges értéke, miközben $x_1 < x_2$. A függvény megfelelő értékei: $y_1 = x_1^2 + 3$, $y_2 = x_2^2 + 3$.

$y_2 - y_1 = (x_2^2 + 3) - (x_1^2 + 3) = x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1).$

Az x_1 és x_2 $(-\infty; 0)$ intervallumból vett értékei negatívak. Mivel $x_1 < x_2$, így $x_2 - x_1$ pozitív szám, $x_2 + x_1$ pedig negatív szám, a szorzatuk szintén negatív. Ezért az $y_2 - y_1$ negatív, $y_2 < y_1$. Vagyis a független változó nagyobb értékének a függvény kisebb értéke felel meg; az adott függvény ezen az intervallumon csökkenő (63. ábra).



63. ábra

3. Páros vagy páratlan-e a függvény:

a) $y = x^2 - 7$; b) $y = 5x - 1$?

✓ M e g o l d á s . a) az $y = x^2 - 7$ $D(y)$ értelmezési tartománya valamennyi valós szám $\boldsymbol{R}$ halmaza, amely szimmetrikus a 0-hoz és az $f(-x) = (-x)^2 - 7 = x^2 - 7 = f(x)$ viszonyítva. Vagyis az $y = x^2 - 7$ függvény páros.

b) $D(y) = \boldsymbol{R}$ szimmetrikus a 0-hoz viszonyítva.

$f(-x) = 5(-x) - 1 = -5x - 1 = -(5x + 1)$. Az adott függvény nem egyenlő sem az $f(x)$-szel, sem a $-f(x)$-szel.

Vagyis az $y = 5x - 1$ se nem páros, se nem páratlan.

F e l e l e t : a) páros; b) se nem páros, se nem páratlan.

Oldjátok meg szóban!

336. Határozzátok meg a függvények értelmezési tartományát és értékkészletét:

a) $y = 2x^2$; b) $y = x - 2$; c) $y = x^3$; d) $y = \sqrt{x}$;

e) $y = \frac{2}{x}$; f) $y = \frac{2x}{3} + 5$; g) $y = \frac{2x}{x}$; h) $y = \frac{2}{x^2}$!

337. Az $y = x^2$ és $y = |x|$ függvények értelmezési tartományai egyformák. Mondjatok példákat más függvényekre, amelyeknek ilyenek az értelmezési tartományai!

338. Egyformák-e a függvények értelmezési tartományai:

a) $y = |x + 3|$ és $y = |x| + 3$; b) $y = x^2 + 3$ és $y = (x + 3)^2$?

339. A 336. feladatban vizsgált függvények közül melyek párosak, melyek páratlanok? Mondjatok példákat páros és páratlan függvényekre!

340. Vannak-e zérushelyei a függvényeknek:

a) $y = x^2 + 1$; b) $y = x^4 - 4$; c) $y = -x^4 - 9$; d) $y = |x|$?

341. A függvény görbéje n-szer metszi az abszcisszatengelyt. Hány zárushelye van ennek a függvénynek?

342. Az $y = f(x)$ függvény az egyetlen $A(12; 0)$ pontban metszi az abszcisszatengelyt. Hány zérushelye van ennek a függvénynek? Hány gyöke van az $f(x) = 0$ egyenletnek?

343. Lehet-e csökkenő a $(-2; 2)$ intervallumon a páros függvény?

344. Létezik-e olyan függvény, amely egyszerre páros és páratlan?

A szint

345. Határozzátok meg a függvények értelmezési tartományait:

a) $y = -7x + 3$; b) $y = x^2 - 4$; c) $y = \sqrt{x+4}$;

d) $y = \frac{3}{x+9}$; e) $y = \frac{-1}{x^2+4}$; f) $y = \frac{x}{1-x}$!

346. Határozzátok meg a függvények értékkészleteit:

a) $y = 0{,}01x$; b) $y = x^2$; c) $y = \sqrt{1-x^2}$;

d) $y = x^3$; e) $y = 2x^{-1}$; f) $y = \sqrt{1+x^2}$!

347. Határozzátok meg a függvények értelmezési tartományait és értékkészleteit:

a) $y = x^2 - 1$; b) $y = \frac{2-x}{3}$; c) $y = \frac{1}{x} + 2$;

d) $y = 1 - \sqrt{x}$; e) $y = |x|$; f) $y = |x| + 2$!

348. Ábrázoljátok bármely $y = f(x)$ függvény görbéjét, amely esetében:

a) $D = [-6; 2]$, $E = [-2; 2]$;

b) $D = [-1; 3) \cup (3; 5)$, $E = [-3; 1) \cup (1; 3]$!

349. Az $y = 1{,}5x - 2$ függvény a $[-2; 5]$ intervallumon van megadva. Határozzátok meg az értelmezési tartományát és értékkészletét!

350. Ábrázoljátok a $[1; 4]$ intervallumon megadott $y = 0{,}5x^2$ függvény görbéjét, és vetítsétek a koordinátatengelyre! Milyen az adott függvény értelmezési tartománya?

351. Igazoljátok, hogy az $f(x) = x^4 + 3$ függvény páros, az $f(x) = x^3 + x$ függvény pedig páratlan!

352. Ugyanaz-e a tartalma annak a mondatnak, hogy „az $y = f(x)$ függvény nem páros" és „az $y = f(x)$ függvény páratlan"?

353. Mutassátok meg, hogy az $f(x) = x^2 + x$ függvény se nem páros, se nem páratlan!

354. Bizonyítsátok be, hogy az adott függvény páros:

a) $y = x^4 + 3$; b) $y = 1 : x^2$; c) $y = x^2 + x^4$!

355. Bizonyítsátok be, hogy az adott függvény páratlan:

a) $y = 2x^3$; b) $y = -x^5$; c) $y = x^3 + x$!

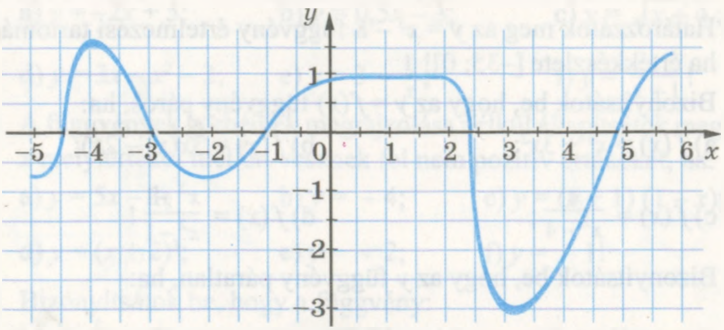
356. Bizonyítsátok be, hogy az adott függvény se nem páros, se nem páratlan:

a) $y = x^3 + 1$; b) $y = x\sqrt{x}$; c) $y = (x - 1)^2$!

357. Határozzátok meg a függvények zérushelyeit:

a) $y = 2x + 3$; b) $y = x^2 + 5x + 6$; c) $y = \sqrt{x} - 2$!

358. A 64. ábrán az $y = f(x)$ függvény görbéje látható.



64. ábra

Határozzátok meg: a) a függvény értelmezési tartományát és értékkészletét; b) a függvény zérushelyeit; c) a stabil előjelű (monoton) intervallumait; d) a függvény maximumait és minimumait; e) azokat az intervallumokat, amelyeken a függvény növekszik; f) azokat az intervallumokat, amelyeken a függvény csökken!

359. Hány zérushelye van a függvényeknek:

a) $y = x + x^3$; b) $y = 6$; c) $y = 1 - |x|$; d) $y = -7x$?

360. Állapítsátok meg a függvény stabil előjelű intervallumait:

a) $y = x + 3$; b) $y = x^2 - 4$; c) $y = 3\sqrt{x}$!

361. Mely függvények növekedők, melyek csökkenők:

a) $y = 2x$; b) $y = -x - 2$; c) $y = x^3$; d) $y = \sqrt{x}$;

e) $y = \frac{2x}{5}$; f) $y = \frac{5x}{2}$; g) $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}$; h) $y = \frac{-x}{5x}$?

362. Ábrázoljátok a függvények görbéit és írjátok le a tulajdonságaikat:

a) $y = 0{,}5x - 1$; b) $y = 2x^2$; c) $y = \sqrt{x+1}$; d) $y = x^{-1}$!

B szint

363. Határozzátok meg az alábbi intervallumokon megadott $y = 4 - x^2$ függvény értelmezési tartományát:

a) $[-3; 3]$; b) $[1; 7)$; c) $[0; \infty)$!

364. Határozzátok meg a függvények értelmezési tartományát és értékkészletét:

a) $y = 4 + x^2$; b) $y = 3 + \sqrt{x+2}$; c) $y = 1 : (1 + x^2)$!

365. Határozzátok meg az $y = x^3 - 8$ függvény értelmezési tartományát, ha értékkészlete $[-35; 0]$!

366. Bizonyítsátok be, hogy az $y = f(x)$ függvény páros, ha:

a) $f(x) = x^4 + 3x^2$; b) $f(x) = 3x(x^3 - 2x)$;

c) $f(x) = \frac{4}{x^2 - 4}$; d) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$!

367. Bizonyítsátok be, hogy az y függvény páratlan, ha:

a) $y = x(1 - x^2)$; b) $y = 7x^3 + x$; c) $y = \frac{3}{x} + \frac{x}{3}$!

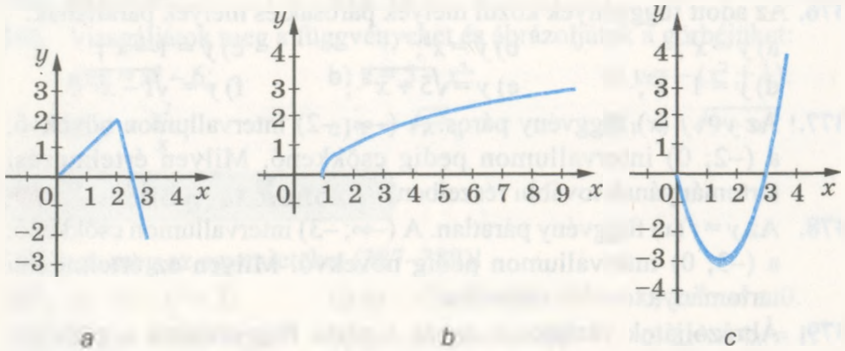
368. A függvények közül melyek párosak, melyek páratlanak, és melyek se nem párosak, se nem páratlanok:

a) $y = x^3 - 1$; b) $y = -x^2 + 3$; c) $y = x(1 - x)$;

d) $y = \frac{5}{x^2}$; e) $y = \sqrt{x}$; f) $y = \frac{3x^2 + 1}{x}$?

369. Másoljátok át a füzetetekbe a 65. ábrán látható görbéket! Mindegyiket úgy szerkesszétek, hogy a kapott függvény legyen: 1) páros; 2) páratlan; 3) nem páros és nem páratlan!

Az elvégzett 1–3 feladatok mindegyike esetében határozzátok meg a függvény zérushelyeit, a stabil előjelű, növekvő és csökkenő intervallumait! Milyen következtetéseket tudtok levonni a feladatból?



65. ábra

370. A függvények görbéinek megrajzolása nélkül állapítsátok meg, hogy x mely értékei mellett vesznek fel pozitív értékeket, ha:

a) $y = -2x + 5$; b) $y = 0{,}5x - 3$; c) $y = \sqrt{x+4}$;

d) $y = 3x - x^2 - 2$; e) $y = 3 - \frac{1}{x}$; f) $y = \frac{x}{x+1}$!

371. A függvények görbéinek megrajzolása nélkül állapítsátok meg, hogy x mely értékei mellett vesznek fel nem pozitív értékeket, ha:

a) $y = 5x - 1$; b) $y = -4$; c) $y = (x+1)(1-x)$;

d) $y = (x+2)^3$; e) $y = +2$; f) $y = -1$!

372. Bizonyítsátok be, hogy a függvény:

a) $y = 3x + 5$ növekszik az $\boldsymbol{R}$ halmazon;

b) $y = 1 - \sqrt{x}$ csökken a $[0; \infty)$ intervallumon;

c) $y = -x^3$ csökken az $\boldsymbol{R}$ halmazon;

d) $y = 2x^2$ növekszik a $[0; \infty)$ halmazon!

373. Növekvő vagy csökkenő-e a függvény:

a) $y = x - 5$; b) $y = 2x^3$; c) $y = \sqrt{3+x}$;

d) $y = 13 - \sqrt{x}$; e) $y = 8 - x^3$; f) $y = x^3 + x$?

374. Mutassátok meg azokat az intervallumokat, amelyeken a függvények csökkenők:

a) $y = x^4 + 3$; b) $y = |x - 3|$; c) $y = |x| - x$!

375. Mely intervallumokon növekvők az adott függvények:

a) $y = x \cdot |x|$; b) $y = \sqrt{4 + x^2}$; c) $y = \sqrt{4 - x^2}$?

376. Az adott függvények közül melyek párosak és melyek páratlanak:

a) $y = x^4$; b) $y = x^5$; c) $y = 1 - x^4$;

d) $y = 1 : x^3$; e) $y = \sqrt{5 + x^2}$; f) $y = \sqrt{1 - x^2}$?

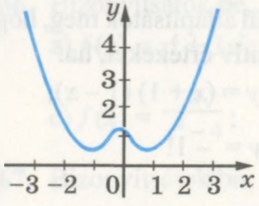
377. Az $y = f(x)$ függvény páros. A $(-\infty; -2)$ intervallumon növekvő, a $(-2; 0)$ intervallumon pedig csökkenő. Milyen értelmezési tartományának további részeiben?

378. Az $y = f(x)$ függvény páratlan. A $(-\infty; -3)$ intervallumon csökkenő, a $(-3; 0)$ intervallumon pedig növekvő. Milyen az értelmezési tartománya további részeiben?

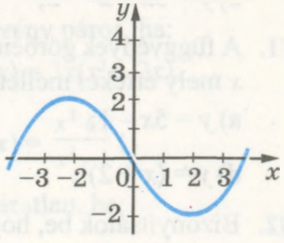
379. Ábrázoljátok vázlatosan annak a páros függvénynek a görbéjét, amely a $[-4; -2]$ intervallumon 1-től 5-ig növekvő, a $[-2; 0]$ intervallumon pedig 5-től –1-ig csökkenő!

380. Ábrázoljátok vázlatosan annak a páratlan függvénynek a görbéjét, amely a $[-4; -1]$ intervallumon 3-tól –3-ig csökkenő, a $[-1; 0]$ intervallumon pedig –3-tól 0-ig növekvő!

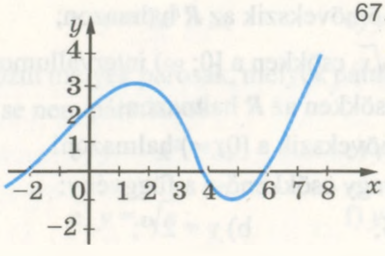
381. Jellemezzétek azoknak a függvényeknek a tulajdonságait, amelyeknek a görbéi a 66–68. ábrákon láthatók!



66. ábra



67. ábra



68. ábra

Ábrázoljátok a függvényeket és jellemezzétek a tulajdonságaikat (**382–385**)!

382. a) $y = |x|$; b) $y = |x - 3|$; c) $y = |x| - 3$.

383. a) $y = \sqrt{x^2}$; b) $y = \sqrt{(x-2)^2}$; c) $y = \sqrt{(4-x)^2}$.

384. a) $y = \frac{x-2}{x^2-2x}$; b) $y = \frac{x^2-4}{x^3-4x}$.

385. a) $y = 6x^{-1}$; b) $y = x^{-2}$.

386. Vizsgáljátok meg a függvényeket és ábrázoljátok a görbéjüket:

a) $y = x^2 - 6$; b) $y = 5 - x^2$; c) $y = -(x^2 + 1)$;

d) $y = \frac{x^2}{x}$; e) $y = \sqrt{x^2}$; f) $y = -\sqrt{9 - x^2}$!

Ismétlő gyakorlatok

Oldjátok meg az egyenleteket (**387–389**)!

387. a) $-3x \cdot x^2 = 3$; b) $4x \cdot x^3 + 2 = 0$; c) $2x^2 \cdot x^5 = 0$.

388. a) $2x^2 + 3x = 9$; b) $9x^2 - 12x + 4 = 0$; c) $5x^2 + 4x = 1$.

389. a) $(x + 3)\sqrt{x+5} = 0$; b) $(x + 5)\sqrt{x+3} = 0$.

390. Írjátok le normálalakban a számokat:

a) 7 800; b) 140 000; c) 84,17; d) 486 000 000;
e) 0,085; f) 0,00045; g) 0,58954; h) 0,0000008!

10.§. FÜGGVÉNY-TRANSZFORMÁCIÓK

Készítsük el: a) az $y = x^2$ és b) az $y = -x^2$ függvények értéktáblázatát a $D = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ halmazon.

a)

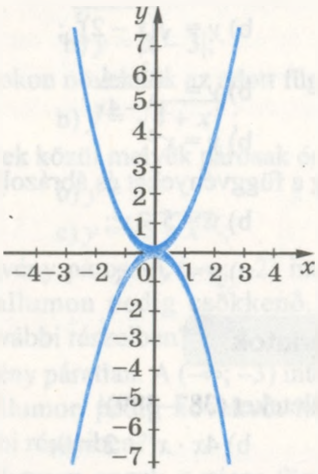
x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

b)

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	−9	−4	−1	0	−1	−4	−9

Általában az $y = -x^2$ függvény értékei az $y = x^2$ függvény megfelelő értékeinek az ellentétei. Ezért ezeknek a függvényeknek a görbéi

szimmetrikusak az x-tengelyhez viszonyítva (69. ábra). Ugyanezzel a tulajdonsággal rendelkezik bármelyik $y = f(x)$ és $y = -f(x)$ függvény.



69. ábra

Az $y = f(x)$ és az $y = -f(x)$ függvények grafikonjai szimmetrikusak az x-tengelyhez viszonyítva.

Hasonlítsuk össze az $y = 2f(x)$ és $y = f(x)$ függvények grafikonjait! Ahhoz, hogy megkapjuk az első függvény bármelyik értékét, a második függvény megfelelő értékét meg kell szoroznunk kettővel. Ezért az első függvény görbéjét úgy kaphatjuk meg, hogy a második függvény grafikonját az x-tengelytől kétszeresére nyújtjuk. Ahhoz viszont, hogy megszerkesszük az $y = \frac{1}{3} f(x)$ függvény grafikonját, az $y = f(x)$ függvény görbéjét harmadára kell összenyomni az x-tengely irányába.

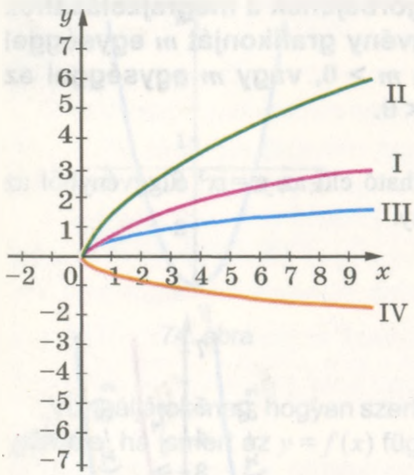
Az $y = kf(x)$ függvény görbéjének megrajzolásához, ahol $k > 0$, az $y = f(x)$ függvény görbéjét k-szorosan meg kell nyújtani az x-tengely irányában, ha $k > 1$ vagy összenyomni $\frac{1}{k}$-szor az x-tengely felé, ha $0 < k < 1$.

Példa. Ábrázoljátok az $y = 2\sqrt{x}$, $y = 0{,}5\sqrt{x}$, $y = -0{,}5\sqrt{x}$ függvények grafikonját!

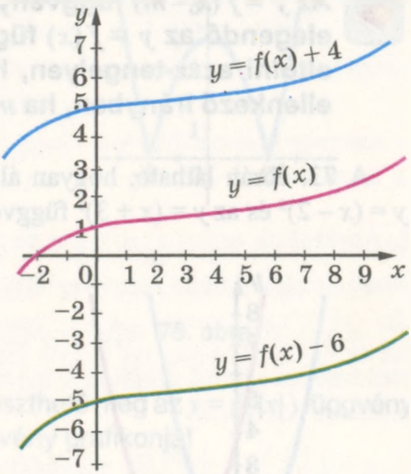
✓ Megoldás. Először ábrázoljátok az $y = \sqrt{x}$ függvény grafikonját!

A 70. ábrán ennek római I a jelölése. Kétszeresére növelve a görbe minden pontjának ordinátáját, a II. grafikont kapjuk. Ez lesz az $y = 2\sqrt{x}$ függvény görbéje. Ha az I. függvény minden pontjának ordinátáját felére csökkentjük és a megfelelő pontokat a koordinátasíkra visszük, akkor megkapjuk a III. görbét – az $y = 0{,}5\sqrt{x}$ függvény grafikonját. A IV. görbe, amely az x-tengelyhez viszonyítva szimmetrikus a III. görbével, az $y = -0{,}5\sqrt{x}$ függvény grafikonja.

Az $y = f(x) + 4$ függvény minden értéke 4-gyel több az $y = f(x)$ függvény megfelelő értékénél. Ezért az $y = f(x) + 4$ függvény görbéjét megkaphatjuk, ha az $y = f(x)$ grafikonját az y-tengellyel párhuzamosan eltoljuk felfelé 4 egységgel (71. ábra). Az $y = f(x) - 6$ függvény grafikonját úgy kaphatjuk meg, ha az $y = f(x)$ grafikonját 6 egységgel az ellenkező irányba toljuk.



70. ábra



71. ábra

Az $y = f(x) + n$ függvény görbéjének megrajzolásához az $y = f(x)$ függvény grafikonját n egységgel el kell tolni az y-tengellyel párhuzamosan felfelé, ha $n > 0$, vagy n egységgel lefelé, ha $n < 0$.

Hogyan kell transzformálni az $y = f(x)$ függvény görbéjét ahhoz, hogy megkapjuk az $y = f(x - m)$ függvény grafikonját? Számítsuk ki x ugyanazon értékeire a) az $y = x^2$ és b) az $y = (x - 2)^2$ függvények értékeit!

a)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	16	9	4	1	0	1	4	9	16

b)

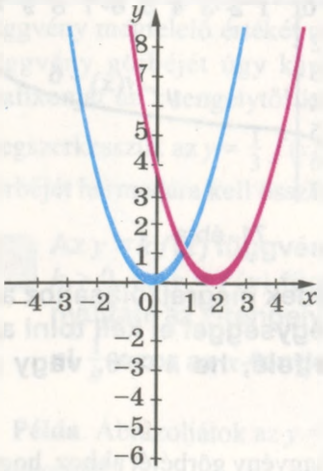
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	36	25	16	9	4	1	0	1	4

Amint látjuk, az $x = c$ bármely értéke esetén az $y = (x - 2)^2$ függvény értéke megegyezik az $y = x^2$ függvény értékével, ha $x = c - 2$.

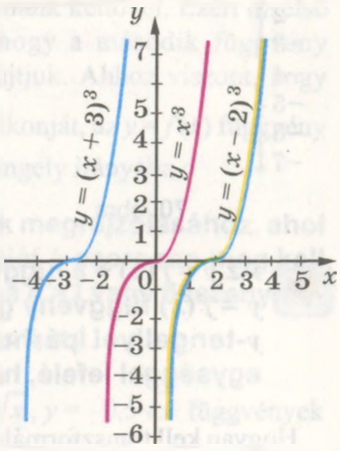
Ezért az $y = (x - 2)^2$ függvény görbéjét megkaphatjuk, ha az $y = x^2$ függvény grafikonját 2 egységgel eltoljuk az x-tengely irányában (72. ábra). Az $y = (x + 3)^2$ függvény grafikonját megkaphatjuk, ha az $y = x^2$ függvény grafikonját 3 egységgel eltoljuk az x-tengellyel ellentétes irányban.

Az $y = f(x - m)$ függvény görbéjének a megrajzolásához elegendő az $y = f(x)$ függvény grafikonját m egységgel eltolni az x-tengelyen, ha $m > 0$, vagy m egységgel az ellenkező irányban, ha $m < 0$.

A 73. ábrán látható, hogyan állítható elő az $y = x^3$ függvényből az $y = (x - 2)^3$ és az $y = (x + 3)^3$ függvény.



72. ábra



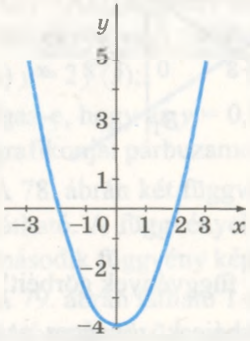
73. ábra

Hogyan szerkeszthető meg az $y = f(x)$ függvény adott görbéje alapján az $y = |f(x)|$ függvény grafikonja?

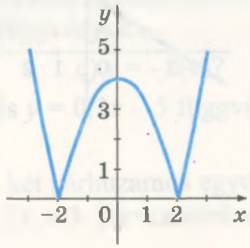
Az abszolút érték meghatározása alapján

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{ha } f(x) \geq 0, \\ -f(x), & \text{ha } f(x) < 0. \end{cases}$$

Ezért az $y = |f(x)|$ és $y = f(x)$ függvényértékek egyenlők, ha $f(x)$ i 0 és ellentétesek, ha $f(x) < 0$. Vagyis az $y = |f(x)|$ függvény megrajzolásához elegendő az $y = f(x)$ függvény görbéjének x-tengely alatti részeit tükrözni az x-tengelyre, a többit változatlanul kell hagyni. Például az $y = x^2 - 4$ adott görbéje (74. ábra) alapján megszerkeszthető az $y = |x^2 - 4|$ függvény grafikonja (75. ábra).



74. ábra



75. ábra

Vizsgáljátok meg, hogyan szerkeszthető meg az $y = f(|x|)$ függvény görbéje, ha ismert az $y = f(x)$ függvény grafikonja!

Ellenőrizzétek magatokat!

1. Mi a függvény görbéje?
2. Az $y = f(x)$ függvény adott görbéje alapján hogyan rajzolható meg a következő függvények grafikonja:

a) $y = -f(x)$; b) $y = f(x) + n$;

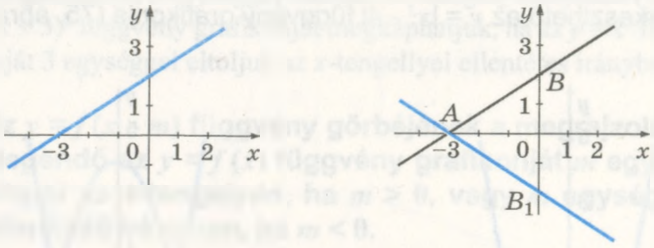
c) $y = k \cdot f(x)$; d) $y = f(x - m)$;

e) $y = |f(x)|$; f) $y = f(|x|)$?

Oldjuk meg együtt!

1. A 76. *a* ábrán az $y = f(x)$ lineáris függvény görbéje látható. Ábrázoljuk az $y = -f(x)$ függvény grafikonját!

✓ Megoldás. Az $y = f(x)$ és az $y = -f(x)$ függvények görbéi az abszcisszatengelyhez viszonyítva egymás tükörképei (az abszcisszatengelyhez viszonyítva szimmetrikusan helyezkednek el). Az $A(-3; 0)$ pont mindkét görbe esetében közös, és a $B(0; 2)$ pont az x-tengelyhez viszonyítva szimmetrikus a $B_1(0; -2)$ ponttal. Az AB_1 egyenes az $y = -f(x)$ függvény grafikonja.

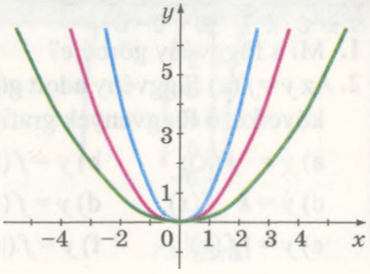


76. ábra

2. Ábrázoljuk az $y = x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$ és $y = \left(\frac{1}{2}x\right)^2$ függvények görbéit!

✓ Megoldás. Az $y = x^2$ függvény görbéje közönséges parabola (77. ábra). Az $y = \frac{1}{2}x^2$ függvény görbéjének megrajzolásához felére kell csökkenteni az első grafikon minden pontjának ordinátáját; az ábrán ez a parabola kék színű.

$y = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 = \frac{1}{4}x^2$. Ha negyedére csökkentjük a közönséges parabola valamennyi pontjának ordinátáját, akkor megkapjuk a szükséges görbét, amely az ábrán piros színű vonal.



77. ábra

Oldjátok meg szóban!

391. Mi a különbség az alábbi függvények görbéi között:

a) $y = x^2$, $y = (-x)^2$ és $y = -x^2$;

b) $y = 4x^2$, $y = -(2x)^2$ és $y = (-2x)^2$;

c) $y = \sqrt{x^2}$, $y = \sqrt{(-x)^2}$ és $y = |x|$?

392. Milyen az alábbi függvények görbéinek egymáshoz viszonyított helyzete:

a) $y = 2x$ és $y = -2x$; b) $y = x^3$ és $y = -x^3$;

c) $y = \frac{1}{3}x$ és $y = -\frac{1}{3}x$; d) $y = \frac{1}{x}$ és $y = -\frac{1}{x}$?

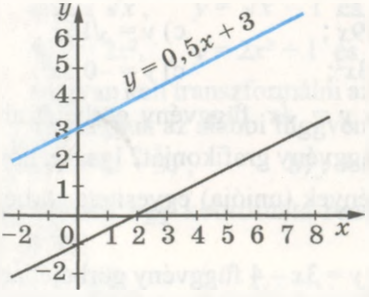
393. Az $y = f(x)$ függvény értelmezési tartományának egészében növekvő. Növekvők vagy csökkenők-e az alábbi függvények:

a) $y = 2f(x)$; b) $y = 0{,}5f(x)$; c) $y = -f(x)$?

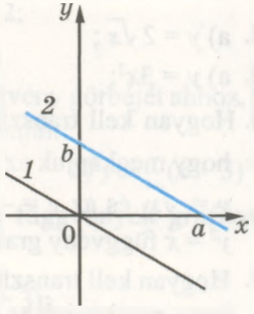
394. Igaz-e, hogy az $y = 0{,}3x$, $y = 0{,}3x + 2$ és $y = 0{,}3x - 5$ függvények grafikonjai párhuzamos egyenesek?

395. A 78. ábrán két függvény grafikonjai – két párhuzamos egyenes – látható. A függvények egyike az $y = 0{,}5x + 3$. Nevezzétek meg a második függvény képletét!

396. A 79. ábrán látható 1 egyenes az $y = f(x)$ függvény görbéje, a vele párhuzamos 2 egyenes az a és b pontban metszi a koordinátatengelyeket. A tanulók egyike úgy véli, a 2 egyenes az $y = f(x - a)$ függvény grafikonja, míg a másik tanuló azt gondolja, hogy az az $y = f(b + x)$ függvény görbéje. Kinek van igaza?



78. ábra



79. ábra

397. Mi a különbség a függvények görbéi között:

a) $y = x^2 + 2$ és $y = x^2 - 2$; b) $y = x^2 - 2$ és $y = (x - 2)^2$;

c) $y = x^3 + 1$ és $y = (x + 1)^3$; d) $y = (x - 2)^3$ és $y = (x + 2)^3$?

398. Az $y = f(x)$ függvény értelmezési tartománya a $(a; b)$ intervallum. Milyen az alábbi függvények értelmezési tartománya:

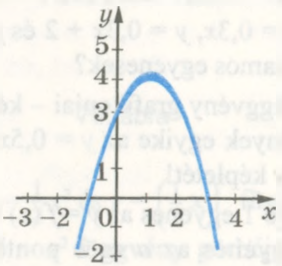
a) $y = -f(x)$; b) $y = f(x) + n$; c) $y = |f(x)|$; d) $y = k \cdot f(x)$?

399. Az $y = f(x)$ függvény értékkészlete a $(c; \infty)$ számegyenes. Milyen az alábbi függvények értékkészlete:

a) $y = -f(x)$; b) $y = f(x) + n$; c) $y = f(x) - m$; d) $y = k \cdot f(x)$?

A szint

400. A 80. ábrán az $y = f(x)$ függvény grafikonja látható. Másoljátok át a görbét a füzetetekbe és ábrázoljátok ugyanabban a koordinátarendszerben az $y = -f(x)$ és $y = 3 \cdot f(x)$ függvények görbéit!



80. ábra

Ábrázoljátok a függvénygörbéket (**401–403**)!

401. a) $y = -x^2$; b) $y = -x^3$; c) $y = -|x|$.

402. a) $y = 2\sqrt{x}$; b) $y = \sqrt{9x}$; c) $y = \sqrt{16x}$.

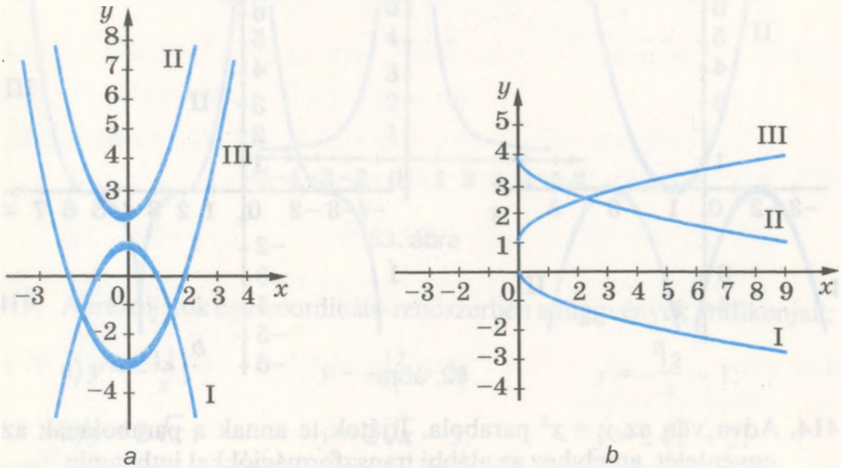
403. a) $y = 3x^2$; b) $y = -3x^2$; c) $y = -0{,}5x^2$.

404. Hogyan kell transzformálni az $y = \sqrt{x}$ függvény görbéjét ahhoz, hogy megkapjuk az $y = -\sqrt{x}$ függvény grafikonját? Igaz-e, hogy az $y = \sqrt{x}$ és az $y = -\sqrt{x}$ függvények (uniója) egyesített görbéje az $y^2 = x$ függvény grafikonja?

405. Hogyan kell transzformálni az $y = 3x - 4$ függvény görbéjét ahhoz, hogy megkapjuk az $y = 4 - 3x$ függvény grafikonját? Ábrázoljátok a görbét!

406. Ábrázoljátok az $y = x$ és $y = x^2 - 4$ függvények görbéit! Határozzátok meg értelmezési tartományaikat! Az x mely értékei mellett pozitívak a függvények értékei, és az x milyen értéke mellett negatívak? Határozzátok meg a görbék koordinátatengelyekkel alkotott metszéspontjainak koordinátáit!

407. Milyen függvények görbéi láthatók a 81. *a*, *b* ábrákon?



a *b*

81. ábra

Ábrázoljátok egy koordináta-rendszerben a függvények grafikonjait (**408–409**)!

408. a) $y = 2x$, $y = 2x + 1$ és $y = 2x - 3$;
b) $y = -x^2$, $y = -x^2 + 2$ és $y = -x^2 - 1$.

409. a) $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{x} - 1$ és $y = \sqrt{x} + 2$;
b) $y = 2x^2$, $y = 2x^2 + 1$ és $y = 2x^2 - 1$.

410. Hogyan kell transzformálni az $y = x^2$ függvény görbéjét ahhoz, hogy megkapjuk az alábbi függvények grafikonjait:
a) $y = (x + 3)^2$; b) $y = (x - 3)^2$; c) $y = -(x + 3)^2$?

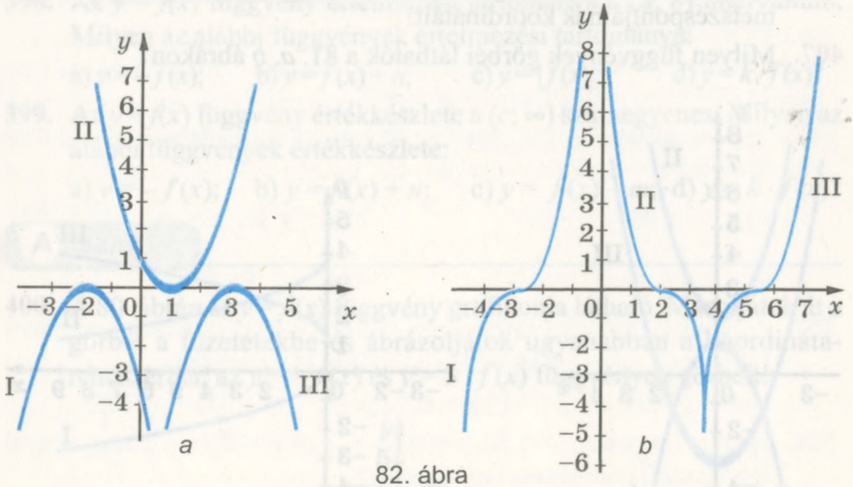
Ábrázoljátok egy koordináta-rendszerben a függvények grafikonjait (**411–412**)!

411. a) $y_1 = 2x$, $y_2 = 2(x - 1)$ és $y_3 = 2(x + 3)$;
b) $y_1 = -x^2$, $y_2 = -(x + 2)^2$ és $y_3 = -(x - 3)^2$.

412. a) $y_1 = \frac{4}{x}$, $y_2 = \frac{4}{x-3}$ és $y_3 = \frac{4}{x+1}$;

b) $y_1 = \sqrt{x}$, $y_2 = \sqrt{x-1}$ és $y_3 = \sqrt{x+2}$.

413. Milyen függvények görbéi láthatók a 82. *a*, *b* ábrákon?



82. ábra

414. Adva van az $y = x^2$ parabola. Írjátok le annak a parabolának az egyenletét, amelyhez az alábbi transzformációkkal juthatunk:
a) 2 egységgel jobbra és 3 egységgel feljebb;
b) 4 egységgel balra és 2 egységgel lejjebb!

415. Ábrázoljátok az $y = (x + 1)^2 - 3$ függvény görbéjét!

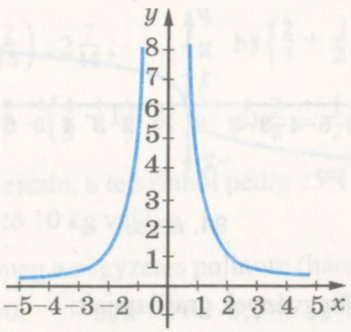
B szint

416. Az $y = f(x)$ függvény grafikonja szimmetrikus az y-tengelyhez viszonyítva. Szimmetrikusak-e ehhez a tengelyhez képest az alábbi függvények görbéi:
a) $y = 2f(x)$; b) $y = -f(x)$; c) $y = -2f(x)$?
Ábrázoljátok a megfelelő grafikonokat!

417. Az $y = f(x)$ függvény a $(-\infty; a)$ intervallumon csökkenő, míg a $(a; \infty)$ intervallumon növekedő. Milyenek ezeken az intervallumokon a következő függvények:
a) $y = 2f(x)$; b) $y = 0{,}5f(x)$; c) $y = -f(x)$?
Ábrázoljátok a megfelelő grafikonokat!

418. A 83. ábrán az $y = 4x^{-2}$ függvény grafikonja látható. Másoljátok át a görbét a füzetetekbe és ábrázoljátok ugyanabban a koordinátarendszerben az alábbi függvények görbéit:

a) $y = \frac{4}{x^2} + 2$; b) $y = \frac{4}{x^2} - 3$; c) $y = 1 - \frac{4}{x^2}$!



83. ábra

419. Ábrázoljátok egy koordináta-rendszerben a függvények grafikonjait:

a) $y = -\frac{12}{x}$; $y = -\frac{12}{x} + 3$; $y = -\frac{12}{x} - 1$;

b) $y = 2\sqrt{x}$; $y = 2\sqrt{x} - 3$; $y = 2\sqrt{x} + 2$!

420. Ábrázoljátok a függvények grafikonjait:

a) $y = -x^2 + 3$; b) $y = \frac{4}{x} - 3$; c) $y = x^3 + 1$;

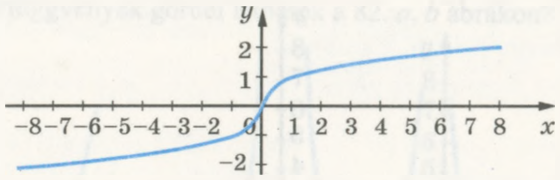
d) $y = -\sqrt{x} + 1$; e) $y = 2x^3 - 1$; f) $y = 0{,}5x^2 - 2$!

421. Töltsétek ki a táblázat üres helyeit! Milyen képlettel adható meg az $y = f(x)$ függvény?

x	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)$	9	6	5	6	9	14
$-f(x)$						
$3f(x)$						

422. A 84. ábrán az $y = \sqrt[3]{x}$ függvény grafikonja látható. Másoljátok át a görbét a füzetetekbe és ábrázoljátok ugyanabban a koordináta-rendszerben az alábbi függvények görbéit:

a) $y = \sqrt[3]{x-2}$; b) $y = \sqrt[3]{x+1}$; c) $y = 3 - \sqrt[3]{x}$!



84. ábra

423. Ábrázoljátok a függvények grafikonjait:

a) $y = 0{,}5(x-1)^3$; b) $y = 3\sqrt{x+3}$; c) $y = 2(x-2)^2$;

d) $y = \frac{1}{x-3}$; e) $y = \frac{1}{2}(x+1)^2$; f) $y = \frac{-3}{x+3}$!

424. Ábrázoljátok a függvények görbéit és vizsgáljátok meg tulajdonságaikat:

a) $y = \frac{12}{x-3} + 4$; b) $y = \frac{6}{x+2} - 3$; c) $y = \frac{x+2}{x+1}$!

Ábrázoljátok a függvények grafikonjait (**425–428**)!

425. a) $y = (x+2)^2 + 3$; b) $y = -2(x+1)^2 + 3$;

c) $y = \frac{1}{x-1} + 2$; d) $y = 5 - \frac{6}{x+1}$.

426. a) $y = 2\sqrt{x-3} + 1$; b) $y = 2 - \sqrt{x+3}$;

c) $y = -(x+1)^3 + 2$; b) $y = 0{,}5(x-3)^3 - 3$.

427. a) $y = 2|x| - 3$; b) $y = \frac{1}{|x|}$; c) $y = \sqrt{|x|}$;

d) $y = -|x| + 2$; e) $y = (|x| - 1)^2$; f) $y = |x|^3 + 1$.

428. a) $y = |3x + 1|$; b) $y = |-x^2 + 4|$; c) $y = \left|1 - \sqrt{x}\right|$;

d) $y = \left|\frac{1}{5}x - 1\right|$; e) $y = \left|\frac{6}{x} - 3\right|$; f) $y = |x^2 - 2|$.

Ismétlő gyakorlatok

429. Számítsátok ki:

a) $\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}+1\frac{2}{15}\right):2\frac{7}{15}$; b) $\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{20}\right)\cdot 1\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$;

c) $\left(1-\frac{2}{3}\right):2\frac{2}{3}-\left(\frac{4}{5}-1\right)\cdot 5$; d) $\frac{7}{8}-\frac{1}{2}:\frac{3}{4}+5:\frac{1}{3}-\frac{1}{8}$!

430. A tejből 20% tejszín, a tejszínből pedig 25% vaj nyerhető. Mennyi tejből készíthető 10 kg vaj?

431. Határozzátok meg a négyzetes polinom (háromtag) gyökeit:

a) $2x^2+7x-30$; b) x^2-5x+6; c) $4x^2-5x+3$;

d) $7x^2-5x-2$; e) $x^2-6x-55$; f) $x^2+10x+25$!

432. Emeljétek ki az alábbi háromtagokból a négyzetes kéttagokat:

a) $x^2-6x+15$; b) x^2+8x+8; c) x^2+5x+6;

d) x^2-x-1; e) $5x^2-10x+8$; f) $9+2x-3x^2$!

11.§. MÁSODFOKÚ FÜGGVÉNY

***Másodfokú függvénynek* nevezzük az $y = ax^2 + bx + c$ képlettel megadott függvényt, ahol $a \neq 0$, b és c tetszés szerinti számok, az x pedig független változó.**

Például az $y=x^2$, $y=-x^2$, $y=x^2+3$, $y=(x+4)^2$ másodfokú függvények. Valamennyi függvény grafikonja ugyanaz a parabola, csak másképpen helyezkedik el a koordinátasíkban. Az $y = ax^2$ függvény grafikonja is parabola, csúcsa a koordináta-rendszer kezdőpontja, ágai felfelé nyitottak, ha $a > 0$, és lefelé, ha $a < 0$.

Az $y = ax^2 + bx + c$ és az $y = ax^2$ függvények grafikonjai *egybevágó parabolák*, amelyek párhuzamos eltolással fedésbe hozhatók.

Bizonyítsuk ezt be: $ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=$

$$= a\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Mivel $a \neq 0$, b és c számok, ezért $\frac{b}{2a}$ és $\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ is számok.

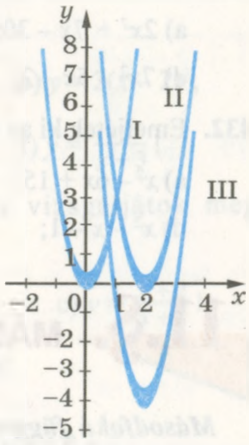
Jelöljük ezeket a számokat m-mel és n-nel! A következő azonosságot kapjuk:

$$ax^2 + bx + c = a(x + m)^2 - n.$$

Tehát az $y = ax^2 + bx + c$ függvény az $y = a(x + m)^2 - n$ alakban is megadható. Például az $y = 3x^2 - 12x + 8$ függvényt felírhatjuk $y = 3(x - 2)^2 - 4$ alakban is.

A 10. §-ból ismeretes, hogy az $y = a(x + m)^2$ függvény grafikonja megkapható az $y = ax^2$ függvény görbéjének az x-tengelyen $|m|$ egységgel való eltolásával.

Ha az $y = a(x + m)^2$ függvény görbéjét az y-tengelyen $|n|$ egységgel eltoljuk, akkor megkapjuk az $y = a(x + m)^2 - n$ függvény grafikonját. Vagyis, ha az $y = ax^2$ függvény görbéjét kétszer párhuzamosan eltoljuk, akkor az $y = a(x + m)^2 - n$ függvény, s innen az adott $y = ax^2 + bx + c$ függvény grafikonját kapjuk. Például ahhoz, hogy megszerkesszük az $y = 3x^2 - 12x + 8$ vagy az $y = 3(x - 2)^2 - 4$ függvény grafikonját, az $y = 3x^2$ függvény görbéjét 2 egységgel jobbra toljuk az x-tengelyen (85. ábra), majd az így kapott II. görbét 4 egységgel lefelé toljuk az y-tengelyen. Az így kapott III. parabola az adott függvény grafikonja.



85. ábra

Az előző okfejtésből kiderül, hogy az $y = ax^2 + bx + c$ függvény grafikonja az $y = a(x + m)^2 - n$ parabola, csúcspontjának koordinátái pedig $-m$ és $-n$, azaz

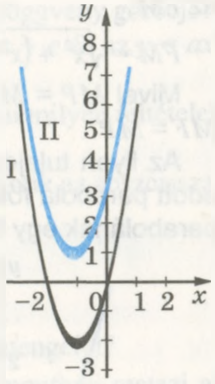
$$-\frac{b}{2a} \text{ és } \frac{-b^2 + 4ac}{4a}.$$

Ahhoz, hogy megrajzoljuk az $y = ax^2 + bx + c$ függvény grafikonját, meg kell határoznunk csúcsának és még néhány pontjának a koordinátáit.

Jelöljük ezeket a koordinátasíkban, majd kössük össze őket folytonos vonallal. Másképpen is eljárhatunk: először megrajzoljuk az $y = ax^2 + bx$ függvény grafikonját, majd $|c|$ egységgel eltoljuk lefelé vagy felfelé az y-tengelyen. Az $y = ax^2 + bx$ vagy az $y = x(ax + b)$ függvény grafikonját könnyen megrajzolhatjuk, mert az metszi az abszcisszatengelyt az $x = 0$ és az $x = -\frac{b}{a}$ pontokban.

Példa. Ábrázoljátok az $y = 2x^2 + 4x + 3$ függvény görbéjét!

✓ Megoldás. Az $y = 2x^2 + 4x$ vagy az $y = x(2x + 4)$ függvény grafikonja az $x = 0$ és az $x = -2$ pontokban metszi az x-tengelyt. Jelöljük meg őket (86. ábra)! Ezek a pontok szimmetrikusak a megrajzolandó parabola tengelyéhez viszonyítva, így csúcspontjának abszcisszája $x = -1$. Az ordinátája: $y = 2 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) = -2$. Jelöljük meg a $(-1; -2)$ koordinátájú pontot! A három megjelölt ponton halad át az $y = 2x^2 + 4x$ függvény I. görbéje. Ha ezt a grafikont 3 egységgel felfelé toljuk az y-tengelyen, megkapjuk az $y = 2x^2 + 4x + 3$ függvény II. grafikonját.



86. ábra

Elemezzük az $y = ax^2 + bx + c$ függvény tulajdonságait.

Az adott függvény görbéje parabola. Legyen a csúcsa az $M(m; n)$ pont, vagyis

$$m = -\frac{b}{2a},\ n = -\frac{D}{4a},\ \text{ahol } D = b^2 - 4ac.$$

Ha $a > 0$, akkor a parabola ágai felfelé irányulnak. Ekkor:

1) a függvény értelmezési tartománya az $\boldsymbol{R}$ halmaz egésze;

2) az értékkészlete a $[n; \infty)$ számegyenes;

3) ha $x < m$, akkor a függvény csökkenő, ha $x > m$, akkor növekvő;

4) ha $d > 0$, akkor a függvénynek két zérushelye van, az x_1 és x_2;

5) a $(x_1; x_2)$ intervallumon a függvény értékei negatívak, a $(-\infty; x_1)$ és $(x_2; \infty)$ intervallumokon pozitívak.

Ha $a < 0$, akkor a parabola ágai lefelé irányulnak és a 2), 3), 5) tulajdonságokat másképp kell megfogalmazni. Próbáljátok ezt önállóan megtenni.

Minden másodfokú függvény görbéje parabola. Megvizsgáljuk ennek a görbének az egyes tulajdonságait.

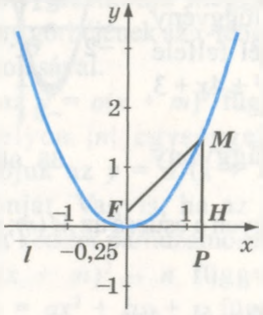
A parabola egy adott ponttól és egyenestől egyenlő távolságra lévő pontok mértani helye. Bemutatjuk ezt az állítást az $y = x^2$ függvény példáján. Megvizsgáljuk az $F(0; 0{,}25)$ pontot, az l egyenest, amelynek $y = -0{,}25$ az egyenlete, és az $M(x; x^2)$ tetszőleges pontot az adott parabolán (87. ábra). Az l egyeneshez húzott MP merőleges H pontban metszi az abszcisszatengelyt. Bebizonyítjuk, hogy $FM = MP$.

A két pont közötti távolság képlete alapján kiszámítjuk, hogy mennyi az FM.

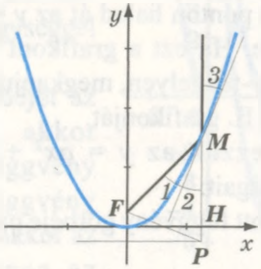
$$FM = \sqrt{x^2 + (x^2 - 0{,}25)^2} = \sqrt{(x^2 + 0{,}25)^2} = x^2 + 0{,}25.$$

Mivel $MP = MH + HP = x^2 + 0{,}25$, ezért x minden értéke mellett $MF = MP$.

Az ilyen tulajdonságokkal rendelkező F pontot és l egyenest az adott parabola *fókuszának* és *vezéregyenesének* nevezzük. Minden parabolának egy fókusza és egy vezéregyenese van.



87. ábra



88. ábra

Érdekes és nagyon fontos a parabola még egy tulajdonsága. Mivel az FMP háromszög egyenlő szárú, ezért $1\angle = 2\angle = 3\angle$ (88. ábra). Ezért a parabola F fókuszából kiinduló majd az M pontjába beeső sugár beesési szöge ($1\angle$) a visszaverődési szögével ($3\angle$) egyenlő. Vagyis a visszavert sugár az Oy-tengellyel párhuzamos. Ha a homorú tükör tengelymetszete parabola alakú, akkor az ilyen tükörről visszaverődő sugarak nem szóródnak, hanem párhuzamos nyalábokban haladnak tovább. A parabolának ezt a tulajdonságát a távolba világító fényszórókban alkalmazzák. És fordítva: ha az ilyen tükörre Oy-tengelyével párhuzamos sugarak esnek, akkor visszaverődve ezek az F fókuszon keresztül haladnak tovább. Ennek következtében az F fókusz mellett lévő fizikai test erősen felhevülhet.

Ellenőrizzétek magatokat!

1. Milyen függvényeket neveznek másodfokúaknak?
2. Hogy nevezik a másodfokú függvény görbéjét?
3. Soroljátok fel az $y = ax^2 + bx + c$ függvény tulajdonságait!
4. Melyek az $y = ax^2 + bx + c$ függvény parabolájának csúcskoordinátái?
5. Mely feltételek mellett metszi az $y = ax^2 + bx + c$ függvény az x-tengelyt?
6. Mutassátok meg az $y = ax^2 + bx$ függvény zérushelyeit!
7. Hogyan szerkeszthető meg az $y = ax^2 + bx + c$ függvény görbéje?
8. Miben különböznek egymástól az $y = ax^2 + bx + c$ és az $y = ax^2$ függvények görbéi?
9. Az $y = ax^2 + bx + c$ függvény görbéjének a szárai milyen feltételek mellett:
   a) irányulnak felfelé; b) irányulnak lefelé; c) érintik az abszcisszatengelyt; d) metszik az abszcisszatengelyt?

Oldjuk meg együtt!

1. Metszi-e az $y = 5x^2 + x + 3$ függvény az abszcisszatengelyt?

✓ Megoldás. Ha a függvénygörbe valamely pontban metszi az abszcisszatengelyt, akkor a függvény értéke ebben a pontban 0-val egyenlő. A feladat ekkor másikra vezethető vissza: van-e megoldása az $5x^2 + x + 3 = 0$ egyenletnek? A diszkriminánsa $D = 1 - 60 < 0$, ezért az egyenletnek nincs megoldása.

Felelet. Nem metszi.

2. Az $y = 2x^2 - 7x + n$ függvény görbéje az $y = 5$ pontban metszi az ordinátatengelyt. Milyen pontokban metszi a görbe az abszcisszatengelyt?

✓ Megoldás. A 0 és 5 koordinátájú pontok a görbe részei. Ezért teljesülnie kell az $5 = 0 - 0 + n$ egyenlőségnek, ahonnan $n = 5$. Vagyis az $y = 2x^2 - 7x + 5$ függvényről van szó. Megkeressük a nulla pontjait: $2x^2 - 7x + 5 = 0$, $D = 49 - 40 = 9$, $x_1 = -1$, $x_2 = -2{,}5$.

Felelet. Az $A(-2{,}5; 0)$ és $B(-1; 0)$ pontokban.

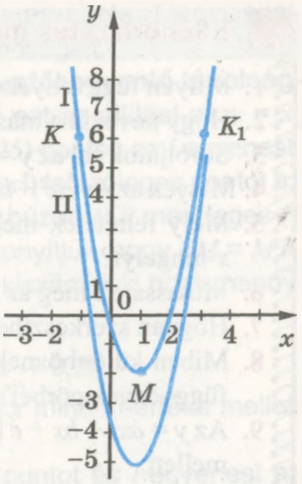
3. Rajzoljátok meg az $y = 2x^2 - 4x - 3$ függvény görbéjét!

✓ Megoldás. Rajzoljátok meg először az egyszerűbb $y = 2x^2 - 4x = 2x(x - 2)$ függvény görbéjét! Ez az x-tengelyt a $O(0; 0)$ és a $B(2; 0)$ pontokban metszi (89. ábra). A pontok szimmetrikusak a parabolának az OB szakasz közepén áthaladó tengelyéhez

viszonyítva. Ezért a parabola csúcsa az $x = 1$ abszcisszájú és az $y\,(1) = 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 = -2$ ordinátájú pont. Megjelöljük az $M(1; -2)$ pontot és tengelyt húzunk rajta keresztül.

Megjelöljük a $K(-1; 6)$ kontrollpontot és a parabolatengelyhez viszonyítva vele szimmetrikus $K_1(3; 6)$ pontot. A megjelölt pontokat vonallal összekötve az $y = 2x^2 - 4x$ függvény görbéjét kapjuk (I. görbe).

Ezután az $y = 2x^2 - 4x$ függvény görbéjét 3 egységgel lefelé toljuk és az $y = 2x^2 - 4x - 3$ függvényt kapjuk (II. görbe).



89. ábra

Oldjátok meg szóban!

433. Soroljátok fel az $y = 2x^2$ függvény legfontosabb tulajdonságait!

434. Mutassátok meg az alábbi függvények zérushelyeit:

a) $y = 2x^2$; b) $y = x^2 - 7x$; c) $y = x^2 - 9$!

435. A 90. ábrán az $y = ax^2 + bx + c$ függvény görbéje látható.

Mutassátok meg:

a) a függvény értelmezési tartományát és az a együttható előjelét;

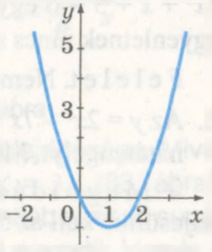
b) a parabolacsúcs abszcisszáját és ordinátáját;

c) a függvény zérushelyeit;

d) a függvény növekedésének és csökkenésének intervallumait;

e) azokat az intervallumokat, amelyeken a függvény értékei pozitívak és negatívak;

f) a függvény legkisebb értékét!



90. ábra

436. Határozzátok meg a parabola csúcsának koordinátáit:

a) $y = (x - 3)^2$; b) $y = 2\,(3 - x)^2$;

c) $y = (x - 5)^2 + 2$; d) $y = 2\,(5 - x)^2 - 3$;

e) $y = 2\,(x + 1)^2 + 1$; f) $y = -2\,(x - 1)^2 - 3$!

437. Fejtsétek meg a fejtörőt (91. ábra)!



91. ábra

A szint

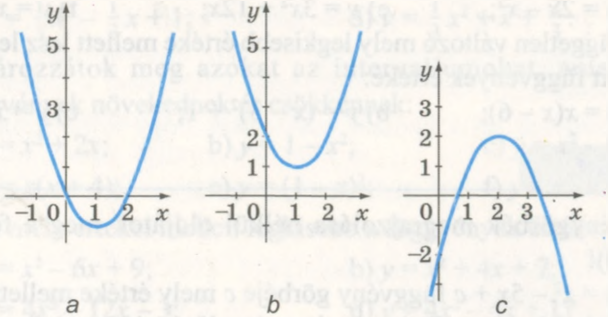
Rajzoljátok meg a függvények görbéit (**438–439**)!

438. a) $y = 2x^2$, $y = 0{,}5x^2$, $y = 2x^2 + 1$;
b) $y = -2x^2$, $y = -0{,}5x^2$, $y = -0{,}5x^2 - 2$.

439. a) $y = (x - 1)^2$; b) $y = x^2 - 2x + 1$;
c) $y = x^2 - 6x + 9$; d) $y = x^2 + 4x + 4$.

440. Mely pontokban metszi egymást az x-tengely és a függvények görbéi:
a) $y = x(x - 2)$; b) $y = -x(3x + 5)$;
c) $y = x^2 - 2x$; d) $y = 3x^2 + 5x$;
e) $y = 2x^2 - 6x$; f) $y = -3x^2 + 4x$?

441. A 92. *a*, *b*, *c* ábrán másodfokú függvények görbéi láthatók. A görbék alapján határozzátok meg mindegyik esetében:
a) a vezéregyenes előjelét;
b) az első együttható előjelét;
c) a parabolacsúcs koordinátáit;
d) a függvény zérushelyeit;
e) a függvény növekedésének és csökkenésének intervallumait!



92. ábra

442. Határozzátok meg a függvények parabola alakú görbéjének csúcskoordinátáit:

a) $y = x^2 + 4$; b) $y = 2x^2 - 6$; c) $y = x(x - 4)$;
d) $y = x\,(2x + 6)$; e) $y = x^2 + 4x$; f) $y = -8x - 3x^2$!

443. Ábrázoljátok a függvények görbéit:
a) $y = (x - 1)^2 + 2$; b) $y = (x + 2)^2 + 1$;
c) $y = (x + 4)^2 + 2$; d) $y = (x - 4)^2 - 3$!

444. Szerkesszétek meg a parabolát, kiemelve a kéttag négyzetét:
a) $y = x^2 + 4x + 5$; b) $y = x^2 - 6x + 5$;
c) $y = x^2 - 2x - 1$; d) $y = 1 + 4x - x^2$;
e) $y = 4x^2 - 4x + 5$; f) $y = 5x^2 + 10x + 4$!

Ábrázoljátok a függvények görbéit (**445–446**)!

445. a) $y = x^2 - 2x + 5$; b) $y = x^2 + 2x - 3$;
c) $y = x^2 + 2x + 4$; d) $y = x^2 - 2x - 3$.

446. a) $y = x^2 - 2x - 8$; b) $y = x^2 - 4x - 5$;
c) $y = x^2 + 2x + 6$; d) $y = x^2 - 4x + 3$.

447. Az $M(3; 5)$ pont az $y = x^2 + mx + n$ parabola csúcsa. Határozzátok meg az m és az n értékét!

448. Határozzátok meg a p és q értékét, ha az $y = x^2 + px + q$ függvény görbéje áthalad a $P(1; 4)$; $Q(-1; 10)$ pontokon!

449. Az $y = x^2 - 5x + c$ függvény görbéje az $A(0; 4)$ pontban metszi az y-tengelyt. Mely pontban metszi az x-tengelyt?

450. Az $y = x^2 - 3x + c$ függvény görbéje az $A(0; 3)$ pontban metszi az y-tengelyt. Metszi-e az x-tengelyt?

451. Rajzoljátok meg a függvények görbéit, mutassátok meg azokat az intervallumokat, amelyeken a függvény növekszik (csökken):
a) $y = x\,(x - 2)$; b) $y = x(5 - x)$; c) $y = x^2 - 6x$;
d) $y = 2x - x^2$; e) $y = 3x^2 + 12x$; f) $y = x - 2x^2$!

452. A független változó mely legkisebb értéke mellett lesz legkisebb az adott függvények értéke:
a) $y = x(x - 6)$; b) $y = (x - 3)^2 + 1$; c) $y = x^2 + 2x$?

B szint

A függvénygörbék megrajzolása nélkül oldjátok meg a feladatokat (**453–454**)!

453. Az $y = x^2 - 5x + c$ függvény görbéje c mely értéke mellett:
a) halad át a koordináta-rendszer kezdőpontján;
b) érinti az x-tengelyt;
c) metszi az x-tengelyt az $A(3; 0)$ pontban;
d) metszi az x-tengelyt a $B(0; -5)$ pontban?

454. Az $y = x^2 + bx + 4$ függvény görbéje a b mely értéke mellett:
a) érinti az x-tengelyt;
b) nem rendelkezik az x-tengellyel közös ponttal;
c) metszi az x-tengelyt az $A(4; 0)$ pontban;
d) metszi azokban a pontokban az x-tengelyt, amelyek között 3-mal egyenlő a távolság?

Rajzoljátok meg a másodfokú függvény görbéjét (**455–461**)!

455. a) $y = x^2 + x + 1$; b) $y = x^2 - (x + 2)$;
c) $y = x^2 - x + 1$; d) $y = x(x + 1) - 3$.

456. a) $y = -x^2 + 3x + 1$; b) $y = 1 - 2x - x^2$;
c) $y = -x^2 - 2x + 3$; d) $y = 4x - (x^2 - 1)$.

457. a) $y = 1 + x - x^2$; b) $y = 2 + x(1 - x)$;
c) $y = 4 - x - x^2$; d) $y = 3 - x\,(x - 2)$.

458. a) $y = (x - 1)\,(x + 2)$; b) $y = (x - 2)\,(x + 3)$;
c) $y = (x + 2)\,(x - 3)$; d) $y = 2(3 + x)\,(x - 1)$.

459. a) $y = (2x - 1)^2 + 3$; b) $y = 1 - (x + 3)^2$;
c) $y = (0{,}5x + 2)^2 - 3$; d) $y = 4(0{,}5x + 1)^2 - 1$.

460. a) $y = 3x^2 + 3x - 1$; b) $y = 2x^2 - 4x + 5$;
c) $y = -3x^2 + 6x - 1$; d) $y = -x^2 + x - 3$.

461. a) $y = 0{,}5x^2 - x + 2$; b) $y = 0{,}3x^2 - 0{,}6x + 1$;
c) $y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + 1$; d) $y = \frac{1}{3}x^2 + x + \frac{2}{3}$.

462. Határozzátok meg azokat az intervallumokat, amelyeken a függvények növekednek és csökkennek:
a) $y = x^2 + 2x$; b) $y = 1 - x^2$; c) $y = x^2 - 4x + 3$;
d) $y = x(x + 4)$; e) $y = (1 - x)^2$; f) $y = x^2 + x + 1$!

463. Az x mely értékei mellett legkisebb a függvények értéke:
a) $y = x^2 - 6x + 9$; b) $y = x^2 + 4x + 7$;
c) $y = 4x^2 - 12x - 3$; d) $y = 4x^2 - 4x + 1$?

464. Határozzátok meg a függvény legnagyobb értékét:
a) $y = 3 - (x - 2)^2$; b) $y = -0{,}25\,(x + 5)^2$;
c) $y = 6x - x^2 - 10$; d) $y = -5x^2 + 4x + 1$!

465. a) Az $y = x^2 - 6x + c$ függvény legkisebb értéke –5-tel egyenlő. Ábrázoljátok a függvény görbéjét!

b) Az $y = c + 4x - 4x^2$ függvény legnagyobb értéke 4-gyel egyenlő. Ábrázoljátok a görbéjét!

466. Határozzátok meg a függvénygörbék metszéspontjainak koordinátáit:

a) $y = x^2$ és $y = (x - 4)^2$;

b) $y = 2x^2$ és $y = -x^2 + 3$;

c) $y = 3x^2 + 7$ és $y = 3x^2 + 2x + 1$!

467. Határozzátok meg a parabolacsúcsok közötti távolságokat, amelyek a következő függvények görbéi:

a) $y = (x - 3)^2$ és $y = (x - 3)^2 + 7$;

b) $y = x^2$ és $y = (x + 5)^2$;

c) $y = x^2 - 2x + 5$ és $y = x^2 - 2x - 4$;

d) $y = x^2 + 4x + 5$ és $y = -x^2 - 4x - 5$!

468. Határozzátok meg az $y = x^2 - 6x + 13$ képlettel megadott parabola csúcsától az x- és y-tengelyig, valamint a koordináta-rendszer kezdőpontjáig mért távolságot!

469. Határozzátok meg a b értékét, ha az $y = x^2 + bx$ függvény görbéje szimmetrikus az $x = 3$ egyeneshez viszonyítva!

470*. Ábrázoljátok a függvények görbéit:

a) $y = |x^2 - 4x + 3|$; b) $y = |x^2 + x - 6|$;

c) $y = |x^2 + 4x| + 3$; d) $y = |6x| - x^2 - 5$!

471. ***J. Cardano feladata***. Határozzátok meg mértani szerkesztéssel az $x^2 + 6x = 91$ egyenlet pozitív gyökét!

Ismétlő gyakorlatok

472. Cseréljétek fel a betűket számokkal, hogy teljesüljön az alábbi egyenlőség:

PARA + PARA = BOLA!

Hány különböző megoldása van a feladatnak?

Oldjátok meg az egyenlőtlenségeket (**473–474**)!

473. a) $2(x + 7) + 3(1 - 2x) \geq 1$; b) $3(3x - 2) - 4(x + 1) < 2x$;

c) $2(x + 1) \geq 3 - (1 - 2x)$; d) $3x - 0{,}5(1 - 3x) \leq 2{,}5(x - 3)$.

474. a) $(x - 1)(2 - x) > 0$; b) $(3 + x)(x + 7) < 0$;

c) $(3 - x)(5 + x) \leq 0$; d) $(5 - x)(1 - x) \geq 0$.

475. Hány gyöke van az egyenleteknek:

a) $|x-1|+|x+2|=5$; b) $|x-1|+|x+2|=3$;

c) $|x-1|+|x+2|=2$; d) $|x-1|+|x+2|=0$?

12.§. MÁSODFOKÚ EGYENLŐTLENSÉGEK

Azt az egyenlőtlenséget, amelynek bal oldala az ax^2+bx+c kifejezés, ahol $a\neq 0$, b, c adott számok, a jobb oldala pedig nulla, *másodfokú egyenlőtlenségnek* nevezzük.

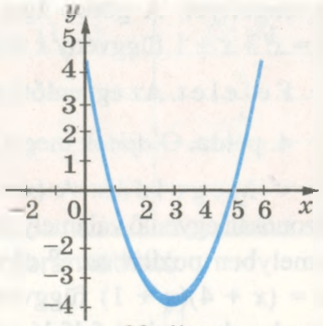
A másodfokú egyenlőtlenségek példái:

$x^2-5x+3<0$, $2x^2+4\leq 0$, $-3x^2+2x\geq 0$, $-x^2+3x+7>0$.

Az ilyen egyenlőtlenségeket célszerű másodfokú függvények görbéinek a segítségével megoldani.

1. példa. Oldjátok meg az $x^2-6x+5<0$ egyenlőtlenséget!

✓ Megoldás. Megszerkesztjük az $y=x^2-6x+5$ függvény görbéjét (93. ábra). Ennek a zérushelyei az 1; 5 számok. Az adott függvénynek csak akkor vannak negatív értékei, ha az x változó a (1; 5) intervallumhoz tartozik. Ez lesz a függvény megoldásainak halmaza.



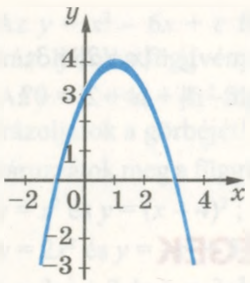
93. ábra

Felelet. (1; 5).

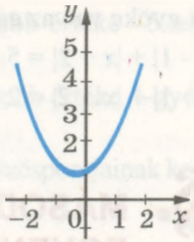
Érthető, hogy a hasonló egyenlőtlenségek megoldásának nem elengedhetetlen feltétele a másodfokú függvénygörbe pontos szerkesztése. Elegendő azt meghatározni, hogy milyen irányúak a parabola ágai, és hogy a görbe mely pontokban (ha ezek léteznek) metszi az x-tengelyt.

2. példa. Oldjátok meg a $-x^2+2x+3\leq 0$ egyenlőtlenséget!

✓ Megoldás. Az $y=-x^2+2x+3$ függvény görbéje a -1 és 3 abszcisszájú pontokban metszi az x-tengelyt, és a parabola ágai lefelé irányulnak. Ezért vázlatosan a függvény görbéje a 94. ábrán látható módon szerkeszthető meg. A függvény értékei nem pozitívak, ha x a $(-\infty;-1]$ vagy a $[3;\infty)$ intervallumokhoz tartozik.



94. ábra



95. ábra

Vagyis az adott egyenlőtlenség megoldásainak halmaza ezen intervallumok uniója. Mivel az unió jelölése ∪, ezért a felelet a következő módon adható meg: $(-\infty;-1] \cup [3; \infty)$.

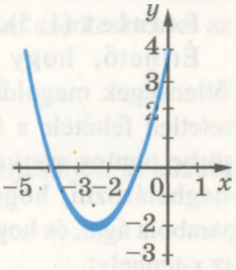
3. példa. Oldjátok meg az $x^2 + x + 1 < 0$ egyenlőtlenséget!

✓ Megoldás. Az $x^2 + x + 1 = 0$ egyenlet diszkriminánsa negatív, ezért az $y = x^2 + x + 1$ függvény görbéjének nincs közös pontja az x-tengellyel. A görbe ágai felfelé irányulnak (95. ábra). Vagyis az $y = x^2 + x + 1$ függvény x minden értéke mellett pozitív.

Felelet. Az egyenlőtlenségnek nincs megoldása.

4. példa. Oldjátok meg a $(x + 4)(x + 1) > 0$ egyenlőtlenséget!

✓ Megoldás. A $(x + 4)(x + 1)$ kifejezés azonosan egyenlő valamely négyzetes háromtaggal, amelyben pozitív az x^2 együtthatója. Vagyis az $y = (x + 4)(x + 1)$ függvény görbéje parabola, amelynek a szárai felfelé irányulnak, és amely a -4 és -1 abszcisszájú pontokban metszi az x-tengelyt (96. ábra). A függvény értéke pozitív, ha $x < -4$ vagy $x > -1$.



96. ábra

Felelet: $(-\infty; -4) \cup (-1; \infty)$.

Mivel az $\frac{x+4}{x+1} > 0$ egyenlőtlenség ekvivalens a $(x + 4)(x + 1) > 0$ egyenlőtlenséggel, ezért ilyen módon (grafikusan) oldhatók meg a legegyszerűbb racionális tört-egyenlőtlenségek is.

A másodfokú egyenlőtlenség grafikus megoldásához a következőket kell tenni:
a) meghatározni a parabola ágainak irányát az első együttható előjele szerint;
b) meghatározni a megfelelő másodfokú egyenlet gyökeit, ha azok léteznek;
c) vázlatosan megrajzolni a másodfokú függvény görbéjét;
d) a görbe alapján meghatározni az x esetében azokat az intervallumokat, amelyeken az egyenlőtlenség igaz.

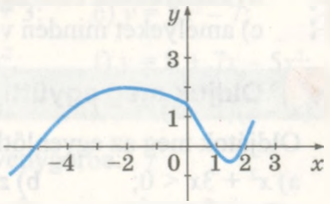
A másodfokú egyenlőtlenségek megoldási módja az egyenlőtlenségek sok egyéb típusára is alkalmazható.

Példa. Oldjuk meg a $(x - 1)(x - 2)(x + 5) < 0$ egyenlőtlenséget! Ez a feladat a következővel ekvivalens. Az x mely értékei mellett negatív az $y = (x - 1)(x - 2)(x + 5)$ függvény értéke?

A kérdés megválaszolásához először meghatározzuk a függvény zérushelyeit. Ezek: 1, 2 és –5. Ezek négy intervallumra tagolják a függvény értelmezési tartományát, nevezetesen: $(-\infty; -5)$, $(-5; 1)$, $(1; 2)$ és $(2; \infty)$. A $(x - 1)(x - 2)(x + 5)$ szorzat minden egyes szorzójának meghatározott előjele van az adott intervallumok mindegyikén. Adjuk meg ezeket és az egész szorzat előjelét táblázat formájában.

Szorzó	$(-\infty; -5)$	$(-5; 1)$	$(1; 2)$	$(2; \infty)$
$x - 1$	–	–	+	+
$x - 2$	–	–	–	+
$x + 5$	–	+	+	+
y	–	+	–	+

Az y függvény vázlatos görbéje a 97. ábrán látható.



97. ábra

Tehát a függvény a $(-\infty; -5)$ és a $(1; 2)$ intervallumokon vesz fel negatív értékeket.

Felelet. Az egyenlőtlenség megoldásainak halmaza: $(-\infty; -5) \cup (1; 2)$.

A vizsgált példában azok az intervallumok, amelyeken a függvény értékei pozitívak, azokkal az intervallumokkal váltakoznak,

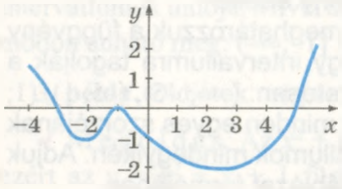
amelyeken a függvényértékek negatívak. Azonban ez nem mindig van így.

Oldjuk meg a $(x + 1)^2 (x + 3)(x - 5) \geq 0$ egyenlőtlenséget!

Az egyenlőtlenség bal oldala nullával egyenlő, ha az x értéke -3, -1 vagy 5. A megfelelő táblázat összeállításával meggyőződünk róla, hogy az egyenlőtlenség bal oldalának értékei negatívak a szomszédos $(-3; -1)$ és $(-1; 5)$ intervallumokon. Tehát az adott egyenlőtlenség megoldásainak halmaza $(-\infty; -3] \cup [5; \infty) \cup \{-1\}$.

Az $y = (x + 1)^2 (x + 3) (x - 5)$ függvény vázlatos görbéje a 98. ábrán látható.

Az egyenlőtlenségek megoldásának vizsgált módja az általános *intervallumos megoldási módszer* külön esete, amellyel a felső tagozatos osztályokban ismerkedtek meg részletesebben.



98. ábra

Ellenőrizzétek magatokat!

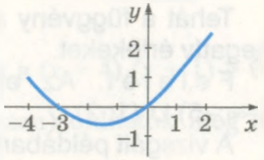
1. Fogalmazzátok meg, mi a másodfokú egyenlőtlenség!
2. Mondjatok példákat másodfokú egyenlőtlenségekre!
3. Milyen szimbólummal jelölik két halmaz unióját?
4. Hány megoldása lehet a másodfokú egyenlőtlenségnek?
5. Mondjatok példákat olyan másodfokú egyenlőtlenségekre:
   a) amelyeknek egyáltalán nincs megoldásuk;
   b) amelyeknek csak egy megoldásuk van;
   c) amelyeket minden valós szám kielégít!

Oldjuk meg együtt!

Oldjátok meg az egyenlőtlenségeket:

a) $x^2 + 3x < 0$; b) $z^2 - 3z - 2 \leq 0$; c) $t^2 + t + 1 > 0$.

✓ M e g o l d á s. a) Az $y = x^2 + 3x$ függvény görbéje az $x = 0$ és $x = -3$ pontokban metszi az abszcisszatengelyt. Ábrázoljuk vázlatosan a függvény görbéjét (99. ábra)! Az egyenlőtlenség megoldásainak halmaza a $(-3; 0)$ intervallum.



99. ábra

b) Meghatározzuk a $z^2 - 3z - 2 = 0$ egyenlet gyökeit:

$D = 9 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 17$; $z_1 = \frac{3 - \sqrt{17}}{2}$, $z_2 = \frac{3 + \sqrt{17}}{2}$.

A parabola ágai felfelé irányulnak, ezért a megoldások keresett halmaza $\left[\frac{3 - \sqrt{17}}{2}; \frac{3 + \sqrt{17}}{2}\right]$.

c) $D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot 1 < 0$. A t^2 együtthatója pozitív, így a parabola, amelynek ágai felfelé irányulnak, a felső fél koordinátasíkban helyezkedik el. Vagyis az egyenlőtlenség megoldásainak halmaza az R halmaz egésze.

Felelet. a) $(-3; 0)$; b) $\left[\frac{3 - \sqrt{17}}{2}; \frac{3 + \sqrt{17}}{2}\right]$; c) R.

Oldjátok meg szóban!

476. Nevezzétek meg a másodfokú egyenlőtlenségeket:

a) $x^2 - 5x + 6 < 0$; b) $3x^2 + 6 \leq 0$;

c) $-2x^2 - 5x + 7 \leq 0$; d) $x^3 - 2x + 6 \geq 0$;

e) $x^2 + \frac{1}{x} + 3 \geq 0$; f) $\frac{x^2}{3} + 4x + \sqrt{2} < 0$!

477. Határozzátok meg a függvénygörbék ágainak irányát:

a) $y = 4x^2 - 16x + 5$; b) $y = -x^2 + 4x + 3$; c) $y = 3x^2 - 7$;

d) $y = 6x^2 + 5x$; e) $y = 7 - 4x - x^2$; f) $y = 5 + 7x - 5x^2$;

g) $y = 3x(x - 4)$; h) $y = -x(x + 3)$; i) $y = (x - 1)(2 - x)$!

478. Metszi-e az abszcisszatengelyt a függvénygörbe:

a) $y = x^2 - 2x + 3$; b) $y = -x^2 + 7x - 5$; c) $y = 3x^2 - x$;

d) $y = 3x^2 - x + 3$; e) $y = 5x^2 + 3x - 1$; f) $y = x(7x - 1)$?

479. Miért nincs megoldásuk az egyenlőtlenségeknek:

a) $3x^2 < -3$; b) $(x - 2)^2 + 1 \leq 0$; c) $3x^2 - x + 1 < 0$;

d) $-x^2 \geq 2$; e) $-(1 - x)^2 > 0$; f) $2x^2 < x - 1$?

A szint

480. Jelöljétek a koordináta-egyenesen az intervallumok unióit:

a) $(-\infty; 2] \cup [3; \infty)$; b) $(-4; 3) \cup (4; 7]$;

c) $[2; 4] \cup (5; 7)$; d) $(-\infty; 3] \cup (3; 7)$;

e) $[-4; 2] \cup [2; 3)$; f) $(-\infty; 1) \cup (1; 4)$!

Oldjátok meg az egyenlőtlenségeket (**481–487**)!

481. a) $x^2 - 4x < 0$; b) $x^2 + 6x \leq 0$; c) $z^2 + 6z - 7 \leq 0$;

d) $6x^2 - x > 0$; e) $2x^2 + 7x \geq 0$; f) $y^2 - 4y - 5 < 0$.

482. a) $x^2 - 6x + 9 > 0$; b) $y^2 - 8y + 16 < 0$;

c) $x^2 + 4x + 4 \leq 0$; d) $z^2 + z + 0{,}25 \leq 0$;

e) $x^2 > 2x - 1$; f) $y^2 \geq 4y - 4$.

483. a) $x^2 \leq 3x - 2$; b) $t^2 + 9 < 6t$;

c) $x^2 - 4x + 3 > 0$; d) $x^2 + 10x + 25 \geq 0$;

e) $9x^2 + 6x + 1 \leq 0$; f) $x^2 - 2x + 9 < 0$.

484. a) $2x^2 - 3x + 1 \geq 0$; b) $x^2 + 8 < 6x$;

c) $0{,}5x^2 - x - 2 > 0$; d) $y^2 - 4y < 12$;

e) $-x^2 + 3x - 2 > 0$; f) $11z \geq z^2 + 18$.

485. a) $2 - 3y \leq y^2$; b) $12x - 36 < x^2$;

c) $3z^2 \leq 5z + 12$; d) $4x(x + 1) < 15$;

e) $-2x^2 > 2x + 3$; f) $6(t^2 + 1) < 13t$.

486. a) $x(x - 3) < -2$; b) $2(z^2 + 5) > 9z$;

c) $x(2 - x) \geq 4$; d) $8 - (5 - y)^2 > 3y$;

e) $(x - 3)(x + 5) > 0$; f) $(x + 2)(x + 7) < 0$.

487. a) $(x + 7)(x - 1) \geq 0$; b) $(x - 3)(x - 5) \leq 0$;

c) $(x - 2)(x + 3) < 0$; d) $(a + 2)(a - 5) \leq 0$;

e) $(t + 3)(t + 4) \geq 0$; f) $(2 - c)(3 - c) \geq 0$.

488. Az x mely értékei mellett negatívak az $y = x^2 + 3x$ függvény értékei, és melyek mellett pozitívak?

489. Az x mely értékei mellett pozitívak az $y = f(x)$ függvény értékei, és melyek mellett negatívak, ha:

a) $f(x) = x^2 - 4$; b) $f(x) = 9 - x^2$;

c) $f(x) = x^2 + 6x - 7$; d) $f(x) = 3 + 2x - x^2$?

490. Határozzátok meg a függvények értelmezési tartományait:

a) $y = \sqrt{x^2 - 4}$; b) $y = \sqrt{1 - x^2}$; c) $y = \sqrt{x^2 - 5x + 4}$;

d) $y = \sqrt{x^2 - 4x}$; e) $y = \sqrt{2x^2 + 1}$; f) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$!

491. Határozzátok meg az egyenlőtlenségek egész megoldásait:

a) $x^2 + 5x - 6 < 0$; b) $x^2 - 5x - 6 \le 0$; c) $x^2 - x - 6 < 0$;

d) $6 - x^2 \ge x$; e) $x^2 + 2x - 8 > 0$; f) $x^2 - 4x + 4 \le 0$!

B szint

Oldjátok meg az egyenlőtlenségeket (**492–496**)!

492. a) $(2 - x)(3 - x) \le 2$; b) $(x + 4)(x - 5) < 10$;

c) $(1 - z)(2 + z) > 2$; d) $(x + 2)(x + 3) \ge 10x$;

e) $(3 - 2x)(x + 1) \le 2$; f) $3(x^2 + 1) \le 5x + 1$.

493. a) $2(x - 3)(1 - 2x) > 6$; b) $4(x^2 - 9) > x + 3$;

c) $x(x - 2) > 2 - 3x^2$; d) $1 - x > 2(x^2 + 1)$;

e) $-x(2 - x) \le 5 - 4x^2$; f) $3 - x < 3(x^2 + 3)$.

494. a) $\frac{x-3}{x+2} < 0$; b) $\frac{x+2}{x-7} > 0$; c) $\frac{4-x}{2x+5} > 0$;

d) $\frac{2x-1}{3-x} < 0$; e) $\frac{3x-2}{5-2x} < 0$; f) $\frac{4z-1}{3-2z} > 0$.

495. a) $\frac{x-1}{x+3} < 1$; b) $\frac{x+4}{x-1} > 5$; c) $\frac{3x-1}{2x+5} > 3$;

d) $\frac{7x+4}{3-2x} \ge 2$; e) $\frac{x^2}{2-x} \le 3 - x$; f) $\frac{2}{2-x} \ge \frac{x-8}{10-x}$.

496. a) $\frac{x+5}{x+7} \ge 0$; b) $\frac{2-x}{3-x} \le 0$; c) $\frac{x}{1-x} \le 0$;

d) $\frac{2x+1}{x-7} < 1$; e) $\frac{x+3}{1+3x} \le 1$; f) $\frac{5x-1}{1-x} \ge 1$.

497. Oldjátok meg az egyenlőtlenségeket:

a) $(3x - 1)(x + 3) > x(1 + 5x)$;

b) $(x - 2)(x + 2) + x(x + 7) \leq 0$;

c) $(x + 4)(2x - 3) - (5x - 6)(x - 3) \geq 10$;

d) $(x - 4)(3x + 1) < (2x - 6)(x - 2) + 4$!

Oldjátok meg az egyenlőtlenségeket intervallumos módszerrel (**498–502**)!

498. a) $(x^2 - 3x + 2)(x + 7) \geq 0$;

b) $(x^2 - 16)(x^2 - 25) < 0$;

c) $(x^4 + x^2 + 1)(x - 1)(x + 3) < 0$.

499. a) $(x - 3)(x + 2)(x^2 + 4x + 5) \leq 0$;

b) $(x^2 - 1)(x^2 - 5x + 6) \leq 0$;

c) $(x^2 - 3x - 4)(x^2 - 2x - 15) > 0$.

500. a) $(x^2 - 1)(3x - 2x^2 + 5) \geq 0$;

b) $(x^2 + 3x - 10)(4 - x^2) < 0$;

c) $(x^2 - 6x + 9)(x^2 - 9) > 0$.

501. a) $\frac{3x^2 + 5x - 8}{x^2 + 2x - 3} \leq 0$; b) $\frac{2x^2 - 3}{4x - 1} \geq \frac{x}{2}$; c) $1 > \frac{8 - 3x}{3x^2 - 2x - 16}$.

502. a) $\frac{5x^2 - 9x - 2}{11x - 2 - 5x^2} > 0$; b) $4 > \frac{4 - 3x}{3x^2 - x - 4}$; c) $\frac{x + 1}{1 - x} < 2x$.

503. Az x mely értékei mellett lesz nagyobb az $y = 2x + 2$ függvény értéke a következő függvények megfelelő értékeinél:

a) $y = x^2 - 3x - 4$; b) $y = 4x^2 + 9x - 13$?

504. Határozzátok meg a függvények értelmezési tartományait:

a) $y = \sqrt{8 + 7x - x^2}$; b) $y = \sqrt{3 - 5x - 2x^2}$;

c) $y = \frac{x^2 - 4}{\sqrt{4 + x - 5x^2}}$; d) $y = \frac{\sqrt{x^2 - x}}{x^2 - 3x - 4}$;

e) $y = \sqrt{x^3 - x^2 - 25x + 25} - \sqrt{\frac{5}{x^2 + 6x + 9}}$!

505. A b mely értékei mellett nincsenek a következő egyenlőtlenségeknek megoldásai:

a) $x^2 + 2bx + 1 < 0$; b) $bx^2 + 6x + 1 > 0$;

c) $(b-1)x^2 + 3b > 2bx$; d) $b(x^2 + 1) \leq 2bx + 9$?

506. Az m mely értékei mellett elégíti ki valamennyi valós szám a következő egyenlőtlenségeket:

a) $x^2 - mx + 4 > 0$; b) $x^2 - 6x + m \geq 0$;

c) $mx^2 + m + 3 < 4x$; d) $mx^2 + 4x + 2m < 1$?

Oldjátok meg az egyenlőtlenség-rendszereket (**507–508**)!

507. a) $\begin{cases} x^2 - 4x < 0, \\ x^2 - x - 6 \geq 0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x^2 - 1 > 0, \\ 2x^2 - 5x + 3 < 0. \end{cases}$

508. a) $\begin{cases} x^2 - 3 > 2x, \\ x^2 + 28 \geq 11x; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x^2 + 1 > 4x, \\ 3x^2 + 2 \leq 5x. \end{cases}$

509. Oldjátok meg a kettős egyenlőtlenségeket:

a) $0 < x^2 - 5x < 6$; b) $1 < x^2 + 2 < 3x$;

c) $x < 2x + 3 < x^2$; d) $3 < x^2 - 2x + 3 < x^2$!

510. Oldjátok meg grafikusan az egyenlőtlenségeket:

a) $x^2 < x + 2$; b) $(x-2)^2 \geq |x|$;

c) $2x^2 < 1 + \sqrt{x}$; d) $x^2 - 3{,}5x \geq \sqrt{x}$!

Ismétlő gyakorlatok

511. Körjáratban két autóbusz közlekedik 50 perces időköznyi különbséggel. Hány autóbuszt kell pótlólagosan forgalomba állítani, hogy 60%-kal csökkenjen a buszok indulása közötti időköz?

512. Születésnapi ünnepségre készülve a meghívottak 260 hrivnya értékű közös ajándékot vásároltak. Ha a társaságban 3 személlyel több lett volna, akkor fejenként 6 hrivnyával kevesebb pénzt kellett volna a közösbe beadni. Hány személyt hívtak meg a születésnapra?

Egyszerűsítsétek a kifejezéseket (**513–514**)!

513. a) $9x^2y \cdot \left(-\frac{1}{2}x^2y\right)$; b) $\left(-\frac{1}{2}ab^3\right) \cdot (-24a^2b^3)$.

514. a) $\frac{a^2 - 4b^2}{ab} : \frac{a^2 - 2ab}{3b}$; b) $\frac{x + x^3}{y^2 - 9} : \frac{9 - x^2}{2y - 6}$.

13.§. MÁSODFOKÚ EGYENLETRENDSZEREK

Az egyenletrendszerek fogalmával már a 7. osztályban megismerkedtetek. Akkor kétváltozós lineáris egyenletrendszereket és megoldási módjaikat vizsgáltátok. A gyakorlatban gyakran előfordul, hogy másodfokú egyenleteket tartalmazó rendszereket kell megoldani.

Másodfokú kétváltozós egyenletek példái:

$$x^2 + 5y^2 = 9, \quad 8z - t^2 = 12, \quad 0{,}5xy + y = 0.$$

Az ilyen egyenletek mindegyikének két változója és ezekkel kapcsolatos legalább egy másodfokú tagja van. Azaz vagy egy négyzetes változóról, vagy két változó szorzatáról van szó.

Például az

$$x - 2y = 0, \quad 5x^2y + 10 = 0, \quad x^2z^2 - x^2 + z = 0$$

egyenletek első-, harmad- és negyedfokúak.

Ha a rendszer egyik egyenlete kétváltozós másodfokú, a másik pedig ugyanezeket a változókat tartalmazó másod- vagy elsőfokú egyenlet, akkor az ilyen rendszert *másodfokú kétváltozós egyenletrendszernek* nevezzük.

Idézzük fel!

A kétváltozós *egyenlet megoldásának* nevezünk minden olyan számpárt, amely igaz egyenlőséggé alakítja az adott egyenletet.

Az *egyenletrendszer megoldásának* nevezzük valamennyi egyenletének közös megoldását.

Az *egyenletrendszert megoldani* annyit jelent, mint meghatározni valamennyi megoldásának halmazát.

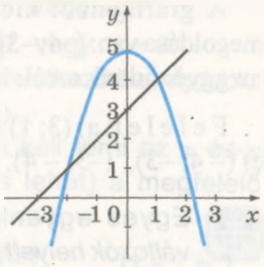
Például az $x^2 + y - 5 = 0$ és az $x - y + 3 = 0$ egyenletek közös megoldásai a (–2; 1) és (1; 4) számpárok. Ellenőrizzétek ezt szóban! Egyéb közös megoldásuk ezeknek az egyenleteknek nincs (100. ábra).

Vagyis az $\begin{cases} x^2 + y - 5 = 0, \\ x - y + 3 = 0 \end{cases}$ rendszernek, amelyet két számpár, a (–2; 1) és a (1; 4) elégít ki, két megoldása van.

Az egyenletrendszerek megoldására több módszer létezik. Ezek legfontosabbjai:

- behelyettesítési módszer;
- egyenlő együtthatók módszere;
- grafikus módszer.

Bemutatjuk konkrét példákon, hogyan alkalmazhatók ezek a módszerek a másodfokú egyenletrendszerek megoldása során.



100. ábra

Példa. Oldjátok meg az egyenletrendszereket:

a) $\begin{cases} 2x^2 - y = 17, \\ x^2 + y = 10; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 2, \\ x^2 - y = 5; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = 12. \end{cases}$

M e g o l d á s. a) *Egyenlő együtthatók módszere.* A rendszer egyenleteinek összeadásával a következő $3x^2 = 27$ egyenletet kapjuk, ahonnan $x^2 = 9$, $x_1 = 3$, $x_2 = -3$.

Mivel $x^2 = 9$, a második egyenletből a következőt kapjuk: $y_1 = y_2 = 1$.

Vagyis a rendszernek két megoldása van: (3; 1) és (–3; 1).

b) *Behelyettesítési módszer.* A második egyenletből az y által kifejezzük az x^2-et és behelyettesítjük az első egyenletbe:

$$2(y + 5) - y^2 = 2 \quad \text{vagy} \quad y^2 - 2y - 8 = 0.$$

Viéte tétele alapján meghatározzuk a gyökeit: $y_1 = 4$, $y_2 = -2$.

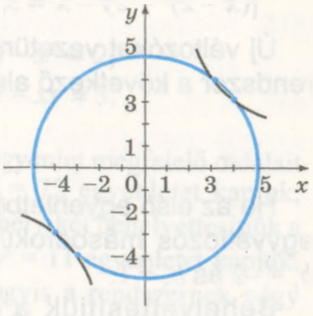
Ha $y = 4$, akkor $x^2 = 9$, ahonnan $x_1 = 3$, $x_2 = -3$.

Ha $y = -2$, akkor $x^2 = 3$, ahonnan $x_3 = \sqrt{3}$, $x_4 = -\sqrt{3}$.

Vagyis az adott egyenletrendszernek négy megoldása van: (3; 4), (–3; 4), ($\sqrt{3}$; –2), ($-\sqrt{3}$; –2).

c) *Grafikus módszer.* Az első egyenlet görbéje olyan körvonal, amelynek a középpontja a koordináta-rendszer origója, a sugara pedig 5 egység.

A második egyenlet görbéje az $y = \frac{12}{x}$ hiperbola. Ábrázoljuk az egyenletek görbéit közös koordináta-rendszerben (101. ábra) és határozzuk meg metszéspontjaik koordinátáit!



101. ábra

A grafikonból kiderül, hogy az adott egyenletrendszernek négy megoldása van: (–4; –3), (–3; –4), (3; 4), (4; 3). Közvetlen behelyettesítéssel meggyőződünk arról, hogy ezek az adott rendszer pontos megoldásai.

F e l e l e t: a) (3; 1) és (–3; 1); b) (3; 4), (–3; 4), $(\sqrt{3}; -2)$, $(-\sqrt{3}; -2)$; c) (– 4; –3), (–3; – 4), (3; 4), (4; 3).



Egyes egyenletrendszer-típusok megoldása céljából a *változók helyettesítési módszerét* alkalmazzák. Oldjuk meg ezzel a módszerrel a következő egyenletrendszereket:

a) $\begin{cases} x^2y + xy^2 = 30, \\ x + xy + y = 11; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 - 4x + (x - 2y)^2 = 1, \\ (x-2)^2 + 2y - x = 3. \end{cases}$

M e g o l d á s. a) $\begin{cases} xy(x + y) = 30, \\ x + y = 11 - xy, \end{cases}$ ahonnan $xy(11 - xy) = 30$.

Az $xy = a$ helyettesítésével az utóbbi egyenletből a következőt kapjuk: $a^2 - 11a + 30 = 0$.

Ennek a másodfokú egyenletnek a gyökei: 5 és 6.

Ha $xy = 5$, akkor $x + y = 6$; ha $xy = 6$, akkor $x + y = 5$.

Két egyenletrendszert kapunk:

$$\begin{cases} x + y = 6, \\ xy = 5 \end{cases} \quad \text{és} \quad \begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6. \end{cases}$$

A két egyenletrendszer megoldásával megkapjuk az adott rendszer megoldásait: a) (5; 1), (1; 5); (3; 2), (2; 3).

b) Az első egyenletben létrehozzuk a két tag teljes négyzetét. A következőt kapjuk:

$$\begin{cases} (x-2)^2 - 4 + (x - 2y)^2 = 1, \\ (x-2)^2 + 2y - x = 3, \end{cases} \quad \text{vagy} \quad \begin{cases} (x-2)^2 + (x - 2y)^2 = 5, \\ (x-2)^2 - (x - 2y) = 3. \end{cases}$$

Új változókat vezetünk be: $a = x - 2$, $b = x - 2y$. Ekkor az adott rendszer a következő alakot ölti:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 5, \\ a^2 - b = 3. \end{cases} \qquad (*)$$

Ha az első egyenletből kivonjuk a másodikat, akkor a $b^2 + b = 2$ egyváltozós másodfokú egyenletet kapjuk, amelynek a gyökei $b_1 = -2$ és $b_2 = 1$.

Behelyettesítjük a b ezen értékeit a (*) rendszerbe és meghatározzuk az a változó megfelelő értékeit.

Ha $b_1 = -2$, akkor $a^2 + 2 = 3$, ahonnan $a_1 = -1$ vagy $a_2 = 1$.

Ha $b_2 = 1$, akkor $a^2 - 1 = 3$, ahonnan $a_1 = -2$ vagy $a_2 = 2$.

Vagyis a (*) egyenletrendszer megoldásai a következő számpárok:

$$(-1; -2), (1; -2), (-2; 1), (2; 1).$$

Az adott rendszer megoldása érdekében át kell térni az x és y változókhoz és így kell megoldani (szóban is lehet) a megfelelő rendszereket:

$$\begin{cases} x - 2 = -1, \\ x - 2y = -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2 = 1, \\ x - 2y = -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2 = -2, \\ x - 2y = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2 = 2, \\ x - 2y = 1. \end{cases}$$

A következőket kapjuk: (1; 1,5), (3; 2,5), (0; –0,5), (4; 1,5).

F e l e l e t. a) (5; 1), (1; 5); (3; 2), (2; 3); b) (1; 1,5), (3; 2,5); (0;–0,5), (4; 1,5).

Ellenőrizzétek magatokat!

1. Mondjatok példát kétváltozós másodfokú egyenletre!
2. Mi a kétváltozós egyenlet megoldása?
3. Hány megoldása lehet a kétváltozós egyenletnek?
4. Milyen alakzat a következő egyenletek görbéje: a) $y = x^2$; b) $x^2 + y^2 = 4$; c) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$; d) $y^2 = x$?
5. Mit nevezünk kétváltozós másodfokú egyenletrendszernek?
6. Hány megoldása lehet a kétváltozós másodfokú egyenletrendszernek?
7. Nevezzétek meg a kétváltozós másodfokú egyenletrendszer főbb megoldási módszereit!

Oldjuk meg együtt!

1. Oldjátok meg az egyenletrendszereket:

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 61, \\ x^2 - y^2 = 11; \end{cases}$ b) $\begin{cases} xy - x^2 = 2, \\ y^2 - xy = 3. \end{cases}$

✓ M e g o l d á s. a) Összeadva a második egyenlet megfelelő oldalait az első egyenlet megfelelő oldalaival, a $2x^2 = 72$ egyenletet kapjuk, amelynek gyökei –6 és 6. Ha ezen értékek bármelyikét behelyettesítjük a rendszer második egyenletébe, akkor a $36 - y^2 = 11$ egyenletet kapjuk. Ennek az egyenletnek a gyökei: –5 és 5. Vagyis a rendszernek négy megoldása van: (6; 5), (–6; –5), (–6; 5) és (6; –5).

b) Az első egyenletet tagonként kivonjuk a másodikból:

$y^2 - 2xy + x^2 = 1$ vagy $(y - x)^2 = 1$.

Innen $y - x = 1$ vagy $y - x = -1$.

Ha $y - x = 1$, akkor $y = x + 1$. Az első $xy - x^2 = 2$ egyenletben helyettesítjük az y változót az $x + 1$ kifejezéssel:

$x(x + 1) - x^2 = 2$, $x^2 + x - x^2 = 2$, $x = 2$, akkor $y = 2 + 1 = 3$.

Ha $y - x = -1$, akkor $y = x - 1$ és az első $xy - x^2 = 2$ egyenletből a következőt kapjuk: $x(x - 1) - x^2 = 2$, $x^2 - x - x^2 = 2$, $x = -2$, akkor $y = -2 - 1 = -3$.

Vagyis a rendszernek két megoldása van: (2; 3), (–2; –3).

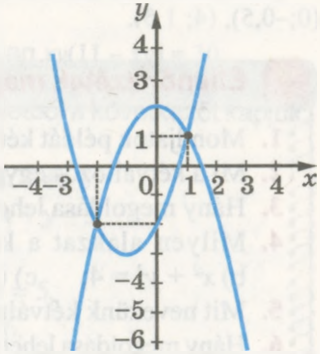
Felelet: a) (6; 5), (–6; –5), (–6; 5), (6; –5); b) (2; 3), (–2; –3).

2. Van-e megoldása az egyenletrendszernek:

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x - 2, \\ y = 2 - x^2 \, ? \end{cases}$$

✓ Megoldás. Közös koordinátarendszerben megrajzoljuk mindkét egyenlet görbéjét. A kapott parabolák két pontban metszik egymást (102. ábra). Vagyis az egyenletrendszernek két megoldása van.

Felelet. Az egyenletrendszernek két megoldása van.



102. ábra

Oldjátok meg szóban!

515. Az $x^2 - 3x = y$ egyenlet megoldásai-e az alábbi számpárok:

a) (0; 0); b) (3; 0); c) (0; 3);

d) (–3; 0); e) (0; – 3); f) (3; 3)?

516. Miért nincs megoldásuk a következő egyenleteknek:

a) $x^2 + y^2 + 4 = 0$; b) $x^2 + y^2 = 2xy - 3$?

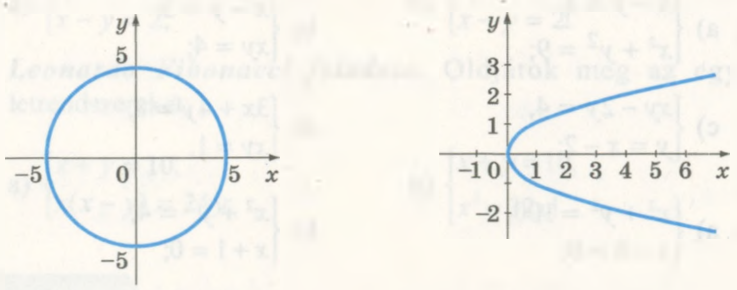
517. A (0; 2); (1; 1); (–1; 1); (–2; 0); (3; 3) számpárok megoldásai-e az egyenletrendszereknek:

a) $\begin{cases} x^2 + y = 2, \\ 2xy + y = 3; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y = 2, \\ xy + 2y = 4 \, ? \end{cases}$

518. Miért nincs megoldásuk az egyenletrendszereknek:

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 7 = 0, \\ 3xy - y^2 = 0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x^2 - y^2 = 4 \, ? \end{cases}$

519. Milyen egyenlet felel meg a 103. ábrán látható görbéknek: a) kék; b) vörös; c) kék és vörös együtt?



a b

103. ábra

A szint

520. Rajzoljátok meg az egyenletek görbéit:

a) $x + 2y = 0$; b) $xy = 12$; c) $x^2 + y^2 = 9$;

d) $x^2 - y = 2$; e) $y + \sqrt{x} = 1$; f) $y + 1 = (x + 1)^3$!

Tekinthetők-e függvénygörbéknek a megrajzolt grafikonok?

Oldjátok meg grafikusan az egyenletrendszereket (**521–524**)!

521. a) $\begin{cases} y + x = 1, \\ y + x^2 = 1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 8y = x^2, \\ y - \sqrt{x} = 0; \end{cases}$ c) $\begin{cases} xy = 6, \\ y + 2 = 0. \end{cases}$

522. a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 18, \\ x - y = 0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y = 1; \end{cases}$ c) $\begin{cases} xy = 16, \\ x - y = 0. \end{cases}$

523. a) $\begin{cases} y^2 = x, \\ y = x^2; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y^2 = 0, \\ y - 2 = x; \end{cases}$ c) $\begin{cases} xy - 8 = 0, \\ x^2 - y = 0. \end{cases}$

524. a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x^2 - y = 5; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 18, \\ xy = 9; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y - 2 = x. \end{cases}$

Oldjátok meg behelyettesítési módszerrel az egyenletrendszereket (525–527)!

525. a) $\begin{cases} x - y = 3, \\ x^2 + y^2 = 9; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 3, \\ xy = 4; \end{cases}$

c) $\begin{cases} xy - 2y = 4, \\ y = x - 2; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x + 4y = 8, \\ xy = 1. \end{cases}$

526. a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 100, \\ x - 6 = 0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x + 1 = 0; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y = 3, \\ xy + 2 = 0; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 16, \\ x - y = 2. \end{cases}$

527. a) $\begin{cases} 3x + y = 7, \\ x - 2y^2 = 2; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y = 8, \\ 2x^2 - y^2 = 32; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + y = 6, \\ x - y = 0; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x + y = 2. \end{cases}$

Oldjátok meg egyenlő együtthatók módszerével az egyenletrendszereket (528–529)!

528. a) $\begin{cases} x + y - xy = -23, \\ x - y + xy = 49; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + xy = 15, \\ y^2 + xy = 10; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ (x - y)(x + y) = 8; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x^2 - y^2 = 5. \end{cases}$

529. a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 41, \\ xy = 20; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + z^2 = 34, \\ xz = 15; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 - 2 = xy, \\ y^2 + 1 = xy; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y = 5xy, \\ x - y = xy. \end{cases}$

530. ***Diophantosz feladata.*** Oldjátok meg az egyenletrendszereket:

a) $\begin{cases} x + y = 10, \\ x^2 + y^2 = 68; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 20, \\ x^2 - y^2 = 80! \end{cases}$

531. ***Palermoi János feladata.*** Oldjátok meg az egyenletrendszereket:

a) $\begin{cases} xy - y = 42, \\ x - y = 2; \end{cases}$ b) $\begin{cases} xy - x = 40, \\ x - y = 2! \end{cases}$

532. ***Leonardo Fibonacci feladata.*** Oldjátok meg az egyenletrendszereket:

a) $\begin{cases} x + y = 10, \\ x(x - y) = 24y; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 10, \\ x^2 = 32y! \end{cases}$

B szint

533. Ábrázoljátok a függvénygörbéket:

a) $y^2 - x = 1$; b) $x^2 + y^2 = 9$;

c) $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 1$; d) $x^2 + y^2 - 2x = 3$;

e) $x^2 - y^2 = 0$; f) $x^2 + 1 + y^2 - 2y = 0$!

Tekinthetők-e függvénygörbéknek a grafikonok?

Oldjátok meg grafikusan az egyenletrendszereket (**534–536**)!

534. a) $\begin{cases} y = 6x - x^2 - 7, \\ y = |x| - 1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = x^2 - 2x - 1, \\ y = \frac{3}{x} + 1. \end{cases}$

535. a) $\begin{cases} y = \sqrt{x-4}, \\ 3y - x + 2 = 0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = 12. \end{cases}$

536. a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 32, \\ |x| - y = 0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 - y = 0, \\ |x| - y = 0. \end{cases}$

Oldjátok meg az egyenletrendszereket (**537–540**)!

537. a) $\begin{cases} x^2 - xy = 3{,}36, \\ 3x + y = 2; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 2, \\ 3x + y = -4; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ (x - 8)(x - 3) = 0; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 50, \\ x(y + 1) = 0. \end{cases}$

538. a) $\begin{cases} x+y=8, \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{4}{3}; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-y=0, \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{6}; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x-2y=0, \\ 5xy+y^2=44; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 4x-y=13, \\ 2x^2-xy=21. \end{cases}$

539. a) $\begin{cases} xy-x-y=7, \\ xy+x-y=13; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y+xy=5, \\ x+y-xy=4; \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{34}{15}, \\ x^2+y^2=34; \end{cases}$ d) $\begin{cases} \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=5{,}2, \\ x^2-y^2=24. \end{cases}$

540. a) $\begin{cases} x^2+2y^2=3, \\ x+y^2=2; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2+3y^2=13, \\ 2x^2+y^2=6; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2-xy=0, \\ x^2y-4y=0; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2+y^2=13, \\ xy=6. \end{cases}$

Oldjátok meg a híres matematikusok munkáiból ismert egyenletrendszereket (**541–542**)!

541. ***Al-Horezmi Algebra című művéből*** (IX. sz.):

a) $\begin{cases} x+y=10, \\ x^2=4xy; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y=10, \\ \frac{y}{x}+\frac{x}{y}=2\frac{1}{6}. \end{cases}$

542. ***Leonardo Fibonacci Az abakusz könyve című művéből*** **(1202):**

a) $\begin{cases} x+y=12, \\ \frac{xy}{x-y}=4\frac{1}{2}; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y=10, \\ \left(\frac{x}{y}+10\right)\left(\frac{y}{x}+10\right)=122\frac{2}{3}. \end{cases}$

Oldjátok meg az egyenletrendszereket (**543–545**)!

543. a) $\begin{cases} x^2-y^2=24, \\ \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{26}{5}; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2+y^2=13, \\ \frac{x}{y}-\frac{y}{x}=\frac{5}{6}; \end{cases}$

c) $\begin{cases} y^2 + x^2 - 3xy = 4, \\ y^2 - x^2 + 4x = 4; \end{cases}$ d) $\begin{cases} y^2 - 4x^2 - 4x = 1, \\ 4x^2 + y^2 + 3xy = 1. \end{cases}$

544. a) $\begin{cases} x^2 + y = 2, \\ y^2 + x = 2; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 6, \\ y^2 + 4x = 9; \end{cases}$

c) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3, \\ xy = 4; \end{cases}$ d) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5, \\ \sqrt{xy} = 6. \end{cases}$

545. a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 90, \\ x(x - 3y) = 0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} (x + y)(x - y) = 0, \\ x^2 + y^2 = 64; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2y^2 + xy = 72, \\ x + y = 6; \end{cases}$ d) $\begin{cases} (x + y)^2 - 4(x + y) = 45, \\ (x - y)^2 - 2(x + y) = 7. \end{cases}$

Oldjátok meg a változó helyettesítésének módszerével az egyenletrendszereket (**546–548**)!

546. a) $\begin{cases} 5(x + y) + 2xy = -19, \\ x + y + 3xy = -35; \end{cases}$ b) $\begin{cases} xy + x + y = 11, \\ x^2y + y^2x = 30; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 28, \\ x + y = 4; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^3y^3 = -8, \\ x^3 + y^3 = -7. \end{cases}$

547. a) $\begin{cases} 2xy - 3\frac{x}{y} = 15, \\ xy + \frac{x}{y} = 15; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{4}, \\ x^2 + y^2 = 17; \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{2}, \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{5}{4}; \end{cases}$ d) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}, \\ x^2 + y^2 = 160. \end{cases}$

548. a) $\begin{cases} x^2 + y^2 - xy = 12, \\ x^3 + y^3 = 72; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 109, \\ x^3 - y^3 = 218; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x\left(1+\frac{x}{y}\right)=1{,}5, \\ y\left(1+\frac{y}{x}\right)=6; \end{cases}$ d) $\begin{cases} xy-\frac{x}{y}=26, \\ xy-\frac{y}{x}=26. \end{cases}$

549. Határozzátok meg az a és a b számot, ha:

a) $3a+4b=8ab=8$;

b) $a^2-0{,}5b=a-b=1$;

c) $a^2+ab-5=b^2+ab=10$;

d) $a^2+b^2-6b=2a+b=0$;

e) $a^2+b-2a=a+b=-1$;

f) $3(a-2)(b+1)=a-b=3$!

550. Határozzátok meg az egyenes és a körvonal metszéspontjai közötti távolságot, ha az egyenletük $x-y=7$ és $x^2+y^2=169$!

551. Határozzátok meg két körvonal metszéspontjainak egymástól való távolságát, ha az egyenleteik $x^2+y^2=25$ és $(x-4)^2+(y-4)^2=1$!

Ismétlő gyakorlatok

552. A fény sebessége $3\cdot 10^5$ km/s. Mekkora távolságot tesz meg a fény: a) 5 s; b) 1 óra; c) 1 év alatt?

553. Határozzátok meg a törtek összegét és szorzatát:

a) $\frac{1}{2x^2+5x-3}$ és $\frac{1}{2x^2-7x+3}$;

b) $\frac{2}{6a^2-13a+6}$ és $\frac{1}{3a^2-11a+6}$!

554. Egyszerűsítsétek a törteket:

a) $\frac{2a^2-5a+2}{3a^2-3{,}5a+1}$; b) $\frac{x^2-3}{x^2-2\sqrt{3}x+3}$; c) $\frac{c^2+\sqrt{5}c-10}{c^2-3\sqrt{5}c+10}$!

14.§. FELADATOK MEGOLDÁSA EGYENLETRENDSZEREK FELÁLLÍTÁSÁVAL

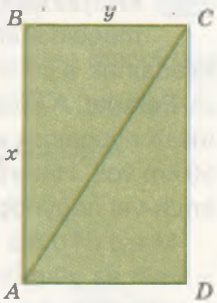
A ***feladat*** – valamely feltétel teljesítése vagy az ezzel egyenértékű kérdés megválaszolása. Az algebrafeladatok megoldása leggyakrabban valamilyen számítás, bizonyítás, átalakítás, megvizsgálás elvégzését jelenti. Amikor a feladat megoldásához modellként algebrai kifejezéseket, egyenleteket, egyenlőtlenségeket, egyenletrendszereket alkalmaznak, akkor algebrai módszerekről van szó.

A 7. osztályban megtanultátok, hogyan oldhatók meg feladatok lineáris egyenletrendszerek felállításával. Hasonló módszerrel oldják meg a másodfokú kétismeretlenes egyenletrendszerré alakítható feladatokat is.

1. feladat. Határozzátok meg a téglalap oldalainak a hosszát, tudva, hogy az átlója 10 cm, a kerülete pedig ennél 18 cm-rel hosszabb.

✓ M e g o l d á s. Jelöljük meg a téglalap keresett oldalait x és y betűkkel (104. ábra.). Átlójának négyzete ebben az esetben $x^2 + y^2$, félkerülete pedig $x + y$. Mivel az átló 10 cm, ezért a kerület 28 cm, így a következő egyenletrendszert állíthatjuk fel:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100, \\ x + y = 14. \end{cases}$$



104. ábra

A megoldás folyamata a következő:
$y = 14 - x$ és $x^2 + (14 - x)^2 = 100$,
$x^2 + 196 - 28x + x^2 = 100$,
$x^2 - 14x + 48 = 0$.
Az utóbbi egyenlet gyökei: $x_1 = 8$; $x_2 = 6$.
Ha $x = 8$, akkor $y = 6$; ha $x = 6$, akkor $y = 8$.

F e l e l e t. 8 cm és 6 cm.

2. feladat. Az egyik kerékpáros haladási sebessége 2 km/h-val nagyobb, mint a másiké, ezért a 28 km-es távot 20 perccel hamarabb teszi meg, mint a társa. Határozzátok meg mindkét kerékpáros sebességét!

✓ M e g o l d á s. Legyen a kerékpárosok (kilométer per órában mért) haladási sebessége u és v. Az első kerékpáros sebessége 2-vel nagyobb, ezért a következő egyenletet állíthatjuk fel: $u - v = 2$.

Mivel a 28 km-es távot az első biciklis $\frac{28}{u}$, míg a másik $\frac{28}{v}$ óra alatt teszi meg, miközben az első haladási ideje 20 perccel, azaz $\frac{1}{3}$ órával rövidebb, így eljutunk a második egyenlet felállításához:

$$\frac{28}{v} - \frac{28}{u} = \frac{1}{3} \text{ vagy } 84(u - v) = uv .$$

Oldjuk meg az egyenletrendszert:

$$\begin{cases} u - v = 2, \\ 84(u - v) = uv \end{cases} \text{ vagy } \begin{cases} u - v = 2, \\ 168 = uv, \end{cases}$$

ahonnan $u(u - 2) = 168$, $u^2 - 2u - 168 = 0$.

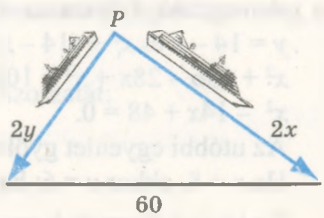
A kapott másodfokú egyenlet gyökei: $u_1 = 14$, $u_2 = -12$. A -12 nem elégíti ki a feladat feltételét. Vagyis $u = 14$, s így $v = 14 - 2 = 12$.

F e l e l e t: 14 km/h és 12 km/h.

A paraméteres feladatok megoldásánál a feleletet változós kifejezések alakjában kapjuk. Az ilyen feladat teljes megoldásához elemzéssel juthatunk el: meg kell jelölni, hogy a feladatnak a paraméterek mely értéke mellett van megoldása és hány.

Feladat. A kikötőből egyidejűleg két hajó futott ki: az egyik délnek, a másik nyugatnak vette az irányt. A közöttük lévő távolság 2 óra elteltével 60 km volt. Határozzátok meg a hajók sebességét, ha az első hajó a km/h-val nagyobb sebességgel haladt, mint a második!

M e g o l d á s. Legyen a hajók haladási sebessége rendre x km/h és y km/h. 2 óra alatt egymásra merőleges irányban rendre $2x$ és $2y$ km-t tettek meg (105. ábra). Pithagorasz tétele szerint $4x^2 + 4y^2 = 60^2$ vagy $x^2 + y^2 = 900$. Ezenkívül $x - y = a$. A következő egyenletrendszert kapjuk:



105. ábra

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 900, \\ x - y = a. \end{cases}$$

A megoldása során a második egyenletből meghatározzuk: $x = y + a$. Ezt az értéket az első egyenletbe behelyettesítve a következőket kapjuk:

$$(y + a)^2 + y^2 = 900, \quad 2y^2 + 2ay + a^2 - 900 = 0.$$

Megoldjuk az y-ra vonatkozóan az utóbbi másodfokú egyenletet:

$$y = \frac{-a \pm \sqrt{1800 - a^2}}{2}.$$

Mivel a feladat feltételének megfelelően az a és y pozitív, csak egy eset lehetséges:

$$y = \frac{\sqrt{1800 - a^2} - a}{2}.$$

Ekkor teljesülniük kell a következő feltételeknek:

$$\begin{cases} a > 0, \\ 1800 - a^2 \geq 0, \\ \sqrt{1800 - a^2} > a \end{cases} \quad \text{vagy} \quad \begin{cases} a > 0, \\ -30\sqrt{2} \leq a \leq 30\sqrt{2}, \\ -30 < a < 30. \end{cases}$$

Vagyis a feladatot csak az y változó egy értéke elégíti ki:

$$y = 0{,}5(\sqrt{1800 - a^2} + a), \text{ ha } 0 < a < 30.$$

Ebben az esetben $x = y + a = 0{,}5\,(\sqrt{1800 - a^2} + a)$.

F e l e l e t. Ha $0 < a < 30$, akkor a feladatnak egyetlen megoldása van: $0{,}5\,(\sqrt{1800 - a^2} + a)$ km/h és $0{,}5\,(\sqrt{1800 - a^2} - a)$ km/h. Ha $a \leq 0$ vagy $a \geq 30$, akkor a feladatnak nincs megoldása.

Ellenőrizzétek magatokat!

1. Hogyan fogalmazható meg a feladat?
2. Milyen feladatok fordulnak elő?
3. Állítsatok össze különböző modelleket a következő feladat megoldásához: *„Határozzátok meg azt a két számot, amelyek összege 15, a szorzata pedig 56!"*

Oldjuk meg együtt!

1. feladat. Határozzátok meg azt a kétjegyű számot, amely 4-szer nagyobb, mint számjegyeinek az összege és 3-szor nagyobb, mint a szorzatuk!

✓ M e g o l d á s. Jelöljük a tízeseket és egyeseket x és y betűkkel. Ekkor a keresett szám: $10x + y$. Mivel ez 4-szer nagyobb, mint a számjegyek összege, ezért $10x + y = 4(x + y)$, ahonnan $6x = 3y$ vagy $2x = y$.

A $10x + y$ szám háromszor nagyobb a számjegyek szorzatánál, ezért $10x + y = 3xy$. Megoldjuk az egyenletrendszert:

$$\begin{cases} 2x = y, \\ 10x + y = 3xy. \end{cases}$$

Behelyettesítjük az y-t a második egyenletbe:

$10x + 2x = 3x \cdot 2x$, $12x = 6x^2$, ahonnan $x = 0$ vagy $x = 2$.

A kétjegyű szám első számjegye nem 0. Ezért $x = 2$, és így $y = 2x = 4$.

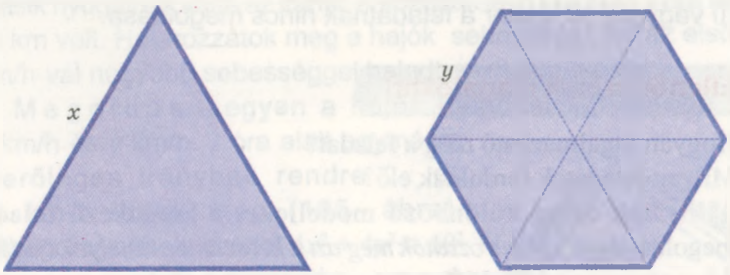
E l l e n ő r z é s. $24 = 4(2 + 4)$ és $24 = 3 \cdot 2 \cdot 4$.

Megjegyzés. Mivel itt x és y természetes számok, s megtudva, hogy $y = 2x$, tovább nem kell folytatni a rendszer megoldását, hanem ki kell próbálni a 12, 24, 36, és 48 számokat. Közülük a feladatot csak a 24-es szám elégíti ki.

F e l e l e t. A 24-es szám.

2. feladat. A szabályos háromszögnek és a szabályos hatszögnek egyenlő a kerülete, míg területük összege $\sqrt{3}$ m^2. Határozzátok meg a sokszögek oldalainak hosszát!

✓ M e g o l d á s. Legyen a háromszög és a hatszög keresett oldala x és y (106. ábra). Mivel az alakzatok kerületei egyenlők, ezért $3x = 6y$, ahonnan $x = 2y$.



106. ábra

Az x oldalú szabályos háromszög területe $\frac{x^2\sqrt{3}}{4}$. Mivel a szabályos hatszög hat y oldalú szabályos háromszögből áll, ezért a területe $6 \cdot \frac{y^2\sqrt{3}}{4}$.

A következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{cases} x=2y, \\ \frac{x^2\sqrt{3}}{4}+\frac{y^2\cdot 6\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3} \end{cases} \text{ vagy } \begin{cases} x=2y, \\ x^2+6y^2=4. \end{cases}$$

Behelyettesítjük a rendszer második egyenletébe az $x = 2y$ értéket. A következő egyenletet kapjuk: $10y^2 = 4$, ahonnan $y^2 = 0{,}4$, s az $y = 2\sqrt{0{,}1}$. Ekkor $x = 4\sqrt{0{,}1}$.

Felelet. $4\sqrt{0{,}1}$ m és $2\sqrt{0{,}1}$ m.

Oldjátok meg szóban!

555. Állítsatok össze feladatokat, amelyek matematikai modelljei a következő egyenletrendszerek lehetnek:

a) $\begin{cases} x+y=5, \\ xy=6; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y=3, \\ xy=40; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y=7, \\ x^2+y^2=25. \end{cases}$

A szint

556. Határozzatok meg két olyan számot, amelyeknek az összege 21, a szorzata pedig 90!

557. Határozzatok meg két olyan számot, amelyeknek a különbsége 1,1, a szorzata pedig 0,6!

558. Határozzatok meg két olyan számot, amelyeknek az összege 31, négyzeteik összege pedig 625!

559. Két szám mértani közepárányosa 3. Határozzátok meg ezeket a számokat, ha egyikük 9,1-del nagyobb a másiknál!

560. A derékszögű háromszög kerülete 90 cm, míg az átfogója 41 cm. Határozzátok meg a befogóit!

561. Határozzatok meg két számot, tudva, hogy:

a) a különbségük 2, négyzeteik különbsége pedig 88;

b) a félösszegük 9,5, négyzeteik összege pedig 185;

c) az összegük 20, szorzatuk pedig 84!

562. Határozzátok meg a derékszögű háromszög befogóit, amelynek:

a) az átfogója 13 dm, a területe pedig 30 dm^2;

b) a kerülete 30 cm, befogóik összege pedig 17 cm;

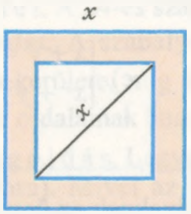
c) az átfogója 17 cm, a kerülete 40 cm!

» **563.** Határozzátok meg annak a téglalapnak az oldalait, amelyiknek az átlója 10 m, a területe 48 m^2!

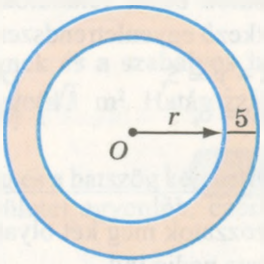
564. Határozzátok meg annak a derékszögű háromszögnek a befogóit, ha ezek egyike 2 cm-rel, a másika pedig 25 cm-rel kisebb az átfogójánál!

565. A keret belső és külső kontúrja – négyzetek. Ezek egyikének oldala a másik átlójával egyenlő (107. ábra). Határozzátok meg a négyzetek oldalait, ha a keret területe 32 cm^2!

» **566.** Határozzátok meg a kör belső és külső sugarát, ha a különbségük 5 cm, a kör területe pedig 125π cm^2 (108. ábra)!



107. ábra



108. ábra

567. Határozzátok meg a derékszögű paralelepipedon éleinek hosszát, ha ezek egyikének hossza a paralelepipedon felszínének a területe és térfogata rendre 8 cm, 158 cm^2 és 120 cm^3!

568. Két kombájnkezelő egyike 24 órával hamarabb aratja le egy területről a búzát, mint a másik. Ha a kombájnkezelők együtt dolgoznak, akkor 35 óra alatt fejezik be az aratást. Mennyi idő alatt tudja a két kombájnkezelő külön-külön learatni a búzát?

» **569.** ***Lucas Pacciolo feladata.*** Két szám négyzeteinek az összege 20, a szorzata 8. Határozzátok meg a számokat!

570. A közönséges (tovább már nem egyszerűsíthető) tört számlálója 3-mal kisebb a nevezőjénél, de ha mindkét tagjához hozzáadunk 10-et, akkor a tört értéke kétszeresére nő. Melyik ez a tört?

B szint

571. Egy automata gép egyforma munkadarabokat készít. Ha percenként egy darabbal többet állítana elő, akkor 720 munkadarabot 1 órával hamarabb gyártana le. Hány munkadarabot termel az automata egy óra alatt?

572. Az üzemnek megrendelésre 150 személygépkocsit kellett volna legyártania néhány nap alatt. De a betervezett mennyiségnél naponta két autóval többet gyártva a határidő lejárta előtt két nappal nem csak a megrendelést teljesítette teljes egészében, hanem 6 gépkocsit pótlólagosan is legyártott. Hány nap alatt kellett volna teljesítenie az üzemnek a megrendelést?

573. A gyárnak néhány nap alatt kellett egy szállítmány munkapadot elkészítenie. A napi feladatot 9 munkapaddal túlteljesítve, a határidő lejárta előtt 3 nappal 588 munkapadot gyártott le, ami a megrendelés 98%-a. Hány munkapadot készített naponta a gyár?

574. A favágó brigádnak néhány nap alatt 216 m^3 fát kellett készleteznie. Az első három nap alatt a brigád az ütemtervnek megfelelően dolgozott, majd ezt követően napi 8 m^3-rel több fát vágott ki a tervezettnél, ezért a határidő lejárta előtt egy nappal 232 m^3 mennyiséggel készült el. Hány köbméter fát vágott ki naponta a brigád?

575* Az egyik csövön keresztül 36 perccel hamarabb megtölthető vízzel a medence, mint a másikon. Ha a medence felét az egyik csőből töltik meg, a másik felét pedig a másodikból, akkor a medence egy fél órával később töltődik fel, mintha mindkét csőből egyszerre történne a feltöltés. Hány perc alatt töltenék meg a medencét a csövek külön-külön?

576. ***Feladat a francia kadétiskolák Matematika tankönyvéből*** (1813). A derékszögű háromszög oldalainak összege 156 m, a területe 1014 m^2. Határozzátok meg a háromszög oldalait!

577. A vonatnak 4 óra alatt kellett volna megtennie az A és a B állomás közötti távolságot. Az A állomástól 150 km-re azonban 20 percre feltartották. Hogy a menetrendnek megfelelő időben érhessen B állomásra, a vonat a hátralévő útszakaszt korábbi sebességénél 15 km/h-val gyorsabban tette meg. Határozzátok meg az A és B közötti távolságot!

578. A motorkerékpáros 5 óra alatt ért a faluból a városba. Visszafelé a faluba az első 36 km-t ugyanolyan sebességgel tette meg, a táv fennmaradó, nagyobb részét ennél 3 km/h-val nagyobb haladási sebességgel. Ezért a visszaúton a motoros 15 perccel kevesebbet töltött. Milyen sebességgel haladt a motoros a városba?

579. Az A és B település közötti út emelkedőből és lejtőből áll. A kerékpáros, aki a lejtőn 6 km/h-val nagyobb sebességgel haladt, mint az emelkedőn, az A és B közötti távot 2 óra 40 perc alatt, a B és A közötti távolságot 20 perccel gyorsabban teszi meg. Határozzátok meg a kerékpáros sebességét az emelkedőn és a lejtőn, az emelkedő hosszát A-tól B-ig, ha a távolság A-tól B-ig 36 km!

580. A hajó 9 óra alatt 100 km-t tesz meg a vízfolyással azonos irányban és 64 km-t a vízfolyással szemben. Egy másik alkalommal a hajó a vízfolyás irányában 80 km-t és azzal szemben is 80 km-t tett meg. Határozzátok meg a hajó sebességét állóvízben és a vízfolyás sebességét!

581. Az egyik repülőgép sebessége 100 km/h-val nagyobb, mint a másiké. Ezért az első a 980 km távolságot 0,4 órával hosszabb idő alatt teszi meg, mint a másik a 600 km-es távot. Határozzátok meg a repülőgépek sebességét!

582. Az A kikötőből a komp a vízfolyás irányában indult el. A hajó 3 órával később indult ki az A kikötőtől 60 km-re lévő B kikötőből, és a komppal való találkozás után 1 órával futott be A kikötőbe. Határozzátok meg a vízfolyás sebességét, ha a hajó állóvízben 24 km/h sebességgel halad!

583. A faluból egy kerékpáros elindult a 20 km-re lévő városba, majd őt 15 perc múlva egy másik kerékpáros követte. Az első kerékpárost utolérve visszafordult, és 45 perccel hamarabb tért vissza a faluba, mint ahogy az első kerékpáros megérkezett a városba. Határozzátok meg az első kerékpáros sebességét, ha a második 15 km/h sebességgel haladt!

584. Az A helységből egyszerre és egy irányban két kerékpáros indult útnak rendre 18 km/h és 24 km/ sebességgel. Egy órával később egy autó indult a nyomukban, amely az első kerékpáros után a másodikat 10 perc múlva érte be. Határozzátok meg az autó sebességét!

585. Az egymástól 90 km-re lévő A pontból B pontba 12 km/h sebességgel indult el egy kerékpáros. Fél óra múlva az A pontból B pontba elindult egy 15 km/h sebességgel haladó másik kerékpáros. Ezzel egyidejűleg a B-ből az A pontba egy motorkerékpáros indult útnak, aki először az első kerékpárossal, majd 2 perc múlva a másodikkal találkozott. Határozzátok meg a motorkerékpáros sebességét!

Ismétlő gyakorlatok

586. Egymásra merőleges két útvonalon egy kerékpáros és egy motorkerékpáros indult el a kereszteződés irányában $\frac{1}{3}$ km/perc és 1 km/perc sebességgel. Valamely időpontban a kerékpáros 8 km távolságra volt a kereszteződéstől, a motorkerékpáros pedig 15 km-re. Ettől az időponttól számítva hány perc múlva lesz 5 km a közöttük lévő távolság?

587. Bizonyítsátok be, hogy a változó bármely értéke mellett a kifejezés csak nemnegatív értékeket vesz fel:

a) $9x^2 + 12x + 4$; b) $0{,}01y^4 - y^2 + 25$!

Bizonyítsátok be az azonosságot (**588–589**)!

588. $4a^4 + 1 = (2a^2 - 2a + 1)(2a^2 + 2a + 1)$.

589. $a^4 + a^2 + 1 = (a^2 - a + 1)(a^2 + a + 1)$.

Egyszerűsítsétek a kifejezéseket (**590–591**)!

590. $\frac{1}{(a+c)^2} + \frac{1}{a^2-c^2} - \frac{1}{(a-c)^2}$.

591. $\frac{a+2c}{3a-3c} - \frac{3c-a}{2a-2c} + \frac{a^2-c^2}{(a-c)^2}$.

592. Az asztalon egy sorban négy alakzat fekszik: háromszög, kör, hatszög és rombusz. Ezek különböző színűre vannak festve: vörösre, kékre, sárgára és zöldre. Ismeretes, hogy a sárga alakzattól balra a rombusz fekszik, a kör a háromszögtől és rombusztól jobbra, a vörös alakzat pedig a kék és a sárga között helyezkedik el, a háromszög nem a szélen található, a kék és a sárga alakzat nem egymás mellett vannak. Határozzátok meg, milyen sorrendben helyezkednek el az alakzatok, és milyen a színük!

OLDJÁTOK MEG ÖNÁLLÓAN A FELADATOKAT!

I. változat

1°. Rajzoljátok meg a függvénygörbéket: a) $y = -x^2$; b) $y = 2 + \sqrt{x}$!

2°. Oldjátok meg az $x^2 - 2x < 0$ egyenlőtlenséget!

3•. A téglalap területe 180 cm^2, a kerülete 54 cm. Határozzátok meg a téglalap oldalainak hosszát!

4•. Rajzoljátok meg az $y = x^2 - 2x - 3$ függvény görbéjét és elemezzétek azt!

II. változat

1°. Rajzoljátok meg a függvénygörbéket: a) $y = -\sqrt{x}$; b) $y = x^2 - 4$!

2°. Oldjátok meg a $2x - x^2 > 0$ egyenlőtlenséget!

3•. A derékszögű háromszög átfogója 61 cm. Határozzátok meg a háromszög befogóit, ha a területe 330 cm^2!

4•. Rajzoljátok meg az $y = x^2 + 2x - 3$ függvény görbéjét és elemezzétek azt!

III. változat

1°. Rajzoljátok meg a függvénygörbéket: a) $y = x^{-1}$; b) $y = x^2 + 2$!

2°. Oldjátok meg az $x^2 + 3x \leq 0$ egyenlőtlenséget!

3•. Két négyzet területeinek összege 65 m^2, kerületeik összege pedig 44 m. Határozzátok meg a négyzetek oldalait!

4•. Rajzoljátok meg az $y = 4x - x^2$ függvény görbéjét és elemezzétek azt!

IV. változat

1°. Rajzoljátok meg a függvénygörbéket: a) $y = -x^3$; b) $y = 4 - x^2$!

2°. Oldjátok meg az $x^2 - 4x \geq 0$ egyenlőtlenséget!

3•. A téglalap területe 120 cm^2, kerülete pedig 46 cm. Határozzátok meg a téglalap oldalait és átlóját!

4•. Rajzoljátok meg az $y = x^2 - 5x + 4$ függvény görbéjét és elemezzétek azt!

A FEJEZET TARTALMÁNAK ÖSSZEFOGLALÁSA

Függvénynek nevezzük azt a hozzárendelést, amely valamely D halmaz minden x változójához csakis egy y változót rendel hozzá. A D halmazt a függvény *értelmezési tartományának*, az y összes értékének halmazát, amelyeket a függvény felvehet, a függvény *értékkészletének* nevezzük. Ha y az x függvénye, akkor ennek jelölése: $y = f(x)$.

Az $y = ax^2 + bx + c$ másodfokú függvény.

Az $y = ax^2 + bx + c$, $y = ax^2 + bx$ és az $y = ax^2$ egymást párhuzamos eltolással helyettesíthető egyforma parabolák.

A *függvény zérushelyei* a független változó azon értékei, amelyek mellett a függvény értéke nulla.

Az $y = f(x)$ függvényt *párosnak* nevezzük, ha értelmezési tartománya szimmetrikus a nullához viszonyítva és az $f(-x) = f(x)$ értelmezési tartományából vett minden értékére nézve.

Az $y = f(x)$ függvényt *páratlannak* nevezzük, ha értelmezési tartománya szimmetrikus a nullához viszonyítva és az $f(-x) = -f(x)$ értelmezési tartományából vett minden értékére nézve.

Léteznek olyan függvények, amelyek se nem párosak és se nem páratlanok.

A függvényt valamely intervallumon *növekvőnek* (*csökkenőnek*) nevezzük, ha az ezen intervallumhoz tartozó független változó minden nagyobb értékének a függvény nagyobb (kisebb) értéke felel meg.

Másodfokú egyenlőtlenségnek nevezzük az $ax^2 + bx + c * 0$ kifejezést, ahol a, b, c adott számok, az x változó, a $*$ pedig a $<$, $>$, $\leq$, $\geq$ relációs jelek valamelyike. Az ilyen egyenlőtlenség megoldásánál célszerű figyelembe venni az $y = ax^2 + bx + c$ függvény görbéjének az x- tengelyhez viszonyított elhelyezkedését.

Kétváltozós másodfokú egyenletrendszernek nevezzük azt a rendszert, amelynek egyik egyenlete kétváltozós másodfokú, a másik pedig ugyanezeket a változókat tartalmazó másod- vagy elsőfokú egyenlet.

Az ilyen rendszerek megoldásának főbb módszerei: behelyettesítés, egyenlő együtthatók módszere és grafikus módszer.

MATEMATIKATÖRTÉNET

A ***függvény*** a modern matematika egyik legfontosabb fogalma. A fejlesztése és gazdagítása hosszú ideig tartott. A négyzet- és köbtáblázatok számításával már négyezer évvel ezelőtt foglalkoztak a babiloni tudósok. Ez pedig nem más, mint függvények megadása táblázattal. Archimédesz meghatározta a kör területe, a gömb felülete és a sugaruk közötti összefüggést. Az $S = \pi r^2$ és az $S = 4\pi r^2$ egyenlőségeket függvények adják meg. Descartes a különböző függvények grafikus ábrázolásához koordináta-rendszert használt. A függvény szakkifejezést először Leibniz német matematikus (1646–1716) vezette be. A függvények általános megjelölésére alkalmazott $f(x)$ és $y = f(x)$ jelöléseket **Euler** svájci matematikus rendszeresítette 1734-ben.



Leonard Euler (1707–1783)

A függvény szó bevezetését követően a megfelelő fogalom jelentős változáson ment át. Leibniz függvényeknek olyan szakaszhosszakat nevezett, amelyek más szakaszok hosszváltozásaitól függően változtak.

Euler a változóból és számokból álló kifejezést nevezte függvénynek. Például a $3x + 5$ az x függvénye, mivel a kifejezés értéke az x értékeitől függ. Bolzano cseh matematikus (1781–1848) még jobban bővítette a függvény fogalmát, ő a függvényen ugyanis egy mennyiségnek valamely más mennyiségtől való bármilyen függését értette. Később a matematikusok többsége függvényen függő változó mennyiséget, mások számhalmazok közötti megfeleltetést vagy tetszőleges halmazok közötti arányokat értettek.

A függvény legkorszerűbb meghatározását a XX. században az N. Bourbaki álnéven publikáló matematikusok csoportja javasolta: „A függvény – olyan viszony, amely mellett az indulási

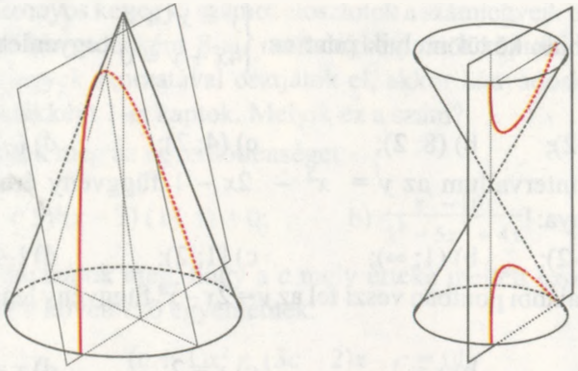
tartomány minden egyes elemének az érkezési tartomány pontosan egy eleme felel meg." A függvény indulási tartományán (értelmezési tartomány) és megérkezési tartományán (értékkészletének) nem csak számhalmazokat, hanem bármilyen halmazt értenek.

Láthatjuk, hogy a függvény szóval a különböző korokban hol szakaszhosszat, hol változós kifejezést, hol változó mennyiséget, hol pedig mennyiségek közötti függést, mennyiségek értékei közötti megfelelést, két halmaz elemei közötti viszonyt jelölték.

Az általános iskola osztályaiban csak a függvények legfontosabb és legegyszerűbb példáit vizsgálják. Később megismerkedtek a függvények egyéb kategóriáival: a hatványkitevős, logaritmus és trigonometrikus függvényekkel. A tudósok kutatják a két-, három- és többváltozós függvényeket.

A parabola, hiperbola kifejezéseket Apollóniusz ókori görög matematikus (i. e. III. sz.) vezette be. Ezeket a görbéket ő kúpfelület és sík metszésvonalának (kupszeletek) tekintette.

A modern matematikában sokféle függvénytípust vizsgálnak. Ezeket részletesen a matematika különböző ágazatai kutatják, köztük a matematikai analízis és a függvényelmélet. Ezeken a tudományterületeken olyan ukrán tudósok is tevékenykedtek, mint M. V. Osztrogradszkij, M. P. Kravcsuk, Sz. N. Bernstein, J. J. Remez és mások.



FELKÉSZÜLÉS A TÉMAISMERETI ÉRTÉKELÉSRE

2. sz. tesztfeladat

1. Melyik függvénynek R az értelmezési tartománya:

a) $y = \sqrt{x+1}$; b) $y = 2x^{-1}$; c) $y = -x^2$; d) $y = x^{\frac{1}{2}}$?

2. Melyik páros az alábbi függvények közül:

a) $y = \sqrt{x}$; b) $y = 2x$; c) $y = 3x^2$; d) $(x-2)^2$?

3. Melyik függvény növekvő a $(0; \infty)$ intervallumon:

a) $y = -5x$; b) $y = 2 - x^2$; c) $y = 3x^{-1}$; d) $y = \sqrt{x} - 1$?

4. Hány zérushelye van az $y = x(x^2 + 2)(x + 4)$ függvénynek:

a) egy; b) kettő; c) három; d) négy?

5. Melyik parabola az alábbi függvénygörbék közül:

a) $y = x^{-2}$; b) $y = x - 3x^2$; c) $y = 2x$; d) $y = \sqrt{x}$?

6. Melyik az $x^2 + 2x + 3 > 2$ egyenlőtlenség megoldása a következő intervallumok közül:

a) $(-\infty; -3)$; b) $(-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$; c) $(1; 2)$; d) $\boldsymbol{R}$?

7. Melyik függvénygörbe szimmetrikus a $(0; 0)$ ponthoz viszonyítva:

a) $y = x^{-2}$; b) $y = 3x^2$; c) $y = 2x$; d) $y = \sqrt{x}$?

8. Az alábbiak közül melyik pont az $\begin{cases} y = x^2 + 4, \\ 4x + y = 0 \end{cases}$ egyenletrendszer megoldása:

a) $(-8; -2)$; b) $(8; 2)$; c) $(4; 2)$; d) $(-2; 8)$?

9. Melyik intervallum az $y = x^2 - 2x - 1$ függvény értelmezési tartománya:

a) $(-\infty; -2)$; b) $(1; \infty)$; c) $[1; 2)$; d) $[-2; \infty)$?

10. Melyik alábbi pontban veszi fel az $y = 2x - x^2$ függvény legnagyobb értékét:

a) $x = 0$; b) $x = 1$; c) $x = 2$; d) $x = -2$?

Típusfeladatok a 2. sz. dolgozathoz

1°. Rajzoljátok meg az $y = 2x + 3$ függvény görbéjét! Határozzátok meg az értelmezési tartományát és az értékkészletét! Állapítsátok meg a függvény zérushelyeit és a stabil előjel intervallumát!

2°. A függvény az $f(x) = (2x + 3)^2$ képlettel van megadva. Határozzátok meg:

a°) $f(0)$; b) $f(-4)$; c) $f(3{,}5)$!

3. Rajzoljátok meg és vizsgáljátok meg a függvények tulajdonságait:

a°) $y = -x^2 + 1$; b•) $y = (x + 1)^2 - 4$!

4. Oldjátok meg az egyenlőtlenségeket:

a°) $(x + 5)(x - 3) > 0$; b•) $-5x^2 + 3x + 2 \leq 0$!

5•. Rajzoljátok meg a függvénygörbéket:

a) $y = x^2 + 4x + 3$; b) $y = |6x - x^2 - 5|$!

6. Oldjátok meg grafikusan az egyenletrendszereket:

a°) $\begin{cases} x^2 + y = 1, \\ x - y + 1 = 0; \end{cases}$ b•) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4 = 0, \\ x^2 - y + 2 = 0! \end{cases}$

7•. Oldjátok meg az egyenletrendszereket:

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17, \\ 3x - y + 1 = 0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 - xy - 3 = 0, \\ x^2 - xy + 2 = 0! \end{cases}$

8•. Ha bizonyos kétjegyű számot elosztotok a számjegyeik összegével, akkor hányadosként 8-at, maradékként 5-öt kaptok, s ha azt a számjegyek szorzatával osztjátok el, akkor hányadosként 10-et, maradékként 1-et kaptok. Melyik ez a szám?

9••. Oldjátok meg az egyenlőtlenséget:

a) $(x + 5)^2(x - 3)(1 + x) > 0$; b) $\frac{x^3 - 16x}{x^3 - 5x^2 + 4x}$!

10••. Határozzátok meg, hogy a c mely értéke mellett lesz két valós gyöke a következő egyenletnek:

$$(c + 1)x^2 + (3c - 2)x - c = 0!$$

3. FEJEZET

AZ ALKALMAZOTT MATEMATIKA ELEMEI

A matematika az anyag mozgásának valamennyi fajtáját vizsgálhatja.

A. M. Kolmogorov



Alkalmazott matematikának nevezzük a matematikának azt az ágát, amely az emberi tevékenység során felvetődő feladatok megoldásával foglalkozik.

Ebben a részben az alkalmazott matematika legegyszerűbb és legfontosabb témái kapnak helyet.

A fejezet fő témái:

- **matematikai modellezés;**
- **százalékszámítások;**
- **közelítő számítások;**
- **véletlen események és valószínűségek;**
- **statisztikai ismeretek.**

15.§. MATEMATIKAI MODELLEZÉS

Matematikai módszerekkel oldunk meg nemcsak számokkal, mértani alakzatokkal, egyenletekkel, függvényekkel kapcsolatos elvont matematikai feladatokat, hanem sok más problémát is. Alkalmazott ***matematikai feladatokról*** beszélünk akkor is, ha azok nem matematikai fogalmakról szólnak. Ezek megoldásához először a ***matematikai modelljüket*** készítik el.

1. feladat. Határozzátok meg a 67 cm széles és 125 cm hosszú asztal felületét!

✓ M e g o l d á s. Az asztal felülete téglalap alakú. A téglalap területét úgy számítjuk ki, hogy a szélességét megszorozzuk a hosszával. Tehát a keresett terület $S = 125 \cdot 67 = 8375$ (cm^2).

Felelet: $S = 84$ dm^2.

Ez alkalmazott matematikai feladat, mert az asztal nem matematikai fogalom. A feladat megoldásakor az asztal felületét téglalappal helyettesítettük.

2. feladat. Egy edényben 10,5 kg 40 százalékos kénsav található. Mennyi 75 százalékos kénsavat kell önteni hozzá, hogy 50 százalékos oldatot kapjunk?

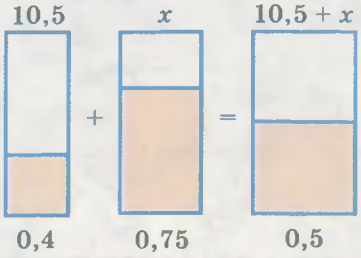
✓ M e g o l d á s. Eredetileg $0{,}4 \cdot 10{,}5$ kg tiszta kénsavunk volt (109. ábra). Ha ehhez a mennyiséghez x kg 75 százalékos kénsavoldatot öntünk, akkor a tiszta kénsav tömege $0{,}75x$ kg-mal nő. Eredményül $(10{,}5 + x)$ kg

50 százalékos oldatot, vagyis $0{,}5(10{,}5 + x)$ kg tiszta kénsavat kapunk. A következő egyenletet kapjuk:

$$0{,}4 \cdot 10{,}5 + 0{,}75x = 0{,}5 \cdot (10{,}5 + x). \qquad (*)$$

Az egyenlet gyöke: $x = 4{,}2$.

F e l e l e t: 4,2 kg.



109. ábra

A 2. feladat megint alkalmazott matematikai jellegű, mert a kénsav nem matematikai fogalom. A (*) jellel jelölt egyenlet az adott feladat matematikai modellje.

A *modell* speciálisan elkészített objektum, amely tükrözi az eredeti tárgy tulajdonságait (fr. *modéle* – másolat, mintadarab). A repülőgép, a hajó, a gépkocsi makettek mind fizikai modellek.

A ***matematikai modell*** matematikai összefüggések rendszere, amely megközelítőleg, elvont formában írja le a vizsgált objektumot, folyamatot vagy jelenséget.

A matematikai modelleket matematikai fogalmakból és összefüggésekből – mértani alakzatokból, számokból, kifejezésekből – alkotják. Leggyakrabban függvények, egyenletek, egyenlőtlenségek vagy ezek rendszerei képezik a matematikai modelleket.

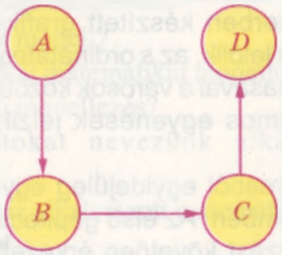
A matematikai modell megépítését és alkalmazását konkrét feladatok megoldására ***matematikai modellezésnek*** nevezzük.

Az alkalmazott feladatokat három lépésben oldjuk meg:

1. elkészítjük a feladat matematikai modelljét;
2. megoldjuk a megfelelő matematikai feladatokat;
3. elemezzük a választ.

Ezeket a lépéseket a 110. ábra vázolja. A – az adott alkalmazott feladat, B – a feladat matematikai modellje, C – a modell eredménye, D – az adott alkalmazott feladatra adott választ. Az A és B közötti lépés

a modellezés folyamata, a megfelelő modell felállításához nem elegendő csak a matematikai tudás, hanem ismerni kell a gazdaságnak azt az ágazatát is, ahol alkalmazni szeretnénk a feladatmegoldást. Ha a modell hibás, akkor az eredmény is helytelen lesz. Például, ha a 2. feladatban nem 10,5 kg kénsav van megadva, hanem 10,5 l. Ha a tanuló e feladat esetére is a (*) egyenletet állítja fel, és eredményként 4,2 l kap, akkor durva hibát követ el (miért?).



110. ábra

Nagyon fontos az utolsó lépés is: az eredmény értékelése. Az absztrahált *B* feladat *C* eredménye nem feltétlenül elégíti ki az adott *A* feladatot, vagy csak részben. A *C* eredmény lehet a *B* feladat pontos eredménye is, de az *A* feladatnak majdnem mindig csak közelítő felelete. Ezért azt a közelítő számítások szabályainak megfelelően kell megadni (lásd 175. old).

Megvizsgálunk még egy példát.

3. feladat. Elegendő-e egymillió liter víz úszóverseny megrendezéséhez egy vízszintes fenekű, téglalap alakú, 100 m hosszú és 25 m széles medencében?

✓ Megoldás. **I. A feladat matematikai modelljének megalkotása.** A vízszintes fenekű medencében lévő víz téglatest alakját ölti, ami az adott feladat esetében a valós objektum matematikai modellje. A téglatest egyik éle a víz magasságának felel meg (*a* a keresett érték), a többi él a medence hossza (*b*) és szélessége (*c*).

II. Matematikai feladat megoldása. $V = a \cdot b \cdot c$ az *a*, *b*, *c* méretű téglatest térfogata. A feladat feltételeinek megfelelően:

$b = 100$ m, $c = 25$ m; $V = 1\,000\,000$ l $= 1\,000\,000$ dm^3 $= 1\,000$ m^3.

A következőt kapjuk: $1000 = a \cdot 100 \cdot 25$, ahonnan $a = \frac{1000}{2500} = 0{,}4$ (m).

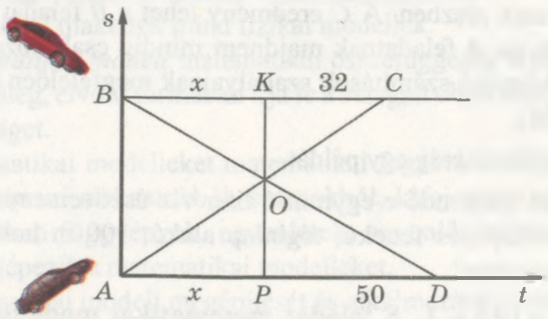
III. A felelet elemzése. Az úszóversenyhez túlságosan kevés a 0,4 m vízmélység. Vagyis 1 000 000 l víz ebben az esetben nem elegendő a medencében az úszóverseny lebonyolításához.

F e l e l e t. Nem elegendő.

A mozgással kapcsolatos sok feladat megoldása szempontjából a legcélszerűbb matematikai modellek a Descartes-féle koordináta-rendszerben készített grafikonok. A t abszcisszatengelyen a mozgásidőt jelölik, az s ordinátatengelyen pedig a megtett távolságot. Az idő változásával a városok közötti távolság nem változik, ezt a tényt a párhuzamos egyenesek jelzik. Tekintsük az alábbi feladatot.

Feladat. A és B városból egyidejűleg egy-egy személygépkocsi indult el egymással szemben. Az első gépkocsi B városba 32 perccel a másikkal való találkozást követően érkezett meg, míg a második autó A városba a találkozás után 50 perccel futott be. Indulásuk után hány perc múlva találkoztak?

✓ M e g o l d á s. Legyen AC és BD a két gépkocsi mozgásgrafikonja (111. ábra). Ha a találkozásig mindkettő x percet volt úton, azaz $AP = BK = x$, akkor $KC = 32$, $PD = 50$.



111. ábra

Az $AOP\Delta \sim COK\Delta$ és a $POD\Delta \sim KOB\Delta$, ezért

$$\frac{AP}{KC} = \frac{OP}{OK} = \frac{PD}{BK}.$$

Tehát $\frac{x}{32} = \frac{50}{x}$, ahonnan $x = 40$.

F e l e l e t: 40 perc.

Ennek a feladatnak matematikai modelljei a 111. ábrán látható grafikonrendszer és az $x : 32 = 50 : x$ egyenlet. Próbáljatok más matematikai modelleket is elkészíteni!

Például vegyétek figyelembe, hogy $AD \parallel BC$, míg az AC és BD ferde és az egyenesek közötti szögek tangensei a megfelelő objektumok mozgási sebessége.

Ellenőrizzétek magatokat!

1. Mi a matematikai modell?
2. Mondjatok példákat matematikai modellekre!
3. Mi a matematikai modellezés?
4. Milyen feladatokat nevezünk alkalmazott matematikai feladatoknak?
5. Nevezzétek meg az alkalmazott matematikai feladatok megoldásának fő szakaszait!

Oldjuk meg együtt!

1. Két üzletben 580 kg alma van. Mennyi alma van az üzletekben külön-külön, ha az elsőben 60 kg-mal több van, mint a másodikban? Állítsatok össze négy különböző matematikai modellt ennek a feladatnak a megoldásához!

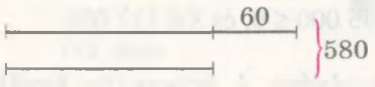
✓ M e g o l d á s. Legyen az első üzletben x mennyiségű alma, s akkor a másodikban lévő almák mennyisége $(x - 60)$kg lesz, együttvéve: $(x + x - 60)$ kg. A következő egyenletet kapjuk: $x + x - 60 = 580$, ahonnan $2x = 640$, $x = 320$, $x - 60 = 260$.

F e l e l e t. 320 kg és 260 kg.

Az $x + x - 60 = 580$ egyenlet a vizsgált feladat egyik matematikai modellje. Más modellek is készíthetők, például egyenlet alakjában: $y + y + 60 = 580$;

egyenletrendszer alakjában $\begin{cases} x + y = 580, \\ x - y = 60; \end{cases}$

vázlat alakjában (112. ábra):



112. ábra



2. Két kombájnos 12 óra alatt arathatja le a búzát. Hány óra alatt arathatnák le a kombájnosok külön-külön a termést, ha ismeretes, hogy az első kombájnos teljesítménye 1,5-szer nagyobb, mint a másodiké?

✓ Megoldás. Ha az első kombájnos az egész termést x óra alatt aratja le, akkor a második $1{,}5\,x$ óra alatt. Az első kombájnos 1 óra alatt a búzatermés $\frac{1}{x}$ részét, míg a második $\frac{1}{1{,}5x}$ részét aratja le. Együtt 1 óra alatt a termés $\frac{1}{12}$ részét tudják betakarítani. Vagyis

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{1{,}5x} = \frac{1}{12}, \text{ ahonnan } \frac{1}{x}\left(1 + \frac{1}{1{,}5}\right) = \frac{1}{12},$$

$$x = \frac{2{,}5}{1{,}5} \cdot 12,\ x = 20;\ 1{,}5 \cdot 20 = 30.$$

Felelet: 20 óra; 30 óra.

3. A lottósorsolás lebonyolítására fordított összeg 55 000 hrivnya. Egy lottószelvény 1 hrivnyába kerül. A lottószelvények eladásából származó bevétel harmada a nyereményalapba kerül, a negyedét adóként fizetik be, a fennmaradó rész a lottójátékot szervező cég nyereségét képezi. Mennyi volt a nyereség, ha 180 000 szelvényt adtak el? Hány lottószelvényt kell eladni, hogy több mint 30 000 UAH (hrivnya) nyereség képződjön? Milyen feltételek mellett nem képződik nyereség?

✓ Megoldás. **I.** Legyen S a lottószelvények eladásából származó bevétel, P pedig a nyereség. Ekkor $S = \frac{S}{3} + \frac{S}{4} + P + 55\,000$, és $P = \frac{5S}{12} - 55\,000$.

II. 1. Ha $S = 180\,000$ hrivnya, akkor $P = \frac{5 \cdot 180\,000}{12} - 55\,000 =$ $= 20\,000$ (hrivnya).

2. Ha $P > 30\,000$, akkor $\frac{5S}{12} - 50\,000 > 30\,000$, és $S > 204\,000$ (hrivnya).

3. Ha $P \le 0$, akkor $\frac{5S}{12} - 55\,000 \le 0$, és $S \le 132\,000$.

III. Mivel egy lottószelvény 1 hrivnyába kerül, ezért az eladott szelvényekből származó pénz (K) számszerűen a bevétellel egyenlő. Vagyis ha $K > 204\,000$ darab, akkor a nyereség meghaladja a 30 000 hrivnyát, és ha $K \le 132\,000$ darab, akkor a cégnek nem lesz nyeresége.

F e l e l e t. 20 000 hrivnya; több mint 204 000 darabot; ha az eladott szelvények mennyisége nem haladja meg a 132 000 darabot.

Oldjátok meg szóban!

593. Milyen matematikai fogalmakkal célszerű modellezni az ablaktáblát, ajtót, vödör alját, téglát, szárazelemet, jégkorongot, labdát?

594. Mondjatok példákat a szakasz, négyzet, háromszög, parabola matematikai fogalmak anyagi modelljeire!

595. Mondjatok példákat a párhuzamosok, merőlegesek, hasonlóságok matematikai összefüggések anyagi modelljeire!

596. Mondjatok példákat olyan fizikai mennyiségek közötti összefüggésekre, amelyek az $y = mx$, $y = \frac{m}{x}$ egyenlőséggel modellezhetők!

597. Állítsatok fel olyan alkalmazott matematikai feladatot, amelynek a matematikai modellje az:

a) $l = 2\pi r$; b) $S = \pi r^2$; c) $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$

képlet!

598. Két polcon összesen 65 könyv található: az egyiken 3 könyvvel több, mint a másodikon. Hány könyv van a polcokon külön-külön? Matematikai modellnek tekinthetők-e az alábbiak:

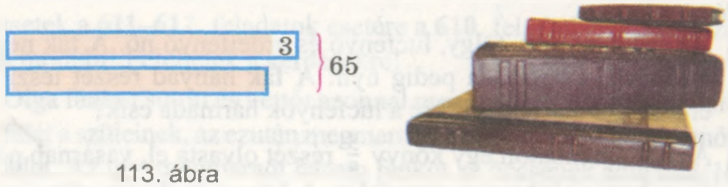
a) $x + x - 3 = 65$ egyenlet;

b) $y + 3 + y = 65$ egyenlet;

c) $z - (65 - z) = 3$ egyenlet;

d) $\begin{cases} x + y = 65, \\ x - y = 3 \end{cases}$ egyenletrendszer;

e) a 113. ábrán látható diagram?



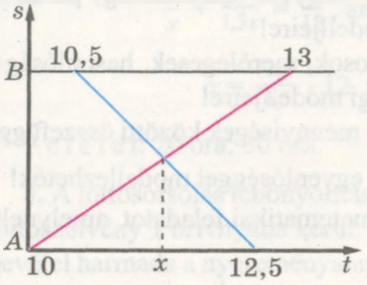
113. ábra

Oldjátok meg az **599.** és **600.** feladatokat szóban, grafikus modelljeik felhasználásával!

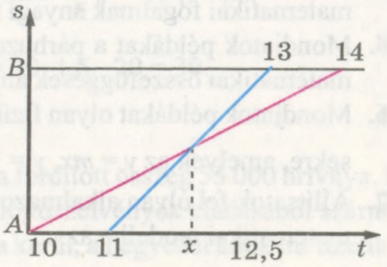
599. A motorkerékpáros 10 órakor indult el A városból B városba, 30 perc múlva B városból vele szemben egy autós indult útnak. Hány órakor

találkoztak a járművek, ha az autós A városba 12 óra 30 perckor, a motorkerékpáros pedig B városba 13 órakor futott be (114. ábra)?

600. Egy motorkerékpáros 10 órakor indult el A városból B városba, egy autós pedig 11 órakor startolt A városból B városba. Hány órakor érte be az autós a motorkerékpárost, ha 13 órakor ért B városba, míg a motorkerékpáros 14 órakor futott be ugyanoda (115. ábra)?



114. ábra



115. ábra

A szint

Állítsátok fel a **601–603.** feladatok matematikai modelljét, és oldjátok meg a feladatokat!

601. Határozzátok meg a $250 \times 120 \times 65$ mm méretű tégla térfogatát!

602. Egy tehén 8 méter hosszú kötéllel van kikötve egy cövekhez a mezőn. Milyen területet legelhet le az állat?

603. Egy kerekes kúton a vödör felhúzásához 12-szer kell a tekerőt megforgatni. Határozzátok meg, milyen mélyen van a kútban a víz, ha a kerekes henger átmérője 24 cm!

Írjátok fel a **604.** és **605.** feladat matematikai modelljét! Feleljetek a kérdésekre!

604. Az erdőben nyír, tölgy, lucfenyő és erdeifenyő nő. A fák negyede lucfenyő, a harmada pedig nyír. A fák hányad részét teszi ki az erdeifenyő, ha a tölgyekre a lucfenyők harmada esik?

605. A diák szombaton egy könyv $\frac{3}{8}$ részét olvasta el, vasárnap pedig a szombaton elolvasott rész felét. A könyv mekkora része maradt elolvasatlanul?

Állítsátok fel a **606–609.** feladatok matematikai modelljeit egyenletek vagy egyenletrendszerek alakjában, és oldjátok meg őket!

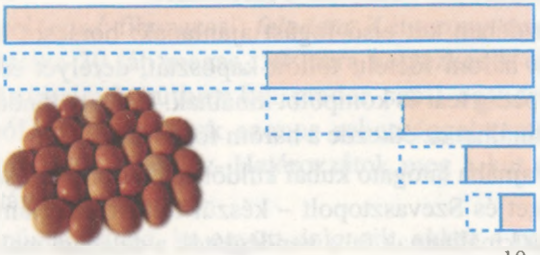
606. Egy apa 4-szer idősebb a fiánál, és 5 év elteltével csak 3-szor lesz idősebb nála. Hány éves jelenleg a fiú?

607. ***Bézout feladata.*** A munkással azt közölték, hogy minden ledolgozott nap után 24 sou-t fog kapni, de az összegből minden igazolatlan mulasztásért 6 sou-t levonnak. 30 nap múlva kiderült, hogy semmit nem fog kapni. Hány napot dolgozott a munkás?

608. Az egyik szénraktárban 2-szer annyi szén van, mint a másikban. Ha az egyik raktárba további 80 tonna szenet szállítanának, míg a másodikba 145 tonnát, akkor mindkét raktárban egyenlő mennyiségű szén lenne. Hány tonna szén van az egyes raktárakban?

609. Az egyik zsákban 60 kg, a másikban 80 kg cukor van. A második zsákból háromszor annyi cukrot vettek ki, mint az elsőből. Ekkor az első zsákban kétszer annyi cukor maradt, mint a másodikban. Hány kilogramm cukrot vettek ki a zsákokból külön-külön?

610. A kosárból kivették a tojások felét, majd a maradék felét, később ennek a maradéknak a felét, végül az utolsó maradék felét is kiszedték. Ennek eredményeként a kosárban 10 tojás maradt (116. ábra). Hány tojás volt a kosárban eredetileg?



116. ábra

Készítsetek a **611–612.** feladatok esetére a **610.** feladatban alkalmazottal analóg modellt! Feleljetek a kérdésekre!

611. Olga fánkot sütött és kettőt azonnal megevett. A megmaradt fánkok felét a szüleinek, az ezután megmaradt fánkok felét pedig barátnőinek adta. Az így megmaradt három fánkot az öccsének adta oda. Hány fánkot sütött Olga?

612. Hétfőn a tanulók elvették az új tankönyvek felét, kedden a maradék felét, szerdán pedig az új maradék felét vitték magukkal. Ezután 25 új tankönyv maradt a könyvtárban. Hány új tankönyv volt a könyvtárban?

Oldjátok meg a **613.** és **614.** feladatokat, és hasonlítsátok össze matematikai modelljeiket!

613. Két kovács a felvállalt munkát 8 nap alatt végzi el. Hány nap alatt fejezné be ugyanezt a munkát a második kovács egyedül, ha az első 12 nap alatt végezne a feladattal?

614. a) Az egyik brigád 3 óra alatt, a második 5 óra alatt végzi el a kiszabott munkát. Hány óra alatt fejezné be a két brigád a munkát, ha együtt dolgoznának?

b) A medence az egyik csövön keresztül 3 óra alatt, a másikon 5 óra alatt telik meg vízzel. Hány óra alatt lesz tele a medence, ha mind a két csövet kinyitják?

c) A állomásról B állomásra és B állomásról A állomásra egyidejűleg indult el két személygépkocsi. Mennyi idő múlva találkozik a két autó, ha az egyik az AB utat 3 óra alatt, a másik pedig 5 óra alatt teszi meg?

Készítsétek el (gráfok) fa alakjában a **615–617.** feladatok lehetséges variánsainak modelljét! Feleljetek a kérdésekre!

615. Az étkezdében két első fogást ajánlanak: borscsot és húslevest, valamint három főételt: töltött káposztát, derelyét és palacsintát, italként pedig teát és kompótot kínálnak. Hány különböző komplett ebédet kínálhat az étkezde a három fogás ételeiből?

616. Egy Ukrajnába látogató kubai küldöttség három várost – Harkivot, Lemberget és Szevasztopolt – készül felkeresni. Hány különböző útvonalat kínálhatnak fel a vendéglátók a delegációnak?

617. A postán háromféle borítékot, a hozzájuk járó kétféle bélyeg és négyféle üdvözlőlap kapható. Hányféle különböző üdvözlő küldemény készíthető a felsorolt kellékekből?

B szint

Állítsátok fel a **618–634.** feladatok matematikai modelljét, és oldjátok meg a feladatokat!

618. Milyen méretűek a kocka alakú arany és ezüst öntecsek, ha mindegyik tömege 3 kg? Az arany sűrűsége 19,3 g/cm^3, az ezüst sűrűsége 10,5 g/cm^3.

619. ***Maclaurin*** (*ejtsd*: mekloren) ***feladata.*** Néhány ember együtt ebédelt és az elfogyasztott ételért közösen 175 schillinget kellett fizetniük.

Kiderült azonban, hogy két személynél nincs pénz, azért a többieknek a rájuk eredetileg eső résznél 10 schillinggel többet kellett fizetniük. Hány személy ebédelt?

620. Az üzemnél 105 motor elkészítését rendelték meg. Az üzem naponta 6 motorral többet gyártott, mint ahogy tervezte, ezért a megrendelést két nappal a határidő előtt teljesítette. Hány motort készített az üzem naponta?

621. A labdarúgó bajnokság keretében 55 mérkőzést játszottak. Minden csapat egy mérkőzést játszott a másikkal. Hány csapat vett részt a bajnokságon?

622. A hajó 4 óra alatt 24 km-t tett meg a vízfolyással azonos irányban és 20 km-t a folyással szemben. Határozzátok meg a vízfolyás sebességét, ha a hajó sebessége állóvízben 12 km/h!

623. Számítsátok ki a téglalap oldalainak hosszát, ha ismeretes, hogy kerülete 74 cm, és ha az egyik oldalát 3 cm-rel megnövelitek, a másikat pedig 2 cm-rel megrövidítitek, akkor a területe 20 cm^2-rel csökken!

624. ***Fibonacci*** (*ejtsd*: fibonaccsi) ***feladata.*** Két torony, amelyek egyike 40, a másika 30 láb magas, 50 lábra helyezkedik el egymástól. A közöttük lévő kúthoz két madár száll egyidejűleg a két toronyról. Ha a madarak azonos sebességgel repülnek, akkor egyszerre érnek a kúthoz. Határozzátok meg a kút és a tornyok közötti távolságot!

625. Két kőműves brigád, ha együtt dolgozik, akkor 4 nap alatt tudja elvégezni a munkát. Hány nap alatt lenne képes elvégezni a két brigád külön-külön a munkát, ha az első brigád hat nappal korábban készülne el a feladattal, mint a másik?

626. Két különböző teljesítményű markológép együttes munkával 6 óra alatt vájta ki a munkagödröt. Ha az egyik markoló a gödör egyik felét, a második markoló a másik felét vájná ki, akkor a munkát 12,5 óra alatt fejeznék be. Hány óra alatt készülne el az egész munkával a két markológép külön-külön?

627. Két szivattyú, ha egyszerre működik, 5 óra alatt tölti fel a tankhajót. Ha az I. szivattyú teljesítménye kétszer kisebb, a II. szivattyúé pedig kétszer nagyobb lenne az eredetinél, akkor a tankhajót együttesen 4 óra alatt töltenék fel. Hány óra alatt töltenék fel a szivattyúk külön-külön a tankhajót az eredeti teljesítménnyel üzemelve?

628. Van egy 10 százalékos és egy 15 százalékos sóoldatunk. Mennyit kell venni a két oldatból ahhoz, hogy 100 gramm 12 százalékos oldatot kapjunk?

629. Adva van két sóoldat. Az elsőben a sókoncentráció 0,25, a másodikban 0,4. Hány kilogrammal több sót kell venni az egyikből, mint a másikból, hogy 100 kg tömegű olyan oldatot kapjunk, amelyben a só koncentrációja 0,37?

630. A bútor ára két egymást követő p%-os leértékelés nyomán 12 500 hrivnyáról 8 000 hrivnyára csökkent. Hány százalékkal csökkent egy-egy alkalommal a bútor ára?

631. A cukrászdában a gyümölcssaláta, amely $\frac{3}{4}$ részben őszibarackból áll, 24 hrivnyába kerül. Mennyi lesz a gyümölcssaláta ára, ha az őszibarackot: a) kétszer olcsóbb szilvával; b) k-szor drágább gyümölcsökkel váltják fel? Vegyétek figyelembe, hogy a saláta összetevőinek értéke összértékének 50%-át teszi ki.

632. A valamely áru iránti kereslet és annak kínálata a következő egyenlettel írható le:

$$Q_D = 750 - 23p, \quad Q_S = 150 + 97p,$$

ahol Q_D a kereslet mértéke (millió darab évente), Q_S a kínálat mértéke (millió darab évente), p az ár hrivnyában. Határozzátok meg a kiegyensúlyozott árat és az eladás mértékét! Hogyan változik a kereslet és a kínálat, ha az áru ára 6 hrivnya?

633. Egy termék gyártásához az üzem 200 000 hrivnya értékben vásárolt berendezéseket. A tervek szerint a berendezést 10 évig használják majd, és a használati idő lejárta után csak fémhulladékként adható el 19 700 hrivnyáért. Határozzátok meg a berendezés folyó értékét (jelenértékét) 2 és 5 év elteltével a használatba vétel után, ha az éves amortizációs költségek állandóak maradnak!

634. A tehenésznek 600 méter dróthálója van, amellyel a csorda szálláshelyét akarja körbekeríteni. Milyen alakzatot kell választania a tehenésznek, hogy a szálláshelynek a lehető legnagyobb legyen az alapterülete!

A **635.** és **636.** feladatok megoldása során matematikai modellként használjatok Euler-diagramot!

635. A líceum fizika-matematikai szakirányú osztályának tanulói tudományos projektet készítettek matematikából, fizikából és informatikából. Matematikából 48, fizikából 30, informatikából 40 ilyen projekt készült. Matematikából és fizikából 6 tanuló, matematikából és informatikából 9, fizikából és informatikából 7 tanuló készített munkákat. Két tanulónak mind a három tárgyból van tudományos projektje. Hány tanuló nem készített munkát egyetlen tárgyból sem, ha a líceum fizika-matematikai osztályaiban 100 diák tanul?

636. A 9. A osztályban 36 tanuló van. Kiderült, hogy a szünidőben közülük csak két tanuló nem volt sem moziban, sem színházban, sem pedig cirkuszban. De moziban 25, színházban 11, cirkuszban 17 tanuló volt. Hat tanuló volt moziban és színházban, négy színházban és cirkuszban, tíz moziban és cirkuszban. Hány tanuló volt a szünidő alatt moziban, színházban és cirkuszban?

Állítsátok fel a mozgással kapcsolatos **637–642.** feladatok matematikai modelljét, és oldjátok meg a feladatokat!

637. Egymástól 120 km-re fekvő két városból egyidejűleg indult ki egymással szemben egy motorkerékpáros és egy kerékpáros, akik 3 óra elteltével találkoztak. Határozzátok meg a haladási sebességüket, ha ismeretes, hogy az egész távot a motorkerékpáros 2,5 órával gyorsabban tette meg, mint a kerékpáros!

638. Az egymástól 900 km távolságra lévő A és B városból két vonat indult el, amelyek a táv közepén találkoztak egymással. Határozzátok meg a vonatok sebességét, ha az első vonat sebessége 5 km/h-val nagyobb, mint a másodiké, s az első vonat A-ból 1 órával korábban indult ki, mint a második B-ből!

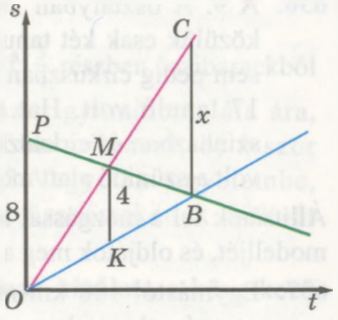
639. Az egymástól 90 km távolságra lévő A és B pontból egyidejűleg startolt egymással szemben két motorkerékpáros. Mekkora sebességgel haladtak, ha a találkozásuk után az első motoros 1 óra 15 perccel ért B-be, a második pedig a találkozás után 48 perccel futott be A-ba?

640. Az egymástól 24 km távolságra lévő A és B városból egyidejűleg indult ki egymással szemben két személygépkocsi. Az A-ból startolt autó a találkozásuk után 16 perccel érkezett meg B-be, míg a második autó 4 perccel a találkozást követően ért be A-ba. Határozzátok meg a személygépkocsik sebességét!

641. Az egymástól 350 km távolságra lévő két városból egyidejűleg startolt egymással szemben két motorkerékpáros. Az indulást követően 3 órával a találkozásukig még 20 km-t kellett megtenniük. Határozzátok meg a motorkerékpárosok haladási sebességét, ha a sebességeik közötti különbség 10 km/h!

642. A kikötőből egyszerre indul el két hajó: az egyik déli, a másik nyugati irányban. Két órával később a közöttük lévő távolság 60 km-t tett ki. Határozzátok meg a hajók sebességét, ha 6 km/h a sebességeik közötti különbség!

643* Az úton állandó sebességgel halad egy motorkerékpáros és egy kerékpáros, velük szemben egy gyalogos közlekedik. Amikor a motorkerékpáros beérte a kerékpárost, akkor 8 km-re voltak a gyalogostól. Amikor a motorkerékpáros a gyalogossal találkozott, akkor a kerékpáros 4 km-rel volt lemaradva a motorkerékpárostól. Hány kilométerrel előzi meg a motorkerékpáros a kerékpárost abban a pillanatban, amikor a kerékpáros a gyalogossal találkozik (117. ábra)?



117. ábra

644* Két korcsolyázó egy kör alakú, 2 km hosszú pályán fut egy irányban, és 20 percenként kerülnek egymás mellé. Határozzátok meg mindkét korcsolyázó sebességét, ha közülük az első 1 perccel hamarabb teszi meg a kört, mint a második!

Készítsetek a **645.** feladathoz modellt kétdimenziós táblázat alakjában, és feleljetek a kérdésekre!

645. Paula, Gabi, Dávid és Bálint, akik egy édességgyár különböző üzemegységeiben dolgoznak, karamellt, csokoládét, kekszet és tortákat készítenek. Bálint, Dávid és a tortasütő üzemegységben dolgozó társuk egy szakközépiskolában tanult. Paula és Gabi gyalog járnak a munkahelyükre, míg az a társuk, aki a karamellkészítő üzemegységben dolgozik, valamint Dávid rendszerint saját autójával közlekedik az otthona és a munkahelye között. Az a személy, aki a

kekszsütő üzemegységben dolgozik, soha nem ismerte sem a csokoládéöntő üzemegységben dolgozót, sem Gabit. Ki melyik üzemegységben dolgozik?

Ismétlő gyakorlatok

646. Rajzoljátok meg az $y = |2x + 3|$ függvény görbéjét!

647. Melyik igaz az egyenlőtlenségek közül:

a) $-18{,}7 < 17{,}3$; b) $3{,}25 \geq 3\frac{1}{4}$; c) $-3\sqrt{2} \geq 2\sqrt{3}$?

648. Melyik nagyobb a törtek közül:

a) $\frac{3}{4}$ vagy $\frac{4}{5}$; b) $\frac{47}{48}$ vagy $\frac{49}{50}$; c) $\frac{5}{6}$ vagy 0,833?

649. Melyik kifejezés értéke nagyobb:

$\left(32\frac{1}{5} - 7{,}2\right) : \frac{5}{6}$ vagy $\left(21\frac{1}{4} + 4{,}75\right) \cdot \frac{12}{13}$?

650. Egyszerűsítsétek a törteket:

a) $\frac{x^2 + 2x}{x^2 + 7x + 10}$; b) $\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 9}$; c) $\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 4x + 3}$!

16.§. SZÁZALÉKSZÁMÍTÁS

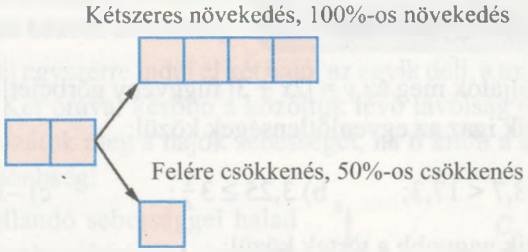
A *százalék* – egy századrész:

$1\% = 0{,}01$; $50\% = 0{,}5$; $100\% = 1$.

Már találkoztatok a százalékszámítás (százalékalap, százalékláb, százalékérték) legegyszerűbb módszereivel. Idézzétek fel ezeket a feladatokat és megoldásaik módszereit!

A bonyolultabb, alkalmazott százalékszámítási feladatokban legtöbbször a mennyiségek meghatározott százalékkal való növekedéséről vagy csökkenéséről van szó. Ezekben az esetekben pontosan kell érteni, hogy melyik mennyiség százalékát kell meghatározni. Például, ha arról van szó, hogy a fizetést 10%-kal emelték, akkor az előző fizetést növelték annak 10%-ával. Ha x értéke p%-kal nagyobb y értékénél, akkor y nem p%-kal lesz kisebb x-nél. A kétszeres növelés 100%-kal történő növekedést,

míg a felére csökkentés 50%-kal való csökkentést jelent (118. ábra). Egy áru értéke elméletileg bármilyen százalékarányban növekedhet, de például 120%-kal nem csökkenhet.



118. ábra

Tekintsünk egy százalékszámítással kapcsolatos feladatot.

Feladat. Az 55 t 16 százalékos nedvességtartalmú búza szárítás utáni tömege 50 tonna lett. Határozzátok meg a szárított búza nedvességtartalmát!

✓ M e g o l d á s (119. ábra). Eredetileg a búzában $0{,}16 \cdot 55 = 8{,}8$ tonna víz volt. Elpárolgott belőle 5 tonna $(55 - 50 = 5)$ nedvesség.

Maradt benne $8{,}8 - 5 = 3{,}8$ tonna nedvesség.



119. ábra

Tehát a szárított búza nedvességtartalma $3{,}8 : 50 = 0{,}076 = 7{,}6\%$.

F e l e l e t: 7,6%.

A feladatot megoldhatjuk másképpen is, például egyenlet felállításával:

$$0{,}16 \cdot 55 - 0{,}01x \cdot 50 = 5.$$

Százalékszámítással kapcsolatos feladatokat gyakran kell megoldaniuk a könyvelőknek és a banki dolgozóknak. Nézzünk egy olyan feladatot, ahol befektetési kamatot kell kiszámítani.

Egyszerű kamatszámításról van szó, amikor csak a *kezdőtőke* kamatát számítják ki.

Például év elején a befektető összeget tesz be a bankba r éves kamatláb mellett. Egy év elteltével a betétes P_1 összeget kap, amely a P kezdőtőkéből és az utána felszámolt kamatból $\left(\frac{Pr}{100}\right)$ áll, vagy $P_1 = P + \frac{Pr}{100} = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)$.

Két és három év múlva az összeg nagysága a számlán a következő lesz:

$$P_2 = P + \frac{Pr}{100} + \frac{Pr}{100} = P\left(1 + 2\frac{r}{100}\right) \text{ és } P_3 = P\left(1 + 3\frac{r}{100}\right).$$

Hasonló módon számítható ki a P_n összeg (jövőérték), amelyet a betétes n év múlva kap:

$$P_n = P\left(1 + \frac{r}{100}n\right), \qquad (1)$$

ahol P a kezdőtőke; P_n a betét összege n év múlva.

Az egyszerű kamatszámítást rendszerint rövidlejáratú pénzügyi műveletek esetén alkalmazzák, amikor a betétesnek minden egyes kamatozási időtartam lejárta után kifizetik a kamatot.

A hosszúlejáratú pénzügyi-hitelszerződésekben általában az **összetett** vagy **kamatos kamatot** alkalmazzák. Ezt nemcsak az alapösszeg, hanem a korábban felszámolt kamat után is felszámolják. Ebben az esetben a *kamat tőkésítéséről* beszélünk.

Tételezzük fel, hogy a betétes 9%-os kamatlábra 1 000 hrivnyát tett be a bankba. Ez az összeg a ***kezdőtőke***. Egy év múlva a bank a beté-tesnek felszámol 90 hrivnya ***kamatot*** (1 000 hrivnya 9%-át). Ezután a betétes bankszámláján már 1090 hrivnya vagy 1 000(1 + 0,09) = 1 090 lesz. A második évben már az 1 090 hrivnya 9%-át számítják fel kamat-ként. Két év után a betétes ***kamatos tőkéje*** már 1 000 $(1 + 0{,}09)^2$ hrivnyát tesz ki. Érthető, hogy n év múlva 1 000$(1 + 0{,}09)^n$ hrivnya lesz a betét összege.

Tehát a takarékbankban r% éves kamatra elhelyezett P induló tőkéből n év múlva a következő kamatos tőke lesz:

$$P_n = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n.$$

Ez a ***kamatos kamat képlete***, amely a pénzügyi elszámolások egyik alapképlete.

Feladat. A betétes 200 000 hrivnyát helyezett el a bankban 7%-os éves kamatra. Mekkora kamatra számíthat 5 év múlva?

✓ Megoldás. Alkalmazzuk a kamatos kamat $P_n = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$ képletét. Az adott esetben $r = 7$, $n = 5$.

Vagyis $P_5 = P(1{,}07)^5$. Ha $P = 200\,000$, akkor:

$$P_5 = 200\,000 \cdot (1{,}07)^5 = 280\,510.$$

Az kezdőtőkével összehasonlítva:

$$280\,510 - 200\,000 = 80\,510 \text{ (hrivnya)}.$$

Felelet: 80 510 hrivnya.

A pénzösszeg növekedését mutató szorzót ***multiplikátornak*** nevezzük. Ennek az értékét r és n különböző értéke mellett számítják ki, majd speciális táblázatokban tüntetik fel.

Ez a képlet a kamatos kamat $\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$ - hoz nem kapcsolódó feladatok megoldására is alkalmazható (lásd a **716.** feladatot).

A százalékhoz hasonló fogalmak az ezrelék (promile) és a próba (fémjelzés).

Az ***ezrelék*** egy ezredrész (1‰ = 0,001). Ha például egy sóoldat 5 ezrelékes, akkor ez azt jelenti, hogy 1000 gramm oldat 5 gramm sót tartalmaz.

A ***próba*** (fémjelzés) a nemesfémötvözetek jellemzője. A 875-ös próbájú arany azt jelenti, hogy 1000 gramm ötvözet 875 gramm aranyat tartalmaz.

A kamatos kamatot évi egy alkalomnál gyakrabban, például félévente, negyedévente, havonta számolhatják. Az évi többszöri kamatos kamatszámítást ***compounding kamatszámításnak***, a meghatározott időszakonként felszámolt kamatokat pedig ***diszkrét kamatoknak*** nevezzük. A pénzügyi szerződésekben rögzítik az éves kamatlábat, amelyet ***nominális kamatlábnak*** neveznek, az egy időszakra érvényes kamatlábszámítás a nominális kamatláb és az egy évre eső időszakok arányával egyenlő. Ebben az esetben a betétösszeg növekedése a következő képlettel számítható ki:

$$P_n = P\left(1 + \frac{r}{100\,m}\right)^{mn},$$

ahol m – az egy évre eső kamatszámítási időszakok száma.

Vagyis rögzített kamatláb mellett számításba kell venni a kamatszámítások gyakoriságát, mivel a kamatfelszámolások számának egy éven belüli növekedésével nő az éves abszolút jövedelem.

A nemesfémek próbáját (fémjelzését) nem mindig és nem mindenütt jelölik és határozzák meg azonos módon. Például a jelenlegi ukrajnai 750-es fémjelű aranyat 100 évvel ezelőtt 72-es fémjelű aranynak nevezték, míg Nagy-Britanniában ugyanez 18-as fémjelű arany. Miért? Azért, mert nem minden országban alkalmazzák a metrikus mérési rendszert. A forradalom előtti számtan tankönyvekben (A. Kiszeljov, 1900) például a próba azt jelentette, hogy hány súlyegységnyi tiszta fémet tartalmaz 96 súlyegységnyi ötvözet. Az akkori mértékrendszer szerint a tömeget (súlyt) fontokban és zolotnyikokban mérték, egy font 96 zolotnyiknak felelt meg.

Nagy-Britanniában és Nyugat-Európában az arany próbáját hagyományosan karátokban adják meg. E szerint a színarany, azaz a mindennemű szennyezéstől mentes arany 24 karátos.

A 18-as fémjelű (próbájú) arany 18 karátot, vagyis $\frac{18}{24}$ tiszta aranyat tartalmaz.

Ellenőrizzétek magatokat!

1. Mi a százalék? Mi a kamat?
2. Mondjatok példákat és javasoljatok megoldási módszereket a következők kiszámítására: a) százalékláb; b) százalékérték; c) két szám százalékaránya!
3. Mit jelent 100%-kal növelni a számot?
4. Mit jelent 50%-kal csökkenteni a számot?
5. Mi az induló tőke, a kamat, a kamatos kamat?
6. Írjátok le az egyszerű és az összetett kamatszámítás képletét!
7. Mi a nemesfémek próbája (fémjelzése)?

Oldjuk meg együtt!

1. Számítsátok ki 190 20%-át!

Megoldás. 20% = 0,2; 02 · 190 = 38.

Felelet. 38.

2. Határozzátok meg azt az x számot, amelynek 12%-a 480!

✓ Megoldás. $12\% = 0{,}12$; $0{,}12 \cdot x = 480$, ahonnan $x = 480 : 0{,}12 = 4\,000$.

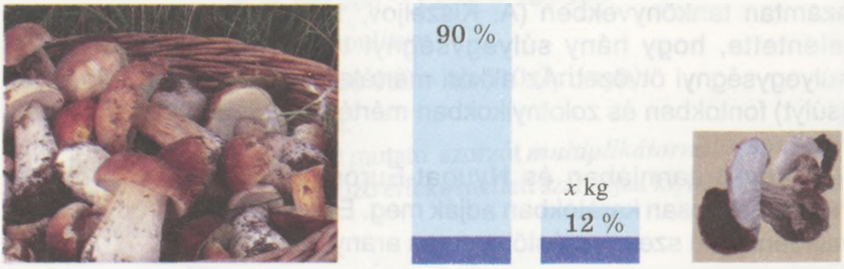
Felelet. 4 000.

3. Határozzátok meg 51 és 20 százalékarányát!

✓ Megoldás. $\frac{51}{20} \cdot 100\% = 255\%$.

Felelet. 255%.

4. A friss gombák 90% vizet tartalmaznak, a szárított gombák 12%-ot. Mennyi szárított gomba lesz 22 kg friss gombából (120. ábra)?



120. ábra

✓ Megoldás. Legyen a szárított gomba x kg. Ebben a víz nélküli tömeg aránya 88%, vagyis $0{,}88x$. 22 kg friss gombában 10% azaz 2,2 kg a száraz tömeg. Mivel a friss és a szárított gomba száraz tömege egyenlő, így a következő egyenlet állítható fel:

$$0{,}88x = 2{,}2;\ x = 2{,}5.$$

Felelet. 2,5 kg.

5. Két 10 százalékos és 15 százalékos sóoldatból 40 g 12 százalékos sóoldatot kell előállítani. Hány grammot kell venni a két sóoldatból?

✓ Megoldás. Készítsünk táblázatot és töltsük ki, x és y által jelölve az első és a második sóoldat általános tömegét.

Az *Általános tömeg* és a *Sótömeg* oszlopok nyomán egyenletrendszert állítunk fel:

$$\begin{cases} x + y = 40, \\ 0{,}10x + 0{,}15y = 4{,}8, \text{ ahonnan } x = 24,\ y = 16. \end{cases}$$

Oldat	Általános tömeg, g	Sótartalom, %	Sótömeg, g
I	x	10	$0{,}10x$
II	y	15	$0{,}15y$
III (képződött)	40	12	4,8

F e l e l e t. Az első oldatból 24 g, a másodikból 16 g mennyiséget kell venni.

Oldjátok meg szóban!

651. Számítsátok ki az 50%-át: a) 200; b) 35; c) 0,5; d) 1 év!

652. Számítsátok ki az 25%-át: a) 80; b) 16; c) 0,4; d) 1 hrivnya!

653. Határozzátok meg azt a számot, amelynek 10%-a a következőkkel egyenlő: a) 7; b) 200; c) 3,5; d) 1; e) 0,5!

654. Határozzátok meg a számok százalékarányát:

a) 5 és 25; b) 25 és 20; c) $\frac{1}{2}$ és $\frac{1}{4}$; d) $\frac{1}{6}$ és $\frac{1}{3}$!

655. Adjátok meg százalékokban az arányokat:

a) 1 : 4; b) 3 : 12; c) 3 : 15; d) 5 : 50!

656. Hány százalékkal nagyobb a 20 a 10-nél? Hány százalékkal kisebb a 10 a 20-nál?

657. Az alma ára 300%-kal nőtt. Hányszorosára nőtt az alma ára?

A szint

658. Írjátok le tizedes törtek alakjában:

a) 2%; b) 35%; c) 216%; d) 5,4%!

659. Írjátok le százalékban kifejezve:

a) 0,4; b) 0,53; c) 13,7; d) 24!

660. 1. Számítsátok ki:

a) 350 hrivnya 42%-át; b) 5 kg 0,6%-át;

c) 0,54 m 12%-át; d) 4 óra 125%-át!

2. Határozzátok meg azt a számot:

a) amelynek 60%-a 30; 90; 120; 150; 1,8; 2,4;

b) amelynek 2,5%-a 15; 45; 60; 125; 7,5; 1,7!

661. Határozzátok meg a számot:

a) amelynek 45%-a 270;

b) amelynek 0,3%-a 0,3!

662. Írjátok le százalékban kifejezve az arányokat:

a) 7 : 10; b) 21 : 140; c) 0,39 : 2,6!

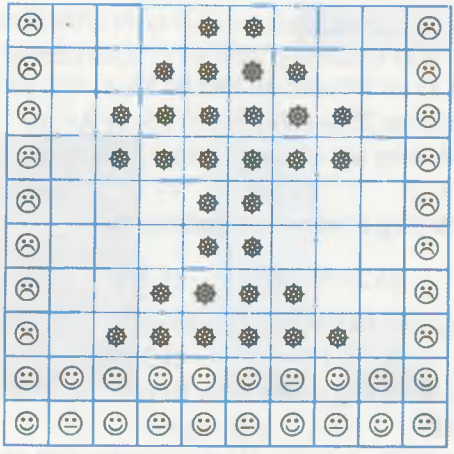
663. A nagy négyzet területének hány százaléka van megjelölve az alábbi jelekkel (121. ábra):

a) ☸;

b) ☹;

c) ☺;

d) 😐?



121. ábra

664. Hány kilogramm zsírt tartalmaz 50 kg 3,8%-os zsírtartalmú tej?

665. A vasérc 54% vasat tartalmaz. Mennyi vas olvasztható ki 5 000 t ilyen ércből?

666. Hány kilogramm sót tartalmaz 1 kg 7 százalékos oldat?

667. Az üzletbe 1000 kg almát szállítottak, amelyből 20% első-, 30% másod-, a fennmaradó rész harmadosztályú volt. Hány kilogramm különböző osztályú almát szállítottak az üzletbe?

668. A téglalap hossza 65 cm, a szélessége hosszúságának 40%-a. Számítsátok ki a téglalap kerületét!

669. A tisztségviselő fizetése 2 000 hrivnya. A következő évtől 20%-os emelést ígérnek. Milyen lesz a hivatalnok fizetése a béremelés után?

670. Uborka savanyításához egy vödör vízre (12 kg) számítva 0,76 kg sóra van szükség. Fejezzétek ki százalékokban az oldat töménységét!

671. Az elvetett 1050 búzaszemből 1000 szem kelt ki. Hány százalékos a búzaszemek csíraképessége?

672. A banknak 50 000 ügyfele van: 21 000 jogi személy, a többi természetes személy. Hány százalékot tesznek ki: a) a jogi személyek; b) a természetes személyek?

673. A Föld felülete 510,1 millió km^2, ebből 149,2 millió km^2 a szárazföld. A Föld felszínének hány százalékát borítja víz?

674. A traktorvezetőnek 25 ha területet kellett felszántania, de 27 ha-t szántott fel. Hány százalékra teljesítette a feladatát? Hány százalékkal teljesítette túl a feladatát!

675. A tejből 10% túrót állítanak elő. Mennyi tejre van szükség 20 kg túró készítéséhez?

676. A cukorrépából 12% cukrot vonnak ki. Mennyi cukorrépát kell feldolgozni 1 t cukor előállításához?

677. A téglalap hossza 54 cm, a szélessége 20%-kal kevesebb. Számítsátok ki a téglalap területét!

678. A téglalap területe 96,8 cm^2. Határozzátok meg az oldalait, ha ezek egyike 20%-kal kisebb a másiknál!

679. A téglalap területe 96,8 cm^2. Határozzátok meg az oldalait, ha ezek egyike 20%-kal nagyobb a másiknál!

B szint

680. Az egyik könyvben 20%-kal kevesebb oldal van, mint a másikban. Hány százalékkal több oldal van a második könyvben, mint az elsőben?

681. Milyen volt a drágulás előtt az árucikk ára, ha a 20%-os árnövekedést követően az áru 450 hrivnyába kerül?

682. Az árucikk árát először 10%-kal, majd ismét 10%-kal csökkentették. Hány százalékkal módosult az árucikk ára a két árcsökkentés után?

683. Az autó árát először 20%-kal növelték, majd 20%-kal csökkentették. Hogyan változott a gépkocsi ára a két ármódosítás után?

684. Két szám összege 20%-kal nagyobb, mint a különbségük. Határozzátok meg a két szám arányát!

685. Két szám félösszege 30%-kal nagyobb, mint a különbségük. Határozzátok meg a két szám arányát!

686. Két benzintartályban 140 l benzin van. Ha az első tartályból a benzin 12,5%-át áttöltik a másodikba, akkor a két tartályban egyenlő lesz a benzin mennyisége. Hány liter benzin volt a tartályokban külön-külön?

687. Az üzem az első évben 20%-kal növelte a termelést, a második évben 25%-kal. Milyen arányban nőtt a termelés a két év alatt?

688. Az építkezésen a munka mennyisége 50%-kal nőtt, míg a munka termelékenysége 20%-kal. Hogyan változott a dolgozók létszáma?

689. 18 kg 10 százalékos savoldathoz 2 kg vizet öntöttek. Határozzátok meg az új oldat százalékos töménységét (tömegszázalékát)!

690. Mennyi 10 százalékos és 20 százalékos sóoldatot kell összekeverni, hogy 1 kg 12 százalékos oldatot kapjunk?

691. Hány kilogramm 7 százalékos oldatot kell 5 kg 5 százalékos oldathoz önteni, hogy 6 százalékossá alakuljon?

692. Mennyi édesvizet kell 5% sót tartalmazó 100 kg tengervízhez önteni, hogy a benne lévő só koncentrációja 1,5% legyen?

693. A sárgaréz 60% réz és 40% cink ötvözete. Mennyi rezet és cinket kell összeolvasztani 500 t sárgaréz előállításához?

694. A bronz réz és ón ötvözete. Hány százalék réz található abban a bronzöntetben, amely 17 kg rezet és 3 kg ónt tartalmaz?

695. Mennyi vizet kell az 5‰ töménységű 10 kg sóoldathoz hozzáönteni, hogy 3‰ koncentrációjú oldatot kapjunk?

696. Mennyi 2‰ és 10‰ koncentrációjú sóoldatot kell összekeverni, hogy 800 g 7‰ koncentrációjú oldatot kapjunk?

697. Mennyi 375-ös fémjelű aranyat kell összeolvasztani 30 g 750-es fémjelű arannyal, hogy 500-as fémjelű aranyat nyerjünk?

698. Az 5% zsírtartalmú tejből 15,5% zsírtartalmú túrót készítenek, amelynek eredményeként 0,5% zsírtartalmú tejsavó marad vissza. Mennyi túró készíthető 100 kg tejből?

699. Az egyik mező területének 65%-a rozzsal van bevetve. A másik mező területének 45%-án termelnek rozst. Ismeretes, hogy a két mező összterületének 53%-a van rozzsal bevetve. A bevetett terület egészének mekkora részét teszi ki az első mező?

700. Korábban 3 kg hús került annyiba, mint most 2 kg. Hány százalékkal drágult a hús?

701. A tejből 20% tejszínt készítenek, míg a tejszínből 25% vajat állítanak elő. Mennyi tejből készíthető 10 kg vaj?

702. A vasérc 60% vasat tartalmaz. Ebből 98 százalék vastartalmú nyersvasat olvasztanak. Hány tonna ércből olvasztható 1 000 t nyersvas?

703. Az alma aszalásnál tömegének 84%-át elveszti. Mennyi friss almát kell aszalni ahhoz, hogy 40 kg aszalványt kapjunk?

704. Pörkölésnél a kávészemek tömegük 12,5%-át elvesztik. Hány kilogramm nyers kávéra van szükség 42 kg pörkölt kávé előállításához?

705. A friss gomba 90% vizet tartalmaz, a szárított 12%-ot. Mennyi szárított gomba készíthető 44 kg friss gombából?

706. A friss gomba 90% vizet tartalmaz, a szárított 12%-ot. Mennyi friss gomba szárításával készíthető 10 kg szárított gomba?

707. A friss gomba 99%-a víz. Szárítás után a víztartalma 98%-ra csökkent. Hogyan változott a gomba tömege?

708. A cég 250 000 hrivnya 5 éves lejáratú hitelt vett fel a bankban 3%-os egyszerű kamatra. Számítsátok ki: a) hány hrivnyát fizet vissza a cég a banknak 5 év múlva; b) milyen nyereségre tesz szert a bank?

709. A vállalkozó 15 000 hrivnyát tett be a bankba 5% éves kamatos kamatra. Mekkora lesz a teljes betét összege 4 év múlva?

710. A vállalat 50 000 hrivnya hitelt kapott 8% éves kamatra. Mekkora összeget kell visszafizetnie a vállalatnak fél év múlva?

711. A 90 000 hrivnyás, 5 év lejárati idejű betét után a bank 18% éves kamatot számol fel. Mekkora összegű lesz a betét a futamidő végén, ha a bank: a) félévente; b) negyedévente számolja fel a kamatos kamatot?

Vizsgáljátok meg a különböző kamatszámítási feltételeket tartalmazó **712–715.** feladatokat!

» **712.** Egy betétes 20 000 hrivnyát tett be a bankba 17% éves kamatra. Mekkora összegű lesz a kamat két év múlva?

713. Milyen feltételek mellett növekszik 44%-kal két év múlva a bankban elhelyezett tőke?

714. Hány év múlva duplázódik meg a bankba 25% éves kamatra betett tőke? (Használjatok zsebszámológépet!)

» **715.** Az a hír járja, hogy Pavlo Polubotok ukrán hetman 1723-ban 4%- éves kamatra jelentős tőkét tett be Ukrajnából egy angol bankba. Hányszorosára nőtt volna ez a tőke napjainkig?

716. A Föld lakossága minden évben 2%-kal növekszik. Hány ember él majd bolygónkon 2025-ben, ha 2000-ben a Föld lakossága 6 milliárd volt?



Ismétlő feladatok

Számítsátok ki (**717–718**)!

717. a) -6^{-3}; b) $-0{,}1^{-6}$; c) $(-0{,}4)^{-4}$; d) $(-0{,}3)^{-5}$.

718. a) $\sqrt{2^8 \cdot 10^4}$; b) $\sqrt{(-0{,}3)^2 \cdot 10^6}$; c) $\sqrt{(-5)^4 \cdot 0{,}1^2}$.

Oldjátok meg szóban az egyenleteket (**719–720**)!

719. a) $x^2 - 3x - 18 = 0$; b) $x^2 - 16x + 60 = 0$.

720. a) $x^2 + 16x + 48 = 0$; b) $x^2 + 4x - 21 = 0$.

17.§. KÖZELÍTŐ SZÁMÍTÁSOK

Megmérhető-e egy léc hossza abszolút pontosan? Nem. Ha azt halljátok, hogy egy léc hossza 9,42783 m, ne higgyétek el. Egy ilyen léc hossza ugyanis a milliméter századrészének pontosságával nem mérhető meg. Minden mérés eredménye a mennyiség közelítő értéke.

Ha egy mérés eredményeként azt kapjuk, hogy a léc x hossza több mint 6,427 m és kevesebb, mint 6,429 m, akkor ezt így írjuk fel:

$$x = 6{,}428 \pm 0{,}001 \text{ m}.$$

Ekkor azt mondják, hogy a lécet 0,001 m (milliméternyi) pontossággal mérték meg, vagy hogy a 6,428 közelítő értékének abszolút hibája nem több mint 0,001.

***Abszolút hibának* (*hibahatárnak*) nevezzük a pontos érték és a közelítő érték különbségének modulusát.**

Ha a pontos értéket nem ismerjük, akkor a közelítő érték abszolút hibáját sem tudjuk meghatározni. Ilyenkor az ***abszolút hibahatárt*** (a hibahatár abszolút értékét) adják meg, ami az a szám, amit az abszolút hiba nem halad meg.

Az előző példában a 6,428 közelítő értékének abszolút hibahatára 0,001. A 6, 4 és 2 értékes (pontos) számjegy, míg a 8 nem értékes (pontatlan) számjegy, ami a pontos értéktől nem több mint eggyel különbözik.

Ha $x = 3{,}274 \pm 0{,}002$, azaz $3{,}272 \leq x \leq 3{,}276$, akkor az abszolút hibahatár 0,002.

A közelítő érték felírható hibahatár nélkül is. Ez azt jelenti, hogy az utolsó számjegyen kívül mindegyik számjegy értékes, az utolsó pedig legfeljebb nem több mint eggyel különbözik a pontos értéktől. Például, ha $x = 6{,}428$ m, akkor ezen $x = 6{,}428 \pm 0{,}001$ m-t kell érteni.

Ha $y = 3{,}247 \pm 0{,}002$ kg, akkor ehelyett nem írható $y = 3{,}247$ kg. Ilyenkor célszerű az eredményt $y = 3{,}25$ kg-ra kerekíteni.

Képzeljétek el, hogy megmértétek (centiméterekben) a könyv h vastagságát és a borítójának l hosszát:

$h = 1{,}6 - 0{,}1$ pontossággal,

$l = 71{,}5 - 0{,}1$ pontossággal.

Mindkét érték abszolút hibahatára 0,1. Azonban egyik esetben ez a hibahatár egy kis számra, az 1,6-re, míg a másik esetben egy sokkal nagyobbra, a 71,5-re vonatkozik. A mérés minőségének megállapítására kiszámítják a relatív vagy viszonylagos hibahatárt.

A közelítő érték *relatív hibájának* nevezzük az abszolút hiba és a közelítő érték modulusának arányát.

Például a h és l közelítő értékeinek relatív hibája rendre:

$$0{,}1 : 1{,}6 = 0{,}0625 \approx 6{,}3\%; \quad 0{,}1 : 71{,}5 \approx 0{,}0014 = 0{,}14\%.$$

Az l értékének meghatározása pontosabb, kisebb a relatív hibahatára.

A közelítő értékekkel műveletek végezhetők a hibahatár pontos figyelembevételével és anélkül is. A hibahatár pontos kiszámítása a kettős egyenlőtlenségek tulajdonságainak alapján történik. Például a csavar tömege grammokban $x = 325 \pm 2$ és az anyacsavar tömege $y = 117 \pm 1$, vagyis $323 \leq x \leq 327$ és $116 \leq y \leq 118$. A kettős egyenlőtlenségek összeadásával a következőt kapjuk:

$$439 \leq x + y \leq 445 \text{ vagy } x + y = 442 \pm 3.$$

Hasonlóképpen végezhetők el más műveletek is. Ezt a módszert alkalmazzák, amikor nagyon fontos a pontos eredmény.

A kevésbé fontos számításoknál ***becslést*** alkalmaznak.

Megjegyzendő, hogy ***a szám tizedesjegyeinek*** **nevezzük a tizedes vesszőtől jobbra lévő valamennyi számjegyét.**

Értékes számjegyeknek **nevezzük a szám valamennyi számjegyét a nullától eltérő első jegyétől balra lévő nullát és a jobbra álló, a kerekítés során lecserélt számjegyek helyein álló nullákat leszámítva.**

Például a 0,03074 számban öt tizedesjegy van, de csak négy értékes számjegy: a 3, 0, 7, 4. A Föld átmérőjének $d = 12\,700$ km közelítő értékében nincs tizedesjegy, értékes számjegyből pedig három van: 1, 2, 7.

Adott az $x = 3{,}24$ és az $y = 1{,}4$ közelítő érték. Jelöljük a kerekítésnél elhagyott első számjegyeket kérdőjellel: $x = 3{,}24?$, és $y = 1{,}4?$. Meghatározzuk ezeknek a közelítő értékeknek az összegét és különbségét:

$$\begin{array}{r} 3{,}24? \\ + \\ 1{,}4? \\ \hline 4{,}6?? \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3{,}24? \\ - \\ 1{,}4? \\ \hline 1{,}8?? \end{array}$$

Látható, hogy

a közelítő értékek összeadásakor és kivonásakor annyi értékes számjegyet kell meghagyni, ahány a műveletbe bevont legkevesebb tizedesjegyű számban van.

Összeszorozzuk az előző közelítő értékeket:

$$\begin{array}{r} 3{,}24? \\ \times \\ 1{,}4? \\ \hline ???? \\ 1296? \\ + \\ 324? \\ \hline 4{,}5???? \end{array}$$

A vizsgált példában két értékes számjegyet kell meghagyni. Látható, hogy

a közelítő értékek szorzásakor annyi értékes számjegyet kell meghagyni, ahány a legkevesebb értékes számjeggyel rendelkező tényezőben van.

A közelítő értékek osztásakor is hasonló szabály érvényes.

A kiemelt szabályokat a ***közelítő érték becslési szabályainak*** nevezzük. Ezek a szabályok nem garantálják a közelítő számítások pontosságát, de a legtöbb alkalmazott matematikai feladat megoldásánál használhatók.

A közelítő értékeket gyakran normálalakban írják. Például az $m = 4\,360\,000\,000$ helyett ezt írják: $m = 4{,}36 \cdot 10^9$. Itt csak három értékes számjegy van: 4, 3 és 6, a nullák ismeretlen számjegyeket jelölnek. Az utolsó értékes számjegy, a 6 pontatlan, de ez nem haladja meg az egy helyi értéket. Vagyis

$$m = (4{,}36 \pm 0{,}01) \cdot 10^9 \text{ vagy } m = 4{,}36 \cdot 10^9 \pm 10^7.$$

Az m értékének abszolút hibahatára 10^7. Ezzel kapcsolatban azt mondják, hogy $4{,}36 \cdot 10^9$ az m értéke tízmilliós pontossággal. Az m relatív hibahatára:

$$10^7 : (4{,}36 \cdot 10^9) = \frac{1}{436} \approx 0{,}0023 \text{ vagy } 0{,}23\%.$$

Amikor azt mondják: a Föld tömege $m = 5{,}98 \cdot 10^{21}$ t, ezt úgy értik, hogy az 5,98 közelítő érték, abszolút hibahatára 0,01. Ezért az m közelítő értékének abszolút hibahatára: $0{,}01 \cdot 10^{21} = 10^{19}$ (t), míg a relatív hibahatára:

$$10^{19} : (5{,}98 \cdot 10^{21}) \approx 0{,}00167 \approx 0{,}17\%.$$

Ellenőrizzétek magatokat!

1. Fogalmazzátok meg, mi a közelítő érték abszolút hibája!
2. Mi az abszolút hibahatár?
3. Mi a közelítő érték relatív hibája?
4. Milyen számjegyeket nevezünk értékeseknek?
5. Milyen számjegyeket nevezünk tizedesjegyeknek?
6. Fogalmazzátok meg a közelítő érték becslési szabályát a közelítő értékek összeadása és kivonása esetére!
7. Fogalmazzátok meg a közelítő érték becslési szabályát a közelítő értékek szorzása és osztása esetére!

Oldjuk meg együtt!

1. Határozzátok meg (a hibahatár figyelembevételével) az $x = 1{,}52 \pm 0{,}01$ és $y = 0{,}27 \pm 0{,}02$ közelítő értékek különbségét!

Megoldás. Az adott közelítő értékeket írjátok fel kettős egyenlőtlenségek alakjában:

$$1{,}51 \le x \le 1{,}53 \text{ és } 0{,}25 \le y \le 0{,}29.$$

Szorozzátok meg a második egyenlőtlenséget -1-gyel:

$$-0{,}29 \le -y \le -0{,}25.$$

Adjátok hozzá a kapott kettős egyenlőtlenséget az elsőhöz:

$$1{,}22 \le x - y \le 1{,}28 \text{ vagy } x - y = 1{,}25 \pm 0{,}03.$$

F e l e l e t. $1{,}25 \pm 0{,}03$.

2. A Föld tömege $(5{,}98 \pm 0{,}01) \cdot 10^{27}$ g, a játéklabda tömege $(2{,}5 \pm 0{,}1) \cdot 10^2$ g. Melyik mérés pontosabb?

✓ M e g o l d á s. Meghatározzuk mindkét mérés relatív hibáját:

1) $\frac{0{,}01 \cdot 10^{27}}{5{,}98 \cdot 10^{27}} \cdot 100\,\% \approx 0{,}2\%$; 2) $\frac{0{,}1 \cdot 10^2}{2{,}5 \cdot 10^2} \cdot 100\,\% \approx 4\%$.

Mivel $4\% > 2\%$, ezért a Föld tömege pontosabban van meghatározva, mint a labdáé.

F e l e l e t. A Föld tömege pontosabban van megmérve.

Oldjátok meg szóban!

721. A példákban említett számok közül melyek sorolhatók a pontos és melyek a közelítő értékekhez:
a) az iskolában 900 diák tanul;
b) a Hold tömege $7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg;
c) az úszómedence területe 600 m^2;
d) a tehervonat 60 kocsiból áll;
e) a szabadesés gyorsulása 9,8 m/s^2;
f) a számítógép billentyűzete 113 billentyűből áll, a zongoráé pedig 87-ből;
g) egy papucsállatka éves szaporulata $75 \cdot 10^{108}$ egyedet tesz ki;
h) az afrikai impala antilop 7,5 méteres, a kenguru pedig 12 méteres távolságra képes ugrani;
i) a lecsó 9 komponensből áll?

722. A léc hosszát reggel és délben megmérve különböző értékeket kaptak: 8,234 m és 8,237 m. Milyen a léc hossza? Meghatározható-e valamely közelítő értékének abszolút hibája?

723. A könyv vastagsága $m = 35 \pm 1$ mm. Nevezzétek meg a könyv vastagságának közelítő értékét és ennek abszolút hibahatárát!

724. A nyíltszíni bányából ércet szállító 45 tonnás billenős tehergépkocsi 13 fuvart bonyolított le. Állítható-e, hogy a teherautó 585 t ércet szállított el a bányából?

725. Nevezzétek meg a tizedesjegyeket a következő számokban: 2,325; 0,007; 20,7!

726. Hány értékes számjegy található a következő számokban: 327; 1,005; 0,028; 1001?

727. A Föld térfogata 1 083 000 000 000 km^3. Hány értékes számjegyet tartalmaz ez a közelítő érték?

728. A vízmolekula átmérője 0,0000003 mm. Hány tizedesjegyet és értékes számjegyet tartalmaz ez a közelítő érték?

A szint

729. Kerekítsétek ki a következő számokat:
a) 37,2539 – századnyi pontossággal;
b) 0,02578 – ezrednyi pontossággal;
c) 6 548 371 – ezres pontossággal!

730. Írjátok le kettős egyenlőtlenségek alakjában a kifejezéseket:
a) $4{,}96 \pm 0{,}03$; b) $37{,}9 \pm 0{,}2$; c) $3{,}05 \pm 0{,}01$;
d) 73 ± 1; e) $79{,}25 \pm 0{,}05$; f) $97\,000 \pm 1000$!

731. A hidrogénatom tömege 1,0783 (a. t. e.). Kerekítsétek ezt a számot ezrednyi, századnyi, tizednyi, egységnyi pontossággal, és határozzátok meg a közelítő érték megfelelő abszolút hibáit!

732. Az alma tömege nagyobb 310 grammnál és kisebb 320 grammnál. Nevezzétek meg az alma tömegének közelítő értékét és annak abszolút hibahatárát!

733. Az $\frac{1}{3}$ számot tizedes törtté alakítva meghatározták 0,333 közelítő értékét. Számítsátok ki az abszolút hibáját!

734. Igaz-e, hogy:
a) $\frac{1}{3} = 0{,}33 \pm 0{,}01$; b) $\frac{1}{3} = 0{,}33 \pm 0{,}002$;
c) $\frac{1}{6} = 0{,}166 \pm 0{,}001$; d) $\frac{1}{6} = 0{,}166 \pm 0{,}0005$?

735. A fény sebessége a vákuumban (méter per másodpercben mérve) 299 792 458 ± 2, a hang terjedési sebessége a levegőben 331,6 ± 0,1 m/s. Nevezzétek meg a fény és a hang sebességének közelítő értékét és a megfelelő abszolút hibáját!

736. Ismeretes, hogy $4{,}13 \le a \le 4{,}15$ és $2{,}59 \le b \le 2{,}61$. Határozzátok meg a kifejezések közelítő értékeit és abszolút hibahatárait:
a) $a + b$; b) ab; c) $a - b$!

737. A közelítő érték becslésének szabályát alkalmazva határozzátok meg a következő közelítő értékek összegét, különbségét, szorzatát és hányadosát:

$m = 12{,}31$ és $n = 5{,}407$!

738. Tudva, hogy a hársfa törzsének átmérője 57 cm, a tanuló kiszámította a törzs metszetének területét: 2550,5 cm^2. Helyes-e ez az adat? Ha nem, akkor javítsátok ki!

739. Számítsátok ki a 45 cm átmérőjű dinnye felszínének területét és térfogatát!

740. A négyzet oldala $a = 8 \pm 0{,}5$. Számítsátok ki a területét!

741. A négyzet oldala $a = 0{,}7 \pm 0{,}05$. Számítsátok ki átlójának a hosszát!

B szint

742. A $\frac{2}{3}$ közönséges törtet tizedes törtté alakítva 0,6667-et kaptak. Határozzátok meg ennek a közelítő értéknek az abszolút hibáját!

Határozzátok meg a $\frac{2}{3}$ szám közelítő értékét ezrednyi pontossággal, és számítsátok ki az abszolút hibáját!

743. Határozzátok meg (a hibahatár figyelembevételével) az $a = 3{,}24 \pm 0{,}02$ és a $b = 1{,}17 \pm 0{,}03$ közelítő értékek összegét, különbségét, szorzatát és hányadosát!

744. Ismeretes, hogy $3{,}24 \leq m \leq 3{,}25$ és $1{,}73 \leq n \leq 1{,}74$. Határozzátok meg az $\frac{m}{n}$ tört közelítő értékét!

745. Határozzátok meg a következő számok kerekítése során megengedhető abszolút és relatív hibákat:

a) $2{,}54 \approx 2{,}5$; b) $\frac{2}{3} \approx 0{,}67$; c) $-0{,}327 \approx -0{,}33$;

d) $7{,}52 \cdot 10^5 \approx 7{,}5 \cdot 10^5$; e) $2{,}58 \cdot 10^{-7} \approx 2{,}6 \cdot 10^{-7}$!

746. Bizonyítsátok be, hogy az α kis értékei esetén igaz a $(1 + \alpha)^2 \approx 1 + 2\alpha$ közelítő egyenlőség! Ennek felhasználásával határozzátok meg a közelítő értékeket:

a) $1{,}03^2$; b) $1{,}002^2$; c) $0{,}97^2$; d) $0{,}998^2$!

747. Határozzátok meg a trapéz területét, ha az alapjai $a \approx 1{,}7$; $b \approx 0{,}43$, a magassága pedig $h \approx 0{,}841$!

748. A gepárd 34,5 m/s sebesség elérésére képes. Fejezzétek ki ezt a sebességet kilométer per órában, kerekítsétek ki egész számmá, és határozzátok meg közelítő értékének abszolút hibáját!

749. Bekapcsolható-e az elektromos hálózatba a $44 \pm 0{,}5$ ohm ellenállású készülék, hogy 215 ± 15 V feszültség mellett az áramerősség ne haladja meg a 6 A-t?

750. Adva vannak a $z = 7{,}48 \pm 0{,}01$ és $t = 3{,}24 \pm 0{,}02$ közelítő értékek. Határozzátok meg (a hibahatár pontos figyelembevételével) a kifejezések értékét:

a) $z - t$; b) $z : t$; c) $z^2 + t$!

751. Ismeretes, hogy $x = 2{,}15 \pm 0{,}05$. Határozzátok meg a függvények megfelelő értékét:

a) $f(x) = x^2$; b) $f(x) = (x - 2)^3$; c) $f(x) = (x - 2)^{-2}$!

752. A közelítő érték becslésének szabálya alapján határozzátok meg az $x = 21{,}37$ és $y = 9{,}832$ közelítő értékek összegét, különbségét, szorzatát és hányadosát!

753. Adva vannak az $a = 2{,}23$ és $b = 3{,}75$ közelítő értékek. Határozzátok meg a kifejezések értékét:

a) $a^2 + b$; b) $2a - b$; c) $ab - a^2$!

754. Hasonlítsátok az emberi hajszál d vastagságának és a Nap D átmérőjének mérési pontosságát, ha $d = 0{,}15 \pm 0{,}005$ mm, a $D = 1\,392\,000 \pm 1\,000$ km!

755. A készítési helyéről $1\,000 \pm 20$ m³ betont kell elszállítani. Hány fuvarral tudja az építkezésre szállítani a billenőkocsi a betont, ha platójának térfogata $2{,}25 \pm 0{,}02$ m³?

Ismétlő gyakorlatok

756. Hasonlítsátok össze a számokat:

a) $1{,}3^8$ és $1{,}4^8$; b) $0{,}7^{12}$ és $0{,}8^{12}$;

c) $(-1{,}5)^9$ és $(-1{,}6)^9$; d) $(-0{,}3)^{15}$ és $(-0{,}7)^{15}$!

757. Hány megoldásuk van az egyenleteknek:

a) $x^3 = 8$; b) $x^3 + 8 = 0$; c) $x^3 = 4x$;

d) $x^4 = x + 1$; e) $x^6 = x - 3$; f) $x^7 + x - 3 = 0$?

758. Rajzoljátok meg a függvénygrafikonokat:

a) $y = 1{,}4x^2 + 3$; b) $y = (x + 3)^2 - 2$;

c) $y = x(x - 2) + 1$; d) $y = 5 - x(x - 2)$!

18.§. VÉLETLEN ESEMÉNYEK ÉS A VALÓSZÍNŰSÉGÜK

A modern matematika egyik ága a valószínűségelmélet. Legfontosabb fogalma a *véletlen kísérlet* (megfigyelés), *esemény* (a kísérlet eredménye) és az *esemény valószínűsége*. Vizsgáljunk meg néhány kísérletekkel és egyes következményeikkel – bizonyos eseményekkel – kapcsolatos példát.

Kísérlet	Esemény
Pénzérmét feldobva	Fejet kapunk
Dolgozatírás	12 pontot kapunk
Reggelvárás	Megvirradt
Játékkockadobás	7 pont van a felső oldalon

Az utolsó esemény lehetetlen, mert a játékkocka oldalain nincs hét pont. A 3. esemény biztos, mivel az éjszaka után a reggel következik. Az 1. és a 2. esemény véletlenszerű.

Az esemény *lehetetlen*, ha soha nem következhet be, *biztos*, ha mindig bekövetkezik. Ha az esemény bekövetkezhet vagy elmaradhat, akkor *véletlennek* nevezzük.

Az eseményeket nagy A, B, C, ... betűkkel vagy egy indexes A_1, A_2, A_3,..., A_n betűvel jelölik. Az esemény tartalmát kapcsos zárójelben adják meg. Például a táblázat harmadik eseménye a következőképpen írható le:

$A_3 = \{\text{megvirradt}\}$.

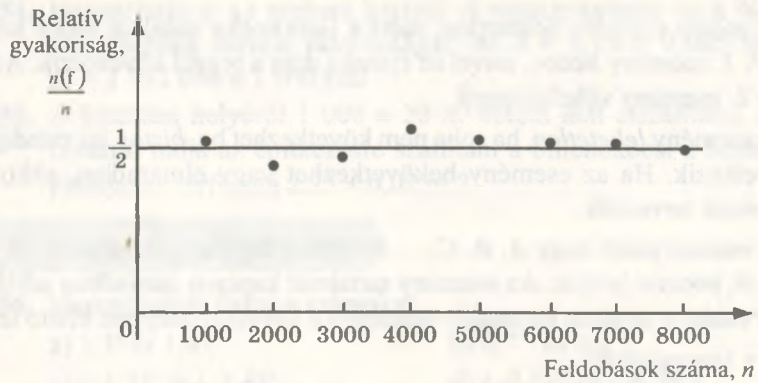
Egy véletlen esemény kapcsán nem jósolható meg, hogy az bekövetkezik vagy nem következik be. Ha az esemény vagy a jelenség tömeges, sokszor bekövetkezik és azonos feltételek mellett, akkor a bekövetkeztének a valószínűsége valamilyen számmal jelölhető.

Megvizsgálunk egy kísérletet: homogén, szimmetrikus pénzérme feldobását annak az oldalának a feljegyzésével, amellyel felfelé esik le. Ez azonos feltételek mellett tetszőleges számban elvégezhető. Az

alábbi táblázatban a kísérlet nyolc dobósorozatának adatai vannak feltüntetve.

Sorozatszám	1	2	3	4	5	6	7	8
Feldobások száma, n	1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000
Fej, $n(f)$	501	986	1495	2036	2516	3004	3504	3997
A fejek dobása relatív gyakorisága $\frac{n(f)}{n}$	0,501	0,493	0,498	0,509	0,503	0,501	0,501	0,500

A táblázat utolsó sorában a sorozatok mindegyike esetében a fejjel felfelé való esések számának az adott sorozatban történt érmefeldobások teljes számának arányai vannak feltüntetve. A jelenséget az ***esemény relatív előfordulási gyakoriságának*** nevezzük. Ha az adott táblázat tartalmát grafikusan ábrázoljuk (122. ábra), akkor láthatóvá válik, hogy a fej megjelenésének viszonylagos gyakorisága a 0,5 szám körül ingadozik és csak kicsit tér el töle.



122. ábra

Ha n kísérletben X esemény m alkalommal fordul elő, akkor az $\frac{m}{n}$ tört X esemény előfordulásának relatív gyakoriságát mutatja. A szám, amely körül ingadozik az esemény előfordulásának relatív gyakorisága, az adott esemény *valószínűségét* fejezi ki, és P betűvel jelölik (az angol *probability* – valószínűség szó nyomán).

A szakkifejezést B. Pascal vezette be. A P. Fermathoz 1654. október 28-án kelt levelében a következőket írta: „Az emberek többsége azt gondolja, hogy amikor valamiről nem rendelkeznek átfogó ismeretekkel (márpedig soha nem tudunk mindent), akkor arról semmit nem tudnak. Meggyőződésem, hogy ez a vélekedés nagyon elhibázott. A részleges tudás is tudás, s a nem teljes meggyőződés is bír valamilyen jelentőséggel, különösen ha ismerem ennek a meggyőződésnek a fokát. Megkérdezhetik: „Mérhető-e számszerűen a meggyőződés foka?" „Természetesen – felelem –, a hazárdjátékosok is így indokolják a nyerésbe vetett hitüket. Amikor a játékos eldobja a kockát, nem tudhatja előre, hány pontja lesz. Valamit azonban tud. Például azt, hogy minden szám – 1, 2, 3, 4, 5, 6 – azonos eséllyel jelenhet meg. Ha egyezményesen egynek vesszük a biztos előfordulást, akkor a hatos – csakúgy, mint a többi öt szám mindegyikének megjelenési valószínűsége a kocka felső lapján az $\frac{1}{6}$ törttel fejezhető ki." Rögvest megjegyzem, hogy az esemény előfordulási valószínűségének (meggyőződés) mértékét valószínűségnek neveztem. Sokat gondolkodtam a megfelelő szó kiválasztásán, s végül ezt találtam a legkifejezőbbnek".

Pascal egyes események valószínűségét kísérletek nélkül határozta meg. Ez akkor valósítható meg, amikor a kísérletek következményei véges halmazt alkotnak és egyenlő a valószínűségük mértéke, azaz a kísérletek lezajlásának feltételei közepette nincs ok annak feltételezésére, hogy a következmények valamelyike a többihez képest többé vagy kevésbé valószínű.

Megvizsgálunk egy **példát**. Egyszer feldobjuk a szabályos, homogén dobókockát (123. ábra) és a leesése után feljegyezzük a felső lapján lévő pontok számát. Ennek a kísérletnek az eredményeként 6 különböző esemény következhet be:

E_1 = {egy pont};
E_2 = {két pont};
E_3 = {három pont};
E_4 = {négy pont};
E_5 = {öt pont};
E_6 = {hat pont}.



123. ábra

A hat esemény átfogja és kimeríti a kísérlet valamennyi lehetséges következményét. Ezek *páros előfordulása összeférhetetlen*, mivel minden alkalommal csak egyféle mennyiségű pont jelenik meg. Mind a hat esemény megtörténte *egyformán lehetséges*, mivel szabályos alakú, homogén anyagú kockáról van szó, és a játékos ügyeskedése is kizárt. Ebben az esetben azt mondják: hatból egy az esélye annak, hogy ezen események valamelyike megvalósuljon.

A vizsgált kísérlet E_1–E_6 eseményeinek mindegyikét eleminek, a teljes halmazukat pedig az elemi eseményterének nevezzük.

Elvégezve egy kísérletet, annak lehetséges eredményei az ***elemi események***. Az elemi események halmazát ***eseménytérnek*** nevezzük, és Ω (ómega) görög betűvel jelöljük.

Ha valamely kísérlet elemi eseménytere n számú, egyenlő eséllyel előfordulható összeférhetetlen eseményből áll, akkor ezek mindegyikének előfordulási valószínűsége $\frac{1}{n}$-nel egyenlő. Például annak a valószínűsége, hogy az eldobott dobókocka felső oldalán 5 pont jelenik meg, $\frac{1}{6}$-dal egyenlő. Annak valószínűsége, hogy a feldobott pénzérme a fej oldallal felfelé esik, $\frac{1}{2}$-del egyenlő. Az *A esemény valószínűségét P(A)* jellel jelöljük. Ha az események közül az elsőt *A* betűvel, a másodikat *B* betűvel jelöljük, akkor $P(A) = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{1}{2}$.

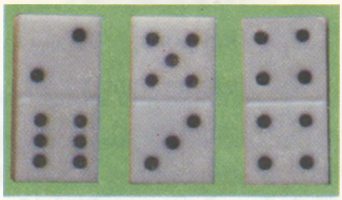
Léteznek nem elemi események. Példaként megvizsgálunk egy ilyen eseményt: C = {8 pontos dominó megjelenése}.

Mivel 28 dominólap létezik, ezért az egy lap kiválasztásával kapcsolatos kísérlet 28 egyenlő esélyű és független következményben merül ki. Vagyis az adott kísérlet eseménytere 28 elemi E_i eseményből áll, ahol $i = 1, 2, \ldots, 28$. A C esemény végbemehet, ha három esemény egyike megvalósul (124. ábra):

1) E_1 = {$\frac{2}{6}$ lapocska megjelenése};

2) E_2 = {$\frac{3}{5}$ lapocska megjelenése};

3) E_3 = {$\frac{4}{4}$ lapocska megjelenése}.



124. ábra

Azt mondják, hogy a C esemény megvalósulásának három elemi esemény (E_1, E_2, E_3) kedvez a lehetséges 28-ból, ezért $P(C) = \frac{3}{28}$.

Megvizsgálunk egy általános esetet. Legyen a kísérletnek véges (n) számú egyenlő esélyű és összeférhetetlen következménye és A az adott kísérlettel kapcsolatos valamely véletlen esemény. Nevezzük az elemi E_n eseményt ***kedvezőnek az A véletlen eseménynek*** szempontjából, ha az E_n esemény bekövetkezte a kísérlet eredményeként A esemény megvalósulásához vezet. Ha az A eseménynek kedvező elemi események száma $n(A)$, akkor az A véletlen esemény valószínűsége a következő képlettel fejezhető ki:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n}.$$

Feladat. A 28 lefordított dominólap közül találomra kiemelnek egyet. Mi a valószínűsége annak, hogy a dominón a következő számú pont jelenik meg:

a) 2 pont (A esemény); b) 4 pont (B esemény); c) 11 pont (D esemény)?

✓ Megoldás. 2 olyan dominó létezik, amelynek lapocskáin két pont van $\left(\frac{0}{2};\frac{1}{1}\right)$, 3 dominón négy pont $\left(\frac{0}{4};\frac{1}{3};\frac{2}{2}\right)$, 1 dominón 11 pont $\frac{5}{6}$ található. Összesen 28 választási lehetőség van, mert bármelyik dominólap választható a 28 közül. Tehát

$$P(A) = \frac{2}{28} = \frac{1}{14}, \quad P(B) = \frac{3}{28}, \quad P(D) = \frac{1}{28}.$$

Megnevezzük a véletlen esemény valószínűségének legfontosabb tulajdonságait.

1. Ha C lehetlen esemény, akkor $P(C) = 0$.

2. Ha B biztos esemény, akkor $P(B) = 1$.

3. Ha X véletlen esemény, akkor $0 \le P(X) \le 1$.

4. Ha E_1, E_2, E_3, ..., E_n olyan elemi események, amelyek kimerítik valamely kísérlet következményeit, akkor

$$P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + \ldots + P(E_n) = 1.$$

A mértanhoz hasonlóan a valószínűségelmélet is *saroktételek*, azaz *axiómák rendszerére épül*. Eközben bevezethetők a valószínűségelmélet alapfogalmai és megvilágíthatók a közöttük lévő összefüggések, megfogalmazhatók a saroktételek. Minden egyéb fogalom és állítás a saroktételek rendszerére épül, az intuíció és tapasztalat mellőzésével. A valószínűségelmélet saroktételekbe foglalása különböző módokon történhet. Ezt tette különböző korokban G. Bolman (1908), Sz. N. Bernstein (1917), R. Mizesz (1919, 1928), A. Lomnickij (1923). A legjobb ilyen saroktételt A. M. Kolmogorov alkotta meg 1929-ben. Ezzel majd a felső tagozatos osztályokban és a felsőoktatási intézményekben ismerkedtek meg.

A saroktételeken alapuló megközelítés lehetővé teszi a valószínűségelmélet széleskörű alkalmazását különböző elméleti és gyakorlati feladatok megoldása során, de kijelöli használhatóságának korlátait is.

Ellenőrizzétek magatokat!

1. Milyen eseményeket nevezünk véletleneknek?
2. Mondjatok példákat véletlen eseményekre!
3. Milyen eseményeket neveznek lehetetleneknek, biztosaknak?
4. Mondjatok példákat elemi eseményterére!
5. Milyen eseményeket neveznek elemieknek? Mondjatok példákat!
6. Mivel egyenlő a véletlen esemény valószínűsége?
7. Mivel egyenlő a biztos esemény valószínűsége? A lehetetlen eseményé?
8. Mit nevezünk a véletlen esemény relatív gyakoriságának?

Oldjuk meg együtt!

1. Adva van két kocka, amelyeknek 2–2 oldala rendre vörös, sárga és zöld színű. Egyszerre vetik el őket és feljegyzik azoknak az oldaluknak a színét, amelyekre esnek. Írjátok le a kísérlet elemi eseményterét!

✓ M e g o l d á s. Ha mindkét kocka a sárga oldalára esett, akkor ezt az eseményt *ss* betűkkel jelöljük. Ha az egyik kocka a sárga, a másik a vörös oldalára esik, az eseményt *sv* betűkkel jelöljük. Ebben az esetben az adott kísérlet elemi eseménytere: $\Omega = \{ss, zz, vv, sz, sv, zv\}$.

2. Egy telefonszám tárcsázása közben a telefonáló elfelejtette az utolsó számjegyet és azt találomra választotta ki. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a helyes számot találta el?

✓ M e g o l d á s. Az összes lehetséges eset $n = 10$, a kedvező események száma $m = 1$. Ezért a keresett valószínűség $P = \frac{1}{10}$.

3. Elvetettek két dobókockát. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a felső oldalaikon lévő pontok összege a) 4; b) 5; c) 8?

✓ M e g o l d á s. Mindegyik vizsgált eseményt olyan kétjegyű számnak feleltetünk meg, amelynek a számjegyei az első és a második kocka leesésekor jelennek meg a felső oldalaikon. A következő esetek lehetségesek:

11, 12, 13, 14, 15, 16,
21, 22, 23, 24, 25, 26,
31, 32, 33, 34, 35, 36,
... ...
61, 62, 63, 64, 65, 66.

Látható, hogy az adott kísérletben az Ω elemi eseménytér 36 elemet tartalmaz.

a) A 4-gyel egyenlő pontok összegét három szám adja: 13, 22 és 31. Van 3 kedvező elemi eseményünk a 36-ból. Ezért a keresett valószínűség:

$$P(4) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

b) Az 5-tel egyenlő pontok összegét 4 pár kocka adja: 14, 23, 32 és 41, így

$$P(5) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

c) A 8-cal egyenlő pontok összegét 5 pár adja: 26, 35, 44, 53, 62, ezért

$$P(8) = \frac{5}{36}.$$

Oldjátok meg szóban!

759. A valószínűségelmélet szempontjából milyen a következő esemény: a) a dobókocka esése után 5 pont lesz a felső oldalán; b) a gyermek február 30-án fog születni; c) a „macska" szó betűinek felcserélésével a „kacsamáj" szót kirakni; d) a találomra kiválasztott kétjegyű szám kisebb lesz 100-nál; e) a nem páros függvény megrajzolt görbéje szimmetrikus lesz a koordináta-rendszer kezdőpontjához viszonyítva.

760. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a dobókocka leesésekor a következő jelenik meg a felső oldalán: a) két pont; b) páros számú pontok; c) 3-mal osztható pontszám?

761. Találomra választanak egy dominólapot. Mekkora a valószínűsége annak, hogy: a) duplát; b) nem duplát választanak!

762. Írjátok le az adott kísérlet elemi eseményterét: a) egy tetszőlegesen kiválasztott tanuló születésnapjának a megállapítása; b) másodfokú egyenlet gyökszámának meghatározása; c) annak megállapítása, hogy hány közös pontja van az azonos koordináta-rendszerben megrajzolt körvonalnak és hiperbolának!

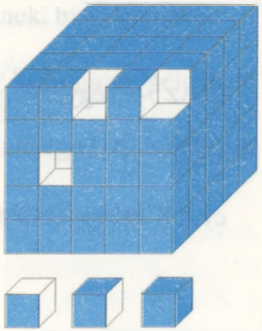
A szint

763. Számítsátok ki annak valószínűségét, hogy mikor születet az osztálytársatok: a) szerdán; b) tavasszal; c) szeptemberben; d) január 1-jén!

764. A 9. A osztályba járó 20 tanuló 25%-a kitűnő előmenetelű. A tanár találomra egy tanulót kiszólít a táblához, hogy bizonyítsa be a szinusztételt. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a felelő kitűnő tanuló?

765. Egy telefonszámot tárcsázva a telefonáló elfelejtette az első számjegyet, és azt találomra ütötte be. Mekkora a valószínűsége annak, hogy eltalálta a helyes számjegyet?

766. Egy minden oldalról festett kockát 125 egyenlő nagyságú kisebb kockára fűrészeltek, és a darabokat egy zsákba szórták. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a zsákból találomra kivett kocka: a) három oldala lesz festett; b) csak két oldala lesz festett; c) csak egy oldala lesz festett (125. ábra)?



125. ábra

767. Külön kártyalapokra az AZONOSSÁG szó betűit írták. Ezután a lapokat összekeverték és találomra húztak egyet. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a kihúzott kártyán: a) az A betű lesz?; b) az O betű lesz; c) az N betű lesz?

768. Egy zacskóban 5 fehér és 7 fekete golyó található. Mekkora a valószínűsége annak, hogy találomra a következőt veszik ki belőle: a) a fehér golyót; b) a fekete golyót?

769. Egy zacskóban 10 összehajtott papírdarab található. Kettőre az van írva, hogy „nem", a többire az, hogy „igen". Mekkora a valószínűsége annak, hogy a találomra kivett papírdarabon az „igen" szócska lesz?

770. Egy dobozban 10 vörös és 5 sárga golyó található. Kivettek belőle egy vörös golyót és félretették. Ezután a dobozból találomra kivesznek még egy golyót. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a kivett golyó sárga lesz?

» 771. A versenyen három iskola tanulói vesznek részt. Az első iskolából 25 tanuló, a másodikból 15 és a harmadikból 10. Mekkora a valószínűsége annak, hogy első helyen az első iskola tanulója végez?

772. Egy utas az 1-es vagy a 3-as villamost várja a megállóban, ahol az 1., 3., 4. és 9. számú villamosok állnak meg. Tudva, hogy a villamosok azonos gyakorisággal érkeznek a megállóba, számítsátok ki a valószínűségét annak, hogy elsőként az a villamos érkezik a megállóba, amelyikre az utas vár!

B szint

773. A lottó 1000 szelvényére egy 1000 hrivnyás, tíz 200 hrivnyás, ötven 100 hrivnyás, száz 50 hrivnyás nyeremény jut. A fennmaradó szelvények nem nyerők. Számítsátok ki egy legalább 100 hrivnyás nyeremény valószínűségét!

» 774. Egy alkatrészszállítmányban 75 alkatrész első osztályú, 15 másodosztályú, 8 harmadosztályú és 2 alkatrész selejtes. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a találomra kiválasztott alkatrész első- vagy másodosztályú lesz?

775. Tíz 1-től 10-ig számozott kártya közül kivesznek egyet. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a rajta lévő szám 7-nél kisebb de 3-nál nagyobb lesz?

776. Egy dobozban 1-től 30-ig számozott 30 zseton van. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a dobozból találomra elsőként kivett zseton száma nem fogja tartalmazni a 6-os számjegyet?

» 777. Tizenöt 1-től 15-ig számozott kártya közül kivesznek egyet. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a kihúzott kártya száma: a) 3-nak többszöröse; b) 4-nek többszöröse lesz?

778. A tudományos kutatóintézet 100 munkatársa közül 90 beszél angolul, 85 németül, 80 mindkét nyelven. Számítsátok ki a valószínűségét

annak, hogy az intézet találomra kiválasztott munkatársa: a) beszél angolul vagy németül; b) nem beszéli sem az angolt, sem a németet!

779. Két játékkockát dobnak. Mekkora a valószínűsége annak, hogy legalább az egyik felső oldalán hat pont lesz?

780. Találomra elvesznek egy dominólapot. Mekkora a valószínűsége annak, hogy: a) összesen 9 pont lesz rajta; b) több mint 9 pont lesz rajta; c) kevesebb mint 9 pont lesz rajta?

781. Egy minden oldalról festett kockát 1000 egyenlő darabbá fűrészeltek, és a darabokat egy zsákba szórták. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a zsákból találomra kivett kocka: a) legalább egy oldala lesz festett; b) csak két oldala lesz festett?

782. Számítsátok ki annak a valószínűségét, hogy a találomra kiválasztott kétjegyű szám osztható lesz 5-tel!

783. Egyszerre dobnak fel két egyforma pénzérmét. Számítsátok ki a leesésükkor bekövetkező esemény valószínűségét: a) A = {egy fej és egy írás}; b) B = {legalább egy fej}!

784. A lövész változatlan feltételek mellett 5 lövéssorozatot ad le a céltáblára. Mindegyik sorozat 100 lövésből áll. A lövéseredményeket táblázatba foglalták. Számítsátok ki a céltábla eltalálásának relatív gyakoriságát: a) mindegyik sorozatban; b) az első 300 lövés során; c) az utolsó 300 lövés során; d) az összes 500 lövés során! Fogalmazzátok meg a céltábla eltalálásának valószínűségi hipotézisét!

Sorozatszám	1	2	3	4	5
Találatszám	69	64	72	78	65

785. Tetszőlegesen kiválasztott 500 alkatrész átvizsgálása után kiderült, hogy 5 selejtes. Hány selejtes alkatrész fordulhat elő egy 3 500 darabból álló tételben?

786*. Vizsgáljátok meg a különböző korú fiúk és lányok eloszlását a háromgyerekes családokban! Tekintsétek úgy, hogy egyenlő a fiúk és lányok születésének esélye!

Ismétlő gyakorlatok

787. A függvény az $f(x) = -5x + 3$ képlettel van megadva. Határozzátok meg: $f(0,1)$; $f(-2,5)$; $f(-10)$; $f(0,3)$; $f(-1,2)$!

788. Oldjátok meg az egyenleteket:
a) $1 - 4x - 5x^2 = 0$; b) $-3x^2 + 5x + 2 = 0$!

789. Oldjátok meg az egyenlőtlenségeket:
a) $(3x - 1)(x + 3) > x(1 + 5x)$; b) $x^2 + 8x + 8 \leq 3x^2$!

790. Ábrázoljátok a következő függvények görbéit: a) $y = |x^2 - x|$; b) $y = x^2 - |x|$!

19.§. STATISZTIKAI ISMERETEK

Az alkalmazott matematikának a tömeges jelenségek mennyiségi jellemzőivel foglalkozó ágát ***matematikai statisztikának*** nevezzük (lat. *status* – állapot, helyzet).

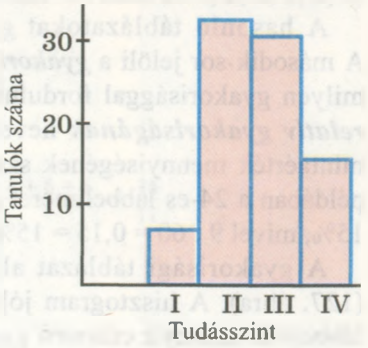
1. példa. Az egyik iskola 87 kilencedikes tanulója közül – dolgozatírás alapján – 7-nek az érdemjegye az I. tudásszintnek, 33-nak a II. tudásszintnek, 31-nek a III. tudásszintnek és 16-nak a IV. tudásszintnek felel meg. A számszerű értékelés az alábbi táblázatban foglalható össze.

Tudásszint	I	II	III	IV
Tanulók száma	7	33	31	16

Az adatok szemléletesen oszlopdiagram alakjában is feltüntethetők (126. ábra).

A statisztikában az oszlopdiagramot ***hisztogramnak*** nevezik. (gör. *hystós* – oszlop, *gramma* – megírás).

A vizsgált példában 87 tanulóról volt szó. Természetesen a feladat sokkal nehezebb, ha olyan ***tömegjelenségeket*** kell vizsgálni, amelyben ezer vagy akár millió objektum szerepel. Például a cipőipar szeretné tudni, hogy mekkora



126. ábra

igény van a különböző méretű lábbelikre. Hogyan oldható meg ez a kérdés? Több tízmillió személy – nő és férfi – megkérdezése hosszadalmas és költséges. Ezért úgynevezett ***mintát*** vesznek, véges halmazt állítanak össze a vizsgálatok független eredményeiből. Az adott esetben csak néhány tucat vagy néhány száz reprezentatívan kiválasztott személyt kérdeznek meg.

2. példa. Tételezzük fel, hogy 60 nő megkérdezése nyomán a cipőjük méreteiket táblázatba foglalták.

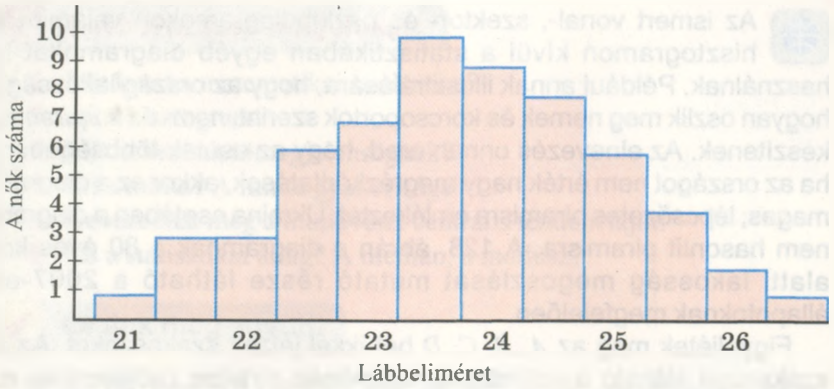
23,5	24	23,5	23	24,5	23	22,5	24,5	22,5	23,5	23,5	23,5
25,5	21	24	25	23,5	22	23	24,5	23	24,5	23	24,5
25	24	21,5	23,5	24,5	22,5	22	23,5	26,5	25,5	25	26
24	23	24	24,5	22	24	23,5	21,5	23,5	25	24	22,5
25,5	21,5	24,5	26	25	23,5	22,5	24	23	22,5	24	25

Ez 60 mintavételt (adatrögzítést) jelent. A célszerűség kedvéért ezeket a lábbeli mérete szerint osztályokba csoportosítják, és rögzítik, hogy hány mintavételt tartalmaz az osztályok mindegyike.

Lábbeliméret	21	21,5	22	22,5	23	23,5	24	24,5	25	25,5	26	26,5
Nők száma	1	3	3	6	7	10	9	8	6	4	2	1

A hasonló táblázatokat ***gyakorisági táblázatoknak*** nevezzük. A második sor jelöli a ***gyakoriságot***; vagyis azt, hogy az adott értékek milyen gyakorisággal fordulnak elő a mintában. A mintavételi érték ***relatív gyakoriságának*** nevezzük az értékgyakoriság és az összes mintaérték mennyiségének százalékban kifejezett arányát. A vizsgált példában a 24-es lábbeliméret gyakorisága 9, relatív gyakorisága pedig 15%, mivel $9 : 60 = 0{,}15 = 15\%$.

A gyakorisági táblázat alapján megszerkeszthető a hisztogram (127. ábra). A hisztogram jól szemlélteti, hogy a különböző méretű lábbeliből mennyit célszerű gyártani. Érthető, hogy ezek csak közelítő, valószínűsíthető adatok, de a gyakorlatban általában elegendőek.



127 ábra

A mintát a ***centrális tendencia*** mérőszámaival: módusszal, mediánnal és átlaggal jellemzik.

A ***módusz*** – a mintában leggyakrabban előforduló érték (legnagyobb gyakoriság).

A ***medián*** – a minta értékeinek rendezett halmazát kétfelé vágó érték.

Az ***átlag*** – a minta összes értékeinek számtani középarányosa.

Adva van a következő minta: az 1, 3, 2, 4, 5, 2, 3, 4, 1, 6, 4. (*)

Rendezzük növekvő sorrendbe: 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 6.

Az adott minta módusza 4, mivel a 4 fordult elő legtöbbször (háromszor).

A minta mediánja 3, mert a 3 szám vágja kétfelé a rendezett sort: előtte és utána a rendezett minta azonos számú tagja található.

Ha a rendezett minta értékeinek a száma páros, akkor a mediánja két középső értékének félösszegével lesz egyenlő. Például az 1, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 6, 6, minta esetében a medián

$$m = \frac{3+4}{2} = 3{,}5.$$

A minta átlaga (*):

$$\frac{1+1+2+2+3+3+4+4+4+5+6}{11} = \frac{35}{11}.$$

A minta lehet módusz nélküli, például

4, 5, 6, 7, 8;

lehet két módusza:

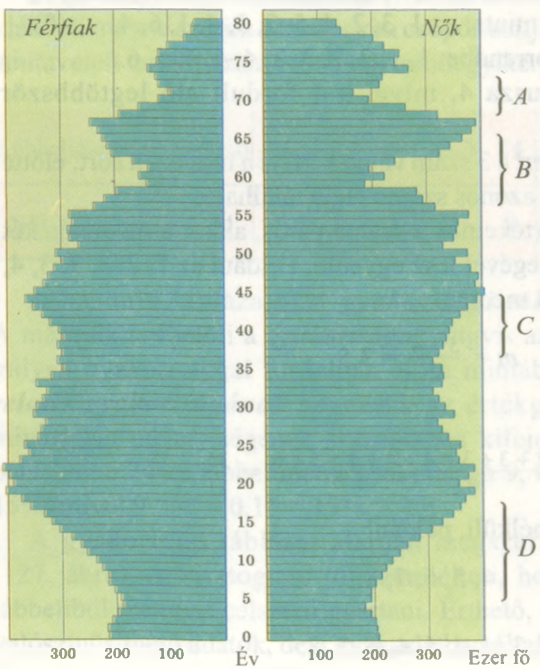
2, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 8.

Az ismert vonal-, szektor- és oszlopdiagramokon valamint a hisztogramon kívül a statisztikában egyéb diagramokat is használnak. Például annak illusztrálására, hogy az ország lakossága hogyan oszlik meg nemek és korcsoportok szerint, *nem- és korpiramist* készítenek. Az elnevezés onnan ered, hogy az esetek többségében, ha az országot nem érték nagy megrázkódtatások, akkor ez a diagram magas, lépcsőzetes piramisra emlékeztet. Ukrajna esetében a diagram nem hasonlít piramisra. A 128. ábrán a diagramnak a 80 éves kor alatti lakosság megoszlását mutató része látható a 2007-es állapotoknak megfelelően.

Figyeljétek meg az *A*, *B*, *C*, *D* betűkkel jelzett szakaszokat. Az *A* szakaszon látható a születések számának hirtelen csökkenése az 1931–1933-as időszakban. Mivel magyarázható az Ukrajna történetében előforduló, a diagramon feltüntetett negatív népesedési jelenség?

Meg kell tanulnotok „olvasni" a hasonló diagramokat és levonni belőlük a következtetéseket.

Igaz-e, hogy Ukrajnában több fiú születik mint lány, s hogy 25 éves kor fölött kevesebb a férfi, mint a nő?



128. ábra

Ellenőrizzétek magatokat!

1. Mit kutat a matematikai statisztika?
2. Mi a hisztogram?
3. Mit nevezünk tömegjelenségnek?
4. Mi a minta? A minta gyakorisága?
5. Nevezzétek meg a mintavétel centrális tendenciáját!
6. Mi a statisztikai átlag? A medián, a módusz?

Oldjuk meg együtt!

1. Az Ukrajinszkij márkájú sajt 20 darabjának zsírtartalom szerinti vizsgálatának eredményéből a következő adatok derültek ki.

Zsírtartalom, %	44	45	46	47	48
Vizsgálatszám	1	4	5	7	3

Határozzátok meg a minta centrális tendenciáját!

✓ M e g o l d á s. Az adott minta módusza 47, mivel ez az érték fordul elő legnagyobb gyakorisággal (7-szer).

Mivel a minta értéke páros szám, ezért a mediánja a két középső értékének – a tízesnek és a tizenegyesnek – a félösszegével egyenlő, mert a minta 20 elemből áll. Ezeknek a számoknak (44; 45; 45; 45; 45; 46; 46; 46; 46; 46; 47...) a mintában a 46 és 47 felel meg. Vagyis $(46 + 47) : 2 = 46{,}5$ a minta mediánja.

Meghatározzuk a minta átlagát:

$$\frac{44 \cdot 1 + 45 \cdot 4 + 46 \cdot 5 + 47 \cdot 7 + 48 \cdot 3}{20} = \frac{927}{20} = 46{,}35.$$

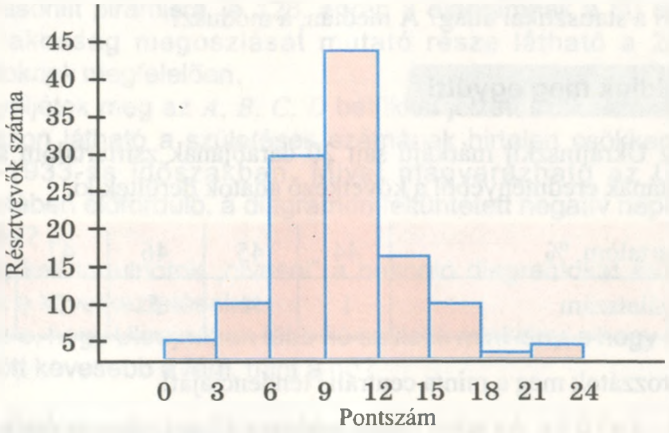
F e l e l e t. Módusz 47; medián 46,5; mintaátlag 46,35.

2. A matematikai olimpián öt tanuló 0-tól 3 pontig teljesített, 4-től 6-ig tíz tanuló, 7-től 9-ig harminc tanuló, 10-től 12-ig negyvennégy tanuló, 13-tól 15-ig tizenhat, 16-tól 18-ig tíz, 19-től 21-ig kettő és 22-től 24-ig három tanuló. Készítsetek gyakorisági táblázatot, és rajzoljátok meg a megfelelő hisztogramot!

✓ M e g o l d á s. A gyakorisági táblázat a következőképpen néz ki:

Pontszám	0 – 3	4 – 6	7 – 9	10 – 12	13 – 15	16 – 18	19 – 21	22 – 24
Résztvevők száma	5	10	30	44	16	10	2	3

A megfelelő hisztogram a 129. ábrán látható



129. ábra

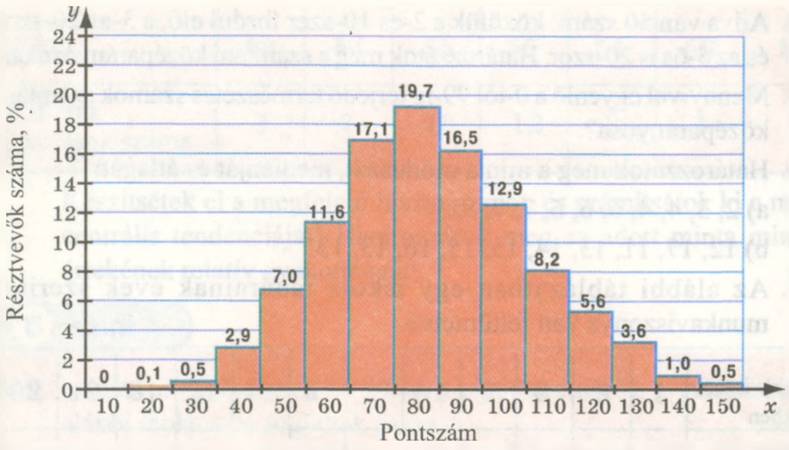
Oldjuk meg együtt!

791. Határozzátok meg a minta móduszát, mediánját és átlagát:
a) 3, 3, 4, 5, 5, 6, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 10, 11;
b) 9, 10, 10, 11, 12, 12, 12, 13, 15, 15, 16, 17!

792. A *Kenguru* elnevezéssel meghirdetett pályázaton 2000 *Kadét* szintű pályázó vett részt. A 130. ábrán látható a résztvevők száma (%) és az általuk szerzett pontok száma közötti megfeleltetés. Milyen információ szűrhető le a hisztogramból a pályázat eredményeit illetően?

793. Mutassátok meg a minta centrális tendenciáját és mindegyik értékének relatív gyakoriságát, ha a minta az alábbi táblázattal van megadva!

−30°	−20°	−10°	0°	10°	20°	30°
1	3	6	17	13	8	2



130. ábra

A szint

794. Számítsátok ki valamennyi olyan x egész szám számtani középarányosát, amelyek:

a) $10 \leq x \leq 90$; b) $-10 < x < 40$; c) $-n < x < n$!

» **795.** Adva van 100 szám; közülük a 2-es szám 15-ször fordul elő, a 4-es 40-szer, a 8-as 20-szor, a 9-es 20-szor, a 10-es 5-ször. Számítsátok ki számtani középarányosukat!

796. Miután megmérték 40 tanuló magasságát centiméterekben, az alábbi gyakorisági táblázatot állították össze.

Magasság, cm	162	163	164	165	166	167	168	169	170
Tanulók száma	3	5	4	2	6	10	6	3	1

Szerkesszétek meg a megfelelő hisztogramot! Határozzátok meg valamennyi érték relatív gyakoriságát!

» **797.** Az alábbi táblázat alapján rajzoljátok meg a rajzkörbe beiratkozott tanulók születési év szerinti megoszlásának hisztogramját!

Születési év	2000	2001	2002	2003
Tanulók száma	1	20	3	2

798. Adva van 50 szám: közülük a 2-es 10-szer fordul elő, a 3-as 20-szor és az 5-ös is 20-szor. Határozzátok meg a számtani középarányosukat!

799. Mennyivel egyenlő a 0-tól 99-ig terjedő természetes számok számtani középarányosa?

800. Határozzátok meg a minta móduszát, mediánját és átlagát:

a) 2, 3, 4, 4, 6, 6, 6, 7, 7, 8;

b) 12, 17, 11, 13, 14, 15, 15, 16, 13, 13!

801. Az alábbi táblázatban egy iskola tanárainak évek szerinti munkaviszonya van feltüntetve.

Munkaviszony években	1	2	3	7	10	12	13	14	17	18	21	26
Tanárok száma	1	3	2	1	3	4	1	2	3	2	1	1

Határozzátok meg az adatminta móduszát, mediánját és átlagát!

802. Az osztály tanulói dolgozatot írtak algebrából. Közülük 4 diák négyes osztályzatot kapott, 16 hármast, 12 kettest és 3 egyest. Foglaljátok táblázatba az adatokat és rajzoljatok a felhasználásukkal kör- és oszlopdiagramot!

803. Miután meghatározták 50 nő felsőruházatának a méreteit, a kapott adatokat az alábbi táblázatba írták.

50	44	50	48	54	46	52	48	54	52
48	48	52	50	46	50	54	48	56	50
52	48	42	56	50	48	50	46	54	48
46	46	48	48	52	48	56	50	52	46
52	48	50	54	50	50	54	44	58	46

Készítsetek gyakorisági táblázatot, és rajzoljátok meg a megfelelő hisztogramot!

804. Hogy megtudják, hány darab és milyen méretű sapkát kell varrni, 35 kiválasztott katonaiskolai növendék fejének a kerületét mérték meg centiméterekben.

Az alábbi adatokat kapták.

Méret	53	54	55	56	57	58	59
Katonak iskolások száma	1	7	10	12	3	1	1

Készítsétek el a megfelelő hisztogramot, és számítsátok ki a minta centrális tendenciáját! Határozzátok meg az adott minta minden értékének relatív gyakoriságát!

B szint

805. Miután megkérdeztek 60 férfit a cipőméretükről, a válaszokat az alábbi táblázatba foglalták össze.

27,5	28	25,5	28	29	28,5	26	28	27,5	29,5	26,5	30,5
26,5	27,5	29,5	27,5	26	30	27,5	27	29	27	28,5	27,5
29,5	25,5	27	28,5	28	27	28	25	26	28	30	27
27	28,5	29	26	26,5	28,5	26,5	27,5	28	29,5	26,5	29
28	27,5	28,5	27,5	29	27	28	29	27	26,5	28,5	27,5

Az adatok alapján szerkesszetek gyakorisági táblázatot, és készítsétek el a megfelelő hisztogramot! Határozzátok meg a minta minden értékének gyakoriságát és relatív gyakoriságát!

806. A tornaórán 11 kilencedik osztályos lány magasugrásban a következő eredményeket érte el: 90 cm, 125 cm, 125, cm, 130 cm, 130 cm, 135 cm, 135 cm, 135 cm, 135 cm, 140 cm, 140 cm. Melyik eredmény jellemzi legjobban a lányok fizikai felkészültségét?

807. A matematikai olimpián hat tanuló a feladatok megoldásával 3 pontnál kevesebbet szerzett, 10 tanuló 3-tól 6 pontig, harminckét tanuló 7-től 9-ig, negyvenöt tanuló 10-től 12-ig, tizenhét tanuló 13-tól 15-ig, nyolc tanuló 16-tól 18-ig, öt tanuló pedig 18 pont fölött teljesített. Készítsetek az eredmények alapján gyakorisági táblázatot, szerkesszetek megfelelő hisztogramot!

808. Annak kiderítése érdekében, hogy milyen gyakran fordulnak elő magánhangzók az ukrán nyelvben, számoljátok meg, hány magánhangzót jelölő betű található a különböző szövegekben. Tarasz

Sevcsenko *Zapovit* című művében megszámolták a magánhangzókat, és a kapott adatokat az alábbi táblázatba jegyezték be (az öt vonás 𝍸 az 5-ös számot jelöli). Szerkesszetek a táblázat alapján hisztogramot! Határozzátok meg a betűhalmaz centrális tendenciáját! Keressetek hasonló terjedelmű fizikai, kémiai, történelmi, matematikai szöveget, és az ugyanolyan összetételű magánhangzókészlet alapján állapítsátok meg, hogy megmarad-e a meghatározott tendencia!

а	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸	20
е	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 ||||	24
є	||	2
и	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 ||	22
і	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |	21
ї	||||	4
о	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |||	48
у	𝍸 𝍸 𝍸	15
ю	𝍸	5
я	𝍸 ||	7

809. Egy pékség kilós kenyereket süt. A sütőüzemben tartott ellenőrzéskor kiderült, hogy száz kenyér közül az előírt 1 kg-nál háromnak 31–40 grammal kevesebb a tömege, tizenötnek 21–30 grammal, húsznak 11–20 grammal, harmincnak 1–10 grammal; tizenhét kenyérnek ugyanakkor 1–9 grammal, kettőnek 10–19 grammal nagyobb volt 1 kg-nál a tömege. Rajzoljatok gyakorisági diagramot, és készítsetek megfelelő hisztogramot!

810. Harminc találomra kiválasztott üzlet napi bevétele (1000 hrivnyában kifejezve) a következő.

42	24	49	76	45	27	39	21	58	40
28	78	44	66	20	62	70	81	7	68
99	76	63	87	65	104	46	20	72	93

Készítsetek 5 intervallumos gyakorisági táblázatot, és rajzoljatok megfelelő hisztogramot!

Ismétlő gyakorlatok

811. Oldjátok meg az egyenlőtlenségeket:

a) $\frac{x+7}{x-3} < 0$; b) $\frac{x+4}{x-5} > 0$;

c) $\frac{2-z}{z+3} \leq 3$; d) $\frac{5-y}{y+12} \geq 7$!

812. Száz első évfolyamos egyetemista közül 60 tanul angolt, 30 németet, 10 franciát. Határozzátok meg annak valószínűségét, hogy az évfolyam találomra kiválasztott diákja németet vagy angolt tanul!

813. Adva vannak a következő közelítő értékek: $a = 1{,}83 \cdot 10^6$ és $c = 5{,}36 \cdot 10^7$.

A becslés szabályának felhasználásával számítsátok ki a kifejezések értékét:

a) $a + c$; b) ac; c) $c - a$!

814. Az alumínium sűrűsége $2{,}7 \cdot 10^3$ kg/m^3. Határozzátok meg a tömegét annak az alumínium-kockának, amelynek éle:

a) 0,2 m; b) 10^{-3} m; c) $2{,}5 \cdot 10^{-2}$ dm!

815. Hieron király aranyból és ezüstből készült koronája 10 kg-ot nyomott. A vízben a súlya 99,55%-a a levegőn mért súlyának. Tudva azt, hogy 1 kg arany a vízben $\frac{9}{77}$ kg-ot veszít a súlyából, az ezüst pedig a levegőn mért súlyának $9\frac{11}{12}$ %-át, számítsátok ki, mennyi aranyat és mennyi ezüstöt használt fel az ötvös a korona elkészítéséhez!

OLDJÁTOK MEG ÖNÁLLÓAN A FELADATOKAT!

I. változat

1°. Adva van a következő minta: 7, 5, 4, 6, 3, 4, 7, 3, 8, 5, 5, 6, 6, 5. Határozzátok meg a minta móduszát, mediánját és átlagát! Készítsétek el a megfelelő hisztogramot!

2•. A termék árát először 10%-kal emelték, majd 20%-kal csökkentették. Hogyan és hány százalékkal változott a termék ára a két átárazás következtében?

II. változat

1°. Adva van a következő minta: 1, 1, 3, 3, 5, 4, 4, 2, 3, 6, 3, 4, 5, 6, 7. Határozzátok meg a minta móduszát, mediánját és átlagát! Készítsétek el a megfelelő hisztogramot!

2•. A betétes 1000 hrivnyát tett be a bankba 17%-os éves kamatra (kamatos kamatra). Hány hrivnya kamatot kell felszámolnia a banknak a betét után 3 év múlva?

III. változat

1°. Adva van a következő minta: 3, 2, 3, 5, 4, 7, 6, 3, 4, 5, 5, 4, 6, 3. Határozzátok meg a minta móduszát, mediánját és átlagát! Készítsétek el a megfelelő hisztogramot!

2•. Mennyi 10 százalékos és 30 százalékos savoldatot kell összekeverni, hogy 8 kg 15 százalékos oldatot kapjunk?

IV. változat

1°. Adva van a következő minta: 6, 5, 8, 4, 8, 9, 7, 5, 5, 7, 6, 7, 7, 6. Határozzátok meg a minta móduszát, mediánját és átlagát! Készítsétek el a megfelelő hisztogramot!

2•. A termék árát először 20%-kal csökkentették, majd 10%-kal növelték. Hogyan és hány százalékkal változott a termék ára a két átárazás következtében?

A FEJEZET TARTALMÁNAK ÖSSZEFOGLALÁSA

A *modell* speciálisan elkészített objektum, amely tükrözi az eredeti tárgy tulajdonságait (fr. *modéle* – másolat, mintadarab). A matematikai modelleket függvények, egyenletek, egyenlőtlenségek vagy ezek rendszerei képezik.

Sok alkalmazott matematikai feladat megoldása kamatszámításra, valószínűség-számításra, statisztikai adatok elemzésére vezethető vissza.

A *százalék* egy századrész: 1% = 0,01. A legegyszerűbb százalékszámítások: a kamatszámítás és százalékarány-számítás.

A kamatos kamat képlete:

$$A_n = A_0\left(1+\frac{P}{100}\right)^n.$$

Véletlen esemény olyan esemény, amely előfordulhat vagy elmaradhat.

Ha n számú kísérletből X esemény m alkalommal következik be, akkor az $\frac{m}{n}$ tört határozza meg X esemény relatív előfordulási gyakoriságát. Az a szám, amely körül az esemény relatív előfordulási gyakorisága mozog, határozza meg az esemény valószínűségét, és P betűvel jelölik (az angol *probability* – valószínűség szó nyomán).

A *matematikai statisztika* az alkalmazott matematikának a tömeges jelenségek mennyiségi jellemzőivel foglalkozó ága. A statisztikai adatokat leggyakrabban *mintavétellel* – megfigyelések független eredményeinek véges halmazával – határozzák meg. A mintát rendezik, gyakorisági táblázatba foglalják, amelynek alapján megfelelő diagramot vagy hisztogramot szerkesztenek.

A minta centrális tendenciájának mérőszámai:

a) *átlag* – a minta összes értékeinek számtani közepárányosa;

b) *módusz* – a mintában leggyakrabban előforduló érték;

c) *medián* – a minta értékeinek rendezett halmazát kétfelé vágó érték.

MATEMATIKATÖRTÉNET

Az *alkalmazott matematika* több ezer éve létezik. Az ókori Egyiptomban a tudósok foglalkoztak a mezők területének, az épületek térfogatának számításaival. Ez alkalmazott matematika volt. Az elméleti (tiszta) matematika csak az i. e. V–IV. században kezdett kialakulni az ókori Görögországban.

Az egyes matematikai modelleket a tudósok még az ókorban alkalmazták. A *matematikai modell* és *matematikai modellezés* fogalmakat csak a XX. században kezdték el széles körben alkalmazni a kibernetika fejlődésével párhuzamosan.

A *százalék* fogalmat korábban kizárólag a pénzügyi számításokban alkalmazták a kamat jelölésére. Ezt a következőképpen fogalmazták meg: „A kamat a meghatározott időre betétbe helyezett minden száz rubel után járó nyereség." A „tőke" fogalmat L. Pisano vezette be, míg a „%" jel a XV. századi itáliai munkákban jelenik meg először. A kamatos kamat számításával kapcsolatos első táblázatot S. Stevin (1548–1620) németalföldi matematikus alkalmazta a XVI. században. Ő alkalmazta elsőként a tizedes törteket Európában.

A mennyiségek *közelítő értékeivel* a tudósok már 2 000 évvel ezelőtt foglalkoztak. A közelítő számítások tudományos elméletét a XX. században alkották meg. Megalapozója az orosz O. M. Krilov (1863–1945) matematikus és hajóépítő mérnök volt.

A véletlen események egyes tulajdonságait L. Pacioli (1445–1514) és D. Cardano (1501–1576) fedezték fel a szerencsejátékok kutatása közben.

A *valószínűség-elméletet* mint matematikai ágat P. Fermat (1601–1665) és B. Pascal (1623 –1662) francia tudósok alkották meg.

A statisztikai adatok gyűjtését és elemzését az emberiség régen kezdte. Kínában népszámlálásokat már több mint 4 ezer évvel ezelőtt tartottak. A Kijevi Ruszban 1245-ben volt népszámlálás.

Jelentős mértékben hozzájárult a matematikai statisztika fejlődéséhez W. Petty, A. Moivre, L. Euler, J. Bernoulli, P. Laplace, S. Poisson.

Az Orosz Birodalomban a XIX. században a statisztikai problémákkal olyan ukrán tudósok is foglalkoztak, mint V. J. Bunyakovszkij és M. V. Osztrogradszkij.



M. V. Osztrogradszkij
(1801–1862)

M. V. Osztrogradszkij a Poltava környéki Pasenna faluban született, tanulmányait a Poltavai Gimnáziumban kezdte, majd a Harkivi Egyetemen és Párizsban folytatta; tagja volt az Orosz Akadémiának, a Turini Akadémiának, a Római Akadémiának, az Amerikai Tudományos Akadémiának, levelező tagja volt a Párizsi Akadémiának.

Osztrogradszkij alapvető eredményeket ért el a matematikai analízis, az elméleti mechanika, a valószínűségelmélet, a matematikai fizika, a ballisztika, a hőtan terén. Megírta az *Égi mechanika* című tankönyvet. Sok figyelmet szentelt a közelítő számítás és százalékszámítás elméletének. Kidolgozta az áruselejtezés statisztikai módszerét.

Osztrogradszkijnak emlékműve van Poltavában.



M. P. Kravcsuk
(1892–1942)

Az alkalmazott matematika fejlődésében jelentős szerepet játszott **M. P. Kravcsuk**.

A volinyi Csovnica községben született, a lucki gimnázium elvégzése után a Kijevi Egyetemen szerzett diplomát. 1925-ben professzori címet kapott, 1929-től az Összukrajnai Tudományos Akadémia tagja, annak tudományos titkára, a statisztikai bizottság vezetője. 1938-ban a kommunista rendszer koholt vádak alapján elítélte. Kolimában halt meg.

Kravcsuknak emlékművet állítottak Kijevben.

FELKÉSZÜLÉS A TÉMAISMERETI ÉRTÉKELÉSRE

3. sz. tesztfeladat

1. A bank 15% éves kamatot fizet a betéteseinek. Mennyi pénzt kell a bankba betenni, hogy egy év múlva 3000 hrivnya nyereség képződjön:
   a) 10 000 hrivnya; b) 20 000 hrivnya;
   c) 30 000 hrivnya; d) 45 000 hrivnya?
2. Az 1 és 20 közötti egész számok közül megneveznek egyet. Mekkora a valószínűsége annak, hogy ez a szám 20 osztója lesz:
   a) 0,3; b) 0,4; c) 0,5; d) 0,6?
3. A $-10 < x < 40$ intervallumba tartozó valamennyi egész szám számtani középarányosa:
   a) 10; b) 15; c) 20; d) 30.
4. Október első tíz napja során a reggel 7 órakor mért hőmérséklet: 6 °C, 8 °C, 8 °C, 7 °C, 5 °C, 8 °C, 6 °C, 7 °C, 8 °C, 8 °C. Határozzátok meg a minta móduszát:
   a) 7 °C; b) 6 °C; c) 8 °C; d) 5 °C!
5. Határozzátok meg az 1, 7, 5, 7, 3, 7, 1, 8, 3 minta mediánját:
   a) 1; b) 7; c) 5; d) 3!
6. A cirkusz porondja területének kiszámításához használt matematikai modell képlete:
   a) $S = R^2$; b) $C = 2\pi R$; c) $S = \pi R^2$; d) $C = 4R$.
7. Milyen lesz az oldat koncentrációja, ha 5 kg vízhez 560 g sót adnak hozzá:
   a) 17%; b) 1%; c) 11%; d) 16% ?
8. Hány százalékkal változik a nullától különböző kifejezés értéke, ha azt háromszorosára növelik:
   a) 100%-kal; b) 200%-kal; c) 300%-kal; d) 400%-kal?
9. A zacskóból kivették a benne lévő mogyoró felét, majd a maradék felét, majd annak is a felét, végül az utolsó maradék felét. Ezt követően a zacskóban 5 mogyoró maradt. Hány mogyoró volt eredetileg a zacskóban:
   a) 80; b) 40; c) 75; d) 60?
10. A sakkozó elvesztett egy sakkfigurát. Mekkora a valószínűsége annak, hogy ez a figura a bástya:
    a) 0,5; b) 0,025; c) 0,0625; d) 0,125?

Típusfeladatok a 3. sz. dolgozathoz

1°. A dobozban 20 kék papírba és 80 piros papírba csomagolt csokoládé van. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a dobozból találomra kivett csokoládé kék csomagolású lesz?

2°. Afrika területe 30 065 000 km² vagy 20,3%-a a szárazföldnek. Határozzátok meg a szárazföld területét!

3°. A betétes 5000 hrivnyát tett be a bankba 14%-os kamatra. Mennyi pénze lesz a betétesnek 3 év múlva, ha nem veszi ki a kamatokat?

4•. Oldjátok meg a feladatot vázlat és egyenlet alakú matematikai modell készítésével! A 90 m hosszú drótot két részre vágták oly módon, hogy a második rész háromszor hosszabb, mint az első. Határozzátok meg mind a két rész hosszát!

5°. Határozzátok meg a 7, 5, 3, 7, 6, 7, 4, 6, 8, 5 minta módusát, mediánját és átlagát!

6•. 100 000 lottószelvényre 662 nyeremény jut. Ebből 2 – 5 000 hrivnya, 10 – 1 000 hrivnya, 50 – 200 hrivnya, 1000 – 50 hrivnya, 500 – 10 hrivnya. A többi szelvény nem nyerő. Határozzátok meg, mekkora a valószínűsége annak, hogy egy szelvénnyel 200 hrivnya fölötti nyereményt visznek el!

7•. Az áprilisban eladott repülőjegyek mennyiségének elemzésével a következő adatokat kapták:

57	55	60	46	55	54	57	54	49	52
51	65	60	56	45	59	53	61	47	42
47	58	56	53	59	64	49	58	59	63

Készítsetek gyakorisági táblázatot és megfelelő hisztogramot! Számítsátok ki a minta centrális tendenciáját!

8••. Az alma iránti kereslet a kereskedelmi hálózatban a következő egyenlettel írható le: $Q_d = 3\,500 - 100P$, az árukínálat egyenlete pedig $Q_s = 1\,000 + 250P$, ahol Q az egy nap alatt eladott vagy vásárolt kilók száma; P az ár hrivnyában. Határozzátok meg: a) a piac egyensúlyi paramétereit; b) hiány vagy túlkínálat lesz-e a piacon, ha 1 kg alma ára 5 hrivnya!

9••. Határozzátok meg az $a^2 - \pi r^2$ kifejezés közelítő értékét századnyi pontossággal, ha $a \approx 10{,}45$ cm és $r \approx 2{,}73$ cm!

4.
FEJEZET

SZÁMSOROZATOK

A sorozat események, jelenségek, helyzetek összefüggő egymásutánja, valaminek az elhelyezkedési rendje.

Az ukrán nyelv értelmező szótára



A *sorozat* – meghatározott rendben elhelyezkedő objektumok halmaza. Ha a sorozat tagjai számok, akkor *számsorozatról* van szó. A számsorozatok legegyszerűbb és legfontosabb példái a számtani és a mértani sorozatok.

A fejezet fő témái:

- **sorozat;**
- **számtani sorozat;**
- **mértani sorozat;**
- **összegszámítási feladatok.**

20.§. A SOROZAT FOGALMA

Képzeljük el, hogy egymás után fel van írva az összes páros természetes szám:

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, \ldots .$$

Ez a számsor a páros természetes számok ***sorozata***. A 2-es szám a sorozat első, a 4 a második, a 6 a harmadik, a 20 a tizedik tagja.

Néhány további példa:

1, 2, 3, 4, 5, … – a természetes számok sorozata;

1, 3, 5, 7, 9, … – a páratlan természetes számok sorozata;

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ ..... – a természetes számok reciprokainak a sorozata.

Egy sorozat lehet ***véges*** vagy ***végtelen***. Véges például az egyjegyű természetes számok sorozata:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

A természetes számok sorozata viszont végtelen. A végtelen sorozatok első néhány tagja után hármas pontot tesznek.

A páros természetes számok sorozatának első, második, harmadik tagja 2, 4, 6. Ez így írható fel: $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 6$. De vajon mennyivel egyenlő az n-edik tag, az a_n? Mivel a páros természetes számok mindegyik tagja sorszámának a kétszerese, ezért az n-edik tagja $2n$-nel egyenlő, azaz

$$a_n = 2n.$$

Ez a képlet a páros természetes számok sorozatának általános tagját jelöli.

A páratlan természetes számok sorozata n-edik tagjának képlete:

$$a_n = 2n - 1.$$

Ez a képlet a lineáris függvényt megadó $y = 2x - 1$ képletre hasonlít. A különbség az, hogy az utóbbiban az x változó bármilyen valós szám lehet, míg az $a_n = 2n - 1$ képletben az n változó csak természetes értékeket vehet fel. A sorozat minden tagja valamely természetes számnak – a sorozattag sorszámának – felel meg. Ezért **a számsorozat – az összes szám természetes halmazán vagy az első *n* természetes szám halmazán megadott függvény**. Ha a függvény az összes természetes szám halmazán van megadva, akkor végtelen számsorozatot kapunk; ha a függvény az első n természetes szám halmazán van megadva, akkor ez olyan véges számsorozat lesz, amelyben a tagok száma n-nel egyenlő.

Ha ismerjük egy sorozat n-edik tagjának képletét, akkor könnyen kiszámítható bármelyik tagja. Felírjuk annak a sorozatnak az első néhány tagját, melynek n-edik tagja $a_n = n^2 + 2$. Ha az n változó az 1, 2, 3, 4, 5, ... értékeket veszi fel, akkor a sorozat első tagjai:

$$3, 6, 11, 18, 27, 38, 51, \ldots .$$

Ennek a sorozatnak az ezredik tagja:

$$a_{1000} = 1000^2 + 2 = 1\,000\,002.$$

Sokkal nehezebb a fordított feladat megoldása, azaz a sorozat n-edik tagjának meghatározása. Például a 2, 3, 5, 7, 11, 13, ... prímszámsor n-edik tagjának képlete a mai napig nem ismert, jóllehet a matematikusok már több mint 2 000 éve keresik.

Egy sorozatot nem határoznak meg egyértelműen az első tagjai. Például nagyon sok olyan sorozat van, melynek az első tagjai: 2, 4, 6, 8. Az ilyen első tagok sorozatának n-edik tagjai:

$$a_n = 2n \text{ és a } c_n = 2n + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4).$$

Az a_i és az a_{i+1} egy sorozat szomszédos tagjai. Az a_i tag az a_{i+1} tagot ***megelőzi*** és értelemszerűen az a_{i+1} tag az a_i tagot ***követi***.

A sorozatot *növekvőnek* nevezzük, ha bármelyik tagja a másodiktól kezdődően nagyobb az őt megelőzőnél. A sorozatot *csökkenőnek* vagy *fogyónak* nevezzük, ha bármelyik tagja a másodiktól kezdődően kisebb az előzőnél.

M e g j e g y z é s. Olyan sorozatok is előfordulnak, melyek tagjai különböző kifejezések, függvények, esetleg mértani alakzatok. Ebben a vonatkozásban említhető a hónapok vagy a hét napjainak sora, egy szóban a betű vagy listában a nevek, vonatszerelvényben a vagonok sorozata.

Az ember kezén az ujjak is bizonyos sorban követik egymást: hüvelyk, mutató, középső, gyűrűs és kisujj (131. ábra). A vonalkódokban a vonalak is meghatározott sorrendben következnek egymás után. Mit jelölnek ezek? Mi célból készítik őket?

A továbbiakban *számsorozatokról* vagy – röviden – sorozatokról fogunk beszélni.



131. ábra

A számsorozatokat gyakran rekurziós-képletekkel (lat. *recurrentis* – visszatérő) adják meg. A képletet rekurziósnak nevezik, ha megmutatja, hogyan fejezhető ki a sorozat bármely tagja néhány megelőző tagja révén.

Például az $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ rekurziós-képlet bizonyítja, hogy a harmadiktól kezdődően a sorozat minden tagja megelőző két tagjának az összegével egyenlő. Egy képlettel nem határozható meg az egész sorozat, mert ismeretlen az első két tagja. Ha a képleten kívül fel van tüntetve a sorozat első két tagja is, akkor az teljesen megadottnak tekinthető.

Adjunk meg rekurziós-képletekkel egy olyan sorozatot, amelynek az első és második tagja egy, minden következő tagja pedig a két megelőző tag összegével egyenlő. Ez a sorozat a következő egyenlőségekkel adható meg:

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_{n+2} = a_n + a_{n+1}.$$

A képlet felhasználásával fokozatosan meghatározható a sorozat harmadik, negyedik és többi tagja:

$$a_3 = a_1 + a_2 = 1 + 1 = 2,$$
$$a_4 = a_2 + a_3 = 1 + 2 = 3,$$
$$a_5 = a_3 + a_4 = 2 + 3 = 5, \ldots$$

Adva van a következő sorozat: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

Ezt *Fibonacci-féle sorozatnak* nevezzük, mivel Leonardo Pisano (Fibonacci) *Könyv az abakuszról* című művében (1202) azt elsőként vizsgálta és foglalta össze tulajdonságait.

Az adott sorozat n-edik tagjának mint az n függvényének a képletét csak a XIX. században találta meg J. Binet (lásd a **840**. feladatot).

Ellenőrizzétek magatokat!

1. Mondjatok példákat számsorozatokra!
2. Fogalmazzátok meg, mi a számsorozat!
3. Milyenek lehetnek a számsorozatok?
4. Milyen számsorozatokat neveznek végeseknek?
5. Milyen számsorozatokat neveznek növekedőknek? Milyeneket fogyóknak?
6. Nevezzétek meg a következő sorozatok első öt tagját: a) páros számok; b) páratlan számok!

Oldjuk meg együtt!

1. Folytassátok a természetes számok négyzeteinek sorozatát:

1, 4, 9, 16, 25, ... !

✓ Megoldás. Az adott sorozat minden tagja sorszámának négyzetével, így az első az 1-es szám négyzetével, a második a 2-es szám négyzetével egyenlő. Ezért a hatodik tag 6^2-tel, a hetedik 7^2-tel, a nyolcadik 8^2-tel egyenlő. Vagyis a következő sorozatot kapjuk:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, ...

2. Határozzátok meg a sorozat következő képlettel megadott negyvenedik tagját:

a) $a_n = 3n - 2$; b) $a_n = (-1)^n$; c) $a_n = n - (-1)^{n-3}$!

✓ Megoldás. a) $a_{40} = 3 \cdot 40 - 2 = 120 - 2 = 118$;

b) $a_{40} = (-1)^{40} = 1$;

c) $a_{40} = 40 - (-1)^{37} = 40 + 1 = 41$.

Felelet. a) 118; b) 1; c) 41.

3. Melyik tagtól kezdődően nagyobb 100-nál a $c_n = n^2 + n$ képlettel megadott sorozat valamennyi tagja?

✓ Megoldás. Ha $n^2 + n > 100$, akkor $n^2 + n - 100 > 0$.

Megoldjuk a másodfokú egyenlőtlenséget.

$D = 1 + 400$. Mivel n természetes, tehát pozitív értékeiről van szó és az $n = \frac{-1+\sqrt{401}}{2} \approx 9{,}5$ gyök pozitív, ezért a feltételt kielégítő sorszámnak 9-nél nagyobbnak kell lennie.

F e l e l e t. A tizedik tagtól kezdődően.

4. Határozzátok meg, hogy növekedő vagy fogyó-e az $a_n = 1 - 2n^2$ képlettel megadott sorozat!

✓ M e g o l d á s. Vegyük a sorozat tetszőleges, egymást követő két tagját, majd határozzuk meg a különbségüket és annak előjelét:

$$a_p = 1 - 2p^2;\ a_{p+1} = 1 - 2(p+1)^2;$$

$$a_{p+1} - a_p = 1 - 2(p+1)^2 - (1 - 2p^2) =$$

$$= 1 - 2p^2 - 4p - 2 - 1 + 2p^2 = -(4p + 2).$$

Természetes p érték esetében a $4p + 2$ kifejezés csak pozitív értékeket vesz fel. Ezért $a_{p+1} - ap < 0$ valamennyi természetes p esetén. Vagyis bármely p sorszám esetében teljesül az $a_{p+1} < ap$ feltétel. Az adott sorozat fogyó, mert minden következő tagja kisebb az őt megelőzőnél.

F e l e l e t. A sorozat fogyó.

Oldjátok meg szóban!

816. Nevezzétek meg a természetes számok reciprokaiból álló sorozat első 5 tagját!

817. Nevezzétek meg a prímszámok sorozatának első 5 tagját!

818. Folytassátok a természetes számok sorozatát:

a) amely 3-mal osztható: 3, 6, 9, 12, ... ;

b) amely 5-tel osztható: 5, 10, 15, ...;

c) amely 3-mal nem osztható: 1, 2, 4, 5, 7, ...;

d) amelynek minden tagja 3-mal nagyobb az őt megelőzőnél: 1, 4, 7, ... !

819. Vizsgáljátok meg a sorozatokat:

a) 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, ... ;

b) 1, –1, 1, –1, 1, –1, 1, –1, ...;

c) 5, 55, 555, 5555, 55555, 555555, ... !

Mindegyik sorozat esetében mutassátok meg a következő tagokat: a) második, ötödik és hetedik; b) a harmadik után következőt; c) a hetediket megelőzőt; 4) a második és a hatodik között állókat!

820. Az $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n, \ldots$ sorozat melyik tagja:
a) következik az $x_3, x_7, x_{39}, x_{121}, x_{n+1}, x_{3n}$ után;
b) áll az $x_5, x_{71}, x_{99}, x_{123}, x_{n+1}, x_{3n}$ előtt?

A szint

821. Véges vagy végtelen:
a) a prímszámok sorozata;
b) a természetes számokkal ellentett számok sorozata;
c) a 10 nevezőjű valós törtek sorozata;
d) a 10 nevezőjű áltörtek sorozata;
e) a 10 számlálójú valós törtek sorozata;
f) a 10 számlálójú áltörtek sorozata;
g) kétjegyű számok sorozata;
h) a π szám tizedesvesszője után álló számjegyek sorozata?
Írjátok ki mindegyik sorozat első öt tagját!

822. Írjátok fel annak a sorozatnak az első öt tagját, amelynek *n*-edik tagja a következő képletekkel adható meg:
a) $a_n = 2(n-1)$; b) $x_n = 12$; c) $y_n = 3n + (-1)^n$;
d) $b_n = 1 - n^2$; e) $c_n = 2n^2$; f) $z_n = 1 + (-1)^n$!

823. A sorozat az $a_n = 2n + 3$ képlettel van megadva. Határozzátok meg:
a) a_3; b) a_6; c) a_{15}; d) a_{100}!

824. Írjátok fel az alábbi képletekkel megadott sorozatok hét első tagját:
a) $a_n = 3n - 2$; b) $a_n = n^2 + 1$;
c) $a_n = 2 - 5n$; d) $a_n = n^2 - n$!

825. Írjátok fel a természetes számok négyzeteiből álló sorozat néhány első tagját! Melyik az *n*-edik tagja?

826. Írjátok fel a természetes számok köbeiből álló sorozat néhány első tagját! Melyik az *n*-edik tagja?

827. Írjátok fel a 3-mal osztható természetes számok sorozatának néhány első tagját! Határozzátok meg a negyvenedik tagját!

828. Írjátok fel annak a sorozatnak néhány első tagját, amelynek *n*-edik tagja $a_n = n^2 - 1$! Határozzátok meg a következőket: a_{10}, a_{20}, a_{100}!

829. Írjátok fel az alábbi képletekkel megadott véges sorozatokat:
a) $a_n = 4n - 3$, ahol $1 \le n \le 8$;
b) $b_n = \frac{n}{n+1}$, ahol $1 \le n \le 10$;

c) $c_n = n^2 + 2n$, ahol $1 \leq n \leq 8$;

d) $y_n = 2^n + 1$, ahol $1 \leq n \leq 7$!

830. Határozzátok meg az alábbi képletekkel megadott sorozatok harmincadik tagját:

a) $a_n = 2n + 7$; b) $b_n = 2n^2 - n$;

c) $c_n = (-1)^n + 3$; d) $x_n = 0{,}5n(n + 1)$!

831. Adva van egy sorozat, amelynek n-edik tagja $a_n = 5n + 8$. Mennyivel nagyobb a huszadik tagja a tizenkilencediknél?

832. Adva van egy sorozat, amelynek n-edik tagja $a_n = n \cdot 3^n$. Mennyivel nagyobb a tizenkilencedik tagja a tizennyolcadiknál?

833. Határozzátok meg annak a sorozatnak a hatodik, nyolcadik és tizedik tagját, amelynek az n-edik tagja $b_n = 2^n$!

834. Igaz-e, hogy az $a_n = 5n - 3$ annak a természetes számokból álló sorozat n-edik tagjának a képlete, amelyek 5-tel való osztása után 2 marad?

835. Írjátok fel a természetes számok azon sorozata n-edik tagjának képletét, amelyek 7-tel való osztása után 3 marad!

836. A sorozat első tagja 7-tel egyenlő és minden ezután következő tag 2-vel nagyobb a megelőzőnél. Írjátok fel néhány első tagját!

837. A sorozat első tagja 5-tel egyenlő és minden ezután következő tag 3-mal kisebb az őt megelőzőnél. Írjátok fel néhány első tagját! Növekedő vagy fogyó ez a sorozat?

838. Az 1, 3, 6, 10, 15, ... sorozatot *háromszögszámoknak* nevezik (132. ábra). Írjátok fel a sorozat további 4 egymást követő tagját!



132. ábra

B szint

839. Írjátok fel annak a sorozatnak az első öt tagját, amely a következő rekurziós-képlettel van megadva:

a) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = -2a_n$;

b) $a_1 = -1,\ a_2 = 1,\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$;

c) $a_1 = 15,\ a_{n+1} = a_n - 5$;

d) $c_1 = -2,\ c_2 = 3,\ c_{n+2} = 2c_n + c_{n+1}$!

840. A Fibonacci-féle számsorozat $a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ rekurziós-képlettel vagy az n-edik tag képletével van megadva:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Határozzátok meg két módszerrel a sorozat első öt tagját, és hasonlítsátok össze őket!

841. Az $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ sorozat olyan, amely minden természetes i szám esetében $a_1 = -5$ és $a_{i+1} - a_i = 3$. Határozzátok meg a következőket: $a_2,\ a_5,\ a_{10}$!

842. Hányadik tagtól kezdődően lesz az alábbi sorozat minden tagja:

a) $a_n = 3n + 1$ nagyobb 50-nél;

b) $c_n = n^2 - 5$ nagyobb 220-nál;

c) $x_n = 200 - 3n$ kisebb 12-nél;

d) $b_n = n^2 - n$ nem kisebb 110-nél;

e) $a_n = \frac{n+1}{n}$ nem nagyobb 1,01-nál?

843. Az alábbi sorozatok mely tagjai esetében:

a) $a_n = 3n - 5$ nagyobb 40-nél, de kisebb 150-nél;

b) $b_n = 200 - 2n$ nagyobb 50-nél, de kisebb 170-nél;

c) $c_n = 2^n + 1$ nagyobb 8-nál, de kisebb 30-nál;

d) $x_n = 4 - 7n$ nagyobb -40-nél, de kisebb -10-nél;

e) $y_n = \sqrt{n+2}$ nagyobb $\sqrt{10}$-nél, de kisebb 10-nél?

844. Hány pozitív tagja van az alábbi képletekkel megadott sorozatnak:

a) $a_n = -3n + 374$; b) $a_n = -n^2 + 70n + 800$?

845. Hány negatív tagja van az $a_n = n^2 - 15n$ képlettel megadott sorozatnak?

846. Vannak-e az $a_n = 7n - 2$ sorozat tagjai között olyanok, amelyek:

a) 0 számjeggyel végződnek;

b) 13-mal oszthatók;

c) 2-vel oszthatók, de 3-mal nem oszthatók;

d) 27-tel való osztás után 1 marad?

847. Adva van két sorozat: $a_n = 7n - 1$ és $c_n = 8n + 3$. Határozzátok meg k és p legkisebb értékeit, amelyek esetében $a_k = cp$!

848. Adva van a 9, 4, 1, 0, 1, 4, 9 végtelen sorozat. Határozzátok meg a képletét!

Ismertessétek a sorozat n-edik tagjának egy lehetséges képletét (**848–850**)! Adjátok meg mindegyik sorozatot táblázat és görbe alakjában!

849. a) 2, 5, 8, ...; b) 2, 4, 8, ... ;
c) 1, –1, 1, ... ; d) 1, 0, 1, ... ;
e) $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots$; f) $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \ldots$.

850. a) 3, 6, 12, 24, 48, ... ; b) 1, 7, 31, 127, 511, ...;
c) 0, –2, –4, –6, ... ; d) –1, 2, –3, 4, –5, ... ;
e) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$; f) $\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \ldots$.

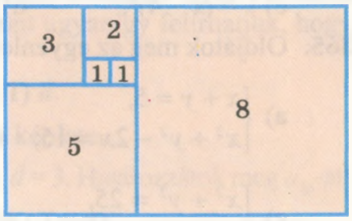
851* Írjátok fel azoknak a sorozatoknak két n-edik tagját, amelyek első tagjai: 1, 3, 5, 7!

852. Bizonyítsátok be, hogy a háromszögszámok sorozat n-edik tagja az első természetes n számok összegével egyenlő (lásd a **838**. feladatot)!

853. A 0, 2, 0, 2, 0, ... végtelen sorozat olyan, hogy mindegyik két szomszédos tagjának összege 2-vel egyenlő. Igaz-e, hogy n-edik tagja $a_n = 1 + (-1)^n$?

854. A sorozat az $a_n = (-1)^n$ képlettel van megadva. Határozzátok meg az első: a) száz; b) ezer; c) ezeregy tagjának összegét!

855. Rajzoljátok át a füzetetekbe a 133. ábrát, és egészítsétek ki két négyzettel oly módon, hogy az oldalaik a Fibonacci-féle sorozat egymás után következő tagjainak összegével legyen egyenlő!



133. ábra

856. Növekvők vagy csökkenők a következő képletekkel megadott sorozatok:

a) $a_n = 9n - 10$; b) $b_n = 10 - 9n$; c) $c_n = 5 - n^2$;

d) $x_n = \frac{1}{n^2 + 1}$; e) $y_n = \frac{3n + 4}{n + 2}$; f) $z_n = n^2 + 2n - 3$?

857. Bizonyítsátok be, hogy az $a_n = 8n - 7$ sorozat növekvő!

858. Bizonyítsátok be, hogy az $a_n = \frac{n+1}{n}$ sorozat csökkenő!

859. Határozzátok meg a sorozatok legnagyobb tagját:

a) $a_n = 6n - n^2 - 5$; b) $a_n = -n^2 + 2n + 3$!

860. Határozzátok meg annak a sorozatnak a legnagyobb negatív tagját, amelynek általános képlete (vagy n-edik tagjának képlete):

a) $a_n = n^2 - 35$; b) $a_n = 0{,}25n^2 - 10{,}75$!

861. A $-20, -10, -5, 4, 9$ számok közül melyik tagja annak a sorozatnak, amelynek n-edik tagja $a_n = 2n^2 - 7n$?

862. Melyik sorozatnak tagja a -12 szám:

a) $a_n = 7n^2 - 11$; b) $a_n = 3 - 5n$; c) $a_n = 2n - n^2 + 3$;

d) $a_n = \frac{n+1}{n}$; e) $a_n = n - n^2$; f) $a_n = \frac{5n^2 + 4}{1 - 2n}$?

Ismétlő gyakorlatok

863. Egy kereskedelmi szervezet 2 500 hrivnyáért két terméket vásárolt, amelyek eladásából 40%-os nyereségre tett szert. Mennyit fizetett a kereskedelmi szervezet mindegyik termékért, ha az első eladása 25%, a második 50% nyereséget hozott?

864. Ábrázoljátok a függvények görbéit:

a) $y = x^2 + 3$; b) $y = x^2 - 2$;

c) $y = (x - 4)^2$; d) $y = (x + 3)^2$!

865. Oldjátok meg az egyenletrendszereket:

a) $\begin{cases} x + y = 5, \\ x^2 + y^2 - 2x = 15; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy + 12 = 0; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ (x - 4)^2 + y^2 = 9; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x^2 + y^2 - 6x = 7! \end{cases}$

21.§. SZÁMTANI SOROZAT

Adva van egy olyan sorozat, melynek első tagja 5, a többi pedig 3-mal több az azt megelőző tagnál:

5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, … .

Ez egy számtani sorozat, melynek első tagja 5, különbsége pedig 3.

***Számtani sorozatnak* nevezzük azt a sorozatot, melyben a másodiktól kezdve bármelyik tag és az azt megelőző tag különbsége állandó. Ezt az adott sorozat esetében állandó *d* számot a *számtani sorozat különbségének (differenciájának)* nevezzük.**

Másként fogalmazva: az olyan sorozatot, amely megadható az $a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n + d$ rekurzív-képletekkel (rekurzív módon), és ahol $n \in N$, a és d adott számok, számtani sorozatnak nevezzük.

A számtani sorozat első tagja és differenciája (különbsége) bármilyen szám lehet. A számtani sorozat növekvő, ha a különbsége pozitív és csökkenő, ha a különbsége negatív. Csökkenő számtani sorozat például:

11, 9, 7, 5, 3, 1, –1, –3, … .

Ahhoz, hogy megkapjuk a második tagtól kezdődően egy számtani sorozat bármelyik tagját, az azt megelőző taghoz hozzá kell adni a *d* különbséget. Ezért, ha a számtani sorozat első tagja a_1 és a különbsége d, akkor a sorozat első néhány tagja:

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, a_1 + 4d, \dots ,$$

vagyis

$$a_2 = a_1 + d, a_3 = a_1 + 2d, a_4 = a_1 + 3d, a_5 = a_1 + 4d, \dots .$$

Figyeljétek meg, hogy a d előtt álló együttható 1-gyel kisebb a sorozat tagjának sorszámánál. Akkor viszont ugyanígy felírhatjuk, hogy $a_6 = a_1 + 5d$, $a_7 = a_1 + 6d$ és általánosan:

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n - 1)\, d}.$$

Ez a számtani sorozat n-edik tagjának a képlete.

1. példa. Egy számtani sorozatban $a_1 = 4$, $d = 3$. Határozzátok meg a_{20}-at!

✓ Megoldás. $a_{20} = a_1 + 19d = 4 + 19 \cdot 3 = 61$.

Felelet. 61.

2. példa. Egy számtani sorozatban $a_{19} = 8$, $d = -1$. Határozzátok meg a_1-et!

✓ Megoldás. $a_{19} = a_1 + 18d$, $8 = a_1 - 18$. Tehát $a_1 = 26$.

Felelet. 26.

Vizsgáljuk meg a számtani sorozat néhány tulajdonságát!

1. tétel. **A számtani sorozat bármely tagja, az első tag kivételével, két vele szomszédos tag félösszegével egyenlő:** $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$.

Bizonyítás. A meghatározás szerint $d = a_{n+1} - a_n$, $d = a_n - a_{n-1}$.

Vagyis $a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1}$, ahonnan $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$.

A tétel fordítottja is igaz. Bizonyítsátok be önállóan!

2. tétel. **A véges számtani sorozat végeitől egyenlő távolságra lévő két tagjának összege szélső tagjainak összegével egyenlő** $a_k + a_{n-(k-1)} = a_1 + a_n$.

Adva van egy számtani sorozat első n tagja:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n.$$

Adjuk össze az első és az utolsó tagot, a második és az utolsó előtti tagot, a harmadik és hátulról a harmadik tagot és így tovább. Az eredmény mindig ugyanaz. Valóban, mert ha $a_1 + a_n = m$, akkor:

$a_2 + a_{n-1} = (a_1 + d) + (a_n - d) = a_1 + a_n = m$;

$a_3 + a_{n-2} = (a_2 + d) + (a_{n-1} - d) = a_2 + a_{n-1} = m$;

$a_4 + a_{n-3} = (a_3 + d) + (a_{n-2} - d) = a_3 + a_{n-2} = m$.

Vagyis $a_k + a_{n-(k-1)} = a_1 + a_n$.

3. tétel. **A véges számtani sorozat tagjainak összege két szélső tagja számtani közepének és tagjai számának a szorzatával egyenlő:** $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.

Legyen S_n az $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$ számtani sorozat n tagjainak összege.

Ha $a_1 + a_n = m$, akkor $a_2 + a_{n-1} = m$, $a_3 + a_{n-2} = m$ és így tovább. Ezt figyelembe véve tagonként összeadjuk a következő két egyenlőséget:

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \\ + \quad S_n &= a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1 \end{aligned}$$

$$2S_n = m + m + m + \ldots + m + m + m$$

$2S_n = mn$; $2S_n = (a_1 + a_n)\, n$, ahonnan

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

E képlet alapján bármely számtani sorozat első n tagjainak összege meghatározható.

3. példa. Számítsátok ki az 5, 7, 9, ... számtani sorozat első húsz tagjának összegét!

✓ Megoldás. Ebben a sorozatban $a_1 = 5$, $d = 2$. Ezért $a_{20} = 5 + 19 \cdot 2 = 43$.

$$S_{20} = \frac{5 + 43}{2} \cdot 20 = 480.$$

Felelet. 480.

A számtani sorozat első n tagjának összege a következő képlettel is meghatározható:

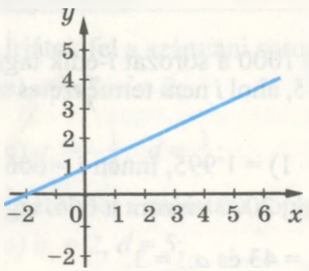
$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

Bizonyítsátok be önállóan!

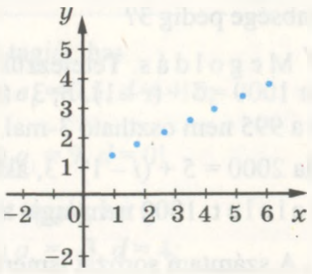
Tekintsük az $y = 0{,}5x + 1$ képlettel megadott függvényt. A görbéje a 134. ábrán látható. Ha az x argumentumnak csak természetes értékeket, vagyis 1, 2, 3, ... adnak, akkor a függvény értékei rendre a következők lesznek:

1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; 4; ... .

Van egy számtani sorozatunk 1,5 első taggal és 0,5 különbséggel. Ennek a sorozatnak a 135. ábra felel meg. Általában a természetes



134. ábra



135. ábra

számok halmazán meghatározott minden $y = ax + b$ függvény olyan számtani sorozat, amelynek első tagja $a + b$, különbsége pedig a. Ezért **a számtani sorozatot a természetes számok halmazán megadott lineáris függvénynek tartják**.

Ha az ilyen függvény az összes természetes szám halmazán van megadva, akkor végtelen számtani sorozatról beszélünk. Ha ez az első n természetes számok halmazán van meghatározva, akkor n tagból álló számtani sorozatot kapunk.

Ellenőrizzétek magatokat!

1. Fogalmazzátok meg, mi a számtani sorozat!
2. Mit nevezünk a számtani sorozat különbségének (differenciájának)?
3. Hogyan fejezhető ki a számtani sorozat n-edik tagja az első tagja és a különbsége által?
4. Mivel egyenlő a véges számtani sorozat végeitől egyenlő távolságban lévő két tagjának összege?
5. Mivel egyenlő a számtani sorozat első n tagjának összege?

Oldjuk meg együtt!

1. Határozzátok meg valamennyi kétjegyű természetes szám összegét!

✓ M e g o l d á s. Meghatározzuk a 10, 11, 12, … , 99 számok összegét. Ez 90 tagból álló véges számtani sorozat, ezért az összegük:

$$S = \frac{1}{2}(10 + 99) \cdot 90 = 4\,905.$$

F e l e l e t. 4 905.

2. Tagja-e 1000 és 2000 annak a sorozatnak, melynek első tagja 5, a különbsége pedig 3?

✓ M e g o l d á s. Tételezzük fel, hogy 1000 a sorozat i-edik tagja, és ekkor $1000 = 5 + (i - 1) \cdot 3$, $3 \cdot (i - 1) = 995$, ahol i nem természetes szám, mert a 995 nem osztható 3-mal.

Ha $2000 = 5 + (i - 1) \cdot 3$, akkor $3 \cdot (i - 1) = 1\,995$, innen $i = 666$.

F e l e l e t. 1000 nem tagja a sorozatnak, 2000 viszont a 666. tagja.

3. A számtani sorozat ismert tagjai: $a_7 = 43$ és $a_{15} = 3$.

Határozzátok meg az a_{10}-et!

✓ M e g o l d á s. Behelyettesítjük a feladat adatait az $a_n = a_1 + d \cdot (n-1)$ képletbe. A következőt kapjuk:

$$\begin{cases} a_7 = a_1 + 6d, \\ a_{15} = a_1 + 14d; \end{cases} \text{ vagy } \begin{cases} 43 = a_1 + 6d, \\ 3 = a_1 + 14d; \end{cases}$$

$$40 = -8d, \qquad d = -5,\ a_1 = 73.$$

Mivel $a_{10} = a_1 + 9d$, ezért $a_{10} = 73 + 9 \cdot (-5) = 28$.

F e l e l e t. 28.

Oldjátok meg szóban!

866. Határozzátok meg a számtani sorozat differenciáját:

a) 3, 5, 7, ... ; b) 12, 10, 8, ... ;

c) –2, 1, 4, ... ; d) –7, –9, –11, ... !

867. A számtani sorozat differenciája 2-vel egyenlő. Határozzátok meg az első tagját, ha:

a) $a_2 = 5$; b) $a_2 = -3$; c) $a_2 = 0{,}3$; d) $a_2 = \sqrt{2}$!

868. Számtani sorozatok-e a következők:

a) 1, 3, 5, 8, 11, 14, ... ; b) 0, –1, –3, –5, –8, ... ?

869. Az alábbi sorozatok közül melyek lehetnek számtani sorozatok? Határozzátok meg az első tagjaikat és a különbségüket!

a) 0; 3; 6; 9; 12; ... ; b) –2, –4, –6, –8, –10, ... ;

c) 3, 3, 3, 3, 3, 3, ... ; d) 5, 10, 20, 40, 80, ... ;

e) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$; f) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{6}, \dots$.

A szint

870. Írjátok fel a számtani sorozat első öt tagját, ha:

a) $a_1 = 7$, $d = 2$; b) $a_1 = 0{,}5$, $d = -10$;

c) $a_1 = -\frac{1}{4}$, $d = \frac{1}{4}$; d) $a_1 = 9$, $d = 0$!

871. Írjátok fel a számtani sorozat első hét tagját, ha:

a) $a_1 = 2$, $d = 5$; b) $a_1 = -3$, $d = 4$;

c) $a_1 = 0$, $d = 7$; d) $a_1 = 4$, $d = -1$!

872. A számtani sorozatokban:
a) $a_1 = 5$, $d = -4$. Határozzátok meg: a_7, a_{20};
b) $a_1 = 9$, $d = 4$. Határozzátok meg: a_{15}, a_{32}!

873. A számtani sorozatban $a_2 = 14$, $a_3 = 25$.
Határozzátok meg: d, a_{10}, a_{20}!

874. Határozzátok meg a számtani sorozat differenciáját és tizedik tagját:
a) 2, 7, 12, ... ; b) 3, 1, –1, ... ; c) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, ... !

875. Határozzátok meg a számtani sorozat differenciáját, ha:
a) $a_1 = 5$, $a_7 = 95$; b) $a_1 = 2{,}3$, $a_5 = 1{,}5$;
c) $a_1 = -15$, $a_{10} = -24$; d) $a_1 = -17$, $a_7 = 97$!

876. Határozzátok meg a számtani sorozat első tagját, ha:
a) $a_{11} = 25$, $d = 2$; b) $a_{36} = 5$, $d = -1$;
c) $a_8 = 9$, $d = 0{,}3$; d) $a_{21} = -50$, $d = 3$!

877. A számtani sorozatban $a_{17} = 53$, $d = 3$.
Határozzátok meg: a_1, a_5, a_{11}, a_{21}!

878. A számtani sorozatban $a_{10} = 5$, $a_{11} = -4$.
Határozzátok meg: a_1, d, a_5, a_{21}!

879. A számtani sorozatban $a_{25} = 5$, $a_{27} = 4$. Határozzátok meg: a_7, a_{20}!

880. A számtani sorozatban $a_4 = 2$, $a_6 = 3$. Határozzátok meg: a_{40}, a_{41}!

881. Határozzátok meg a számtani sorozat n-edik tagját:
a) 2, 5, 8, ... ; b) 7, 6, 5, ... ; c) $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, 1, ... !

882. Írjátok fel a számtani sorozat n-edik tagjának képletét:
a) 7, 12, ... ; b) –25, –19, ... ;
c) –2,5, 0,5, ... ; d) –4,5, –3,7, ... !

883. Határozzátok meg a számtani sorozat első tíz tagjának összegét:
a) $a_1 = -35$, $a_{10} = 10$; b) $a_1 = 66$, $a_{10} = -6$;
c) $a_1 = -2{,}5$, $a_{10} = 2$; d) $a_1 = 20$, $a_{10} = 21{,}8$!

884. Határozzátok meg a számtani sorozat első tagját és differenciáját, ha:
a) $a_{10} = 95$, $S_{10} = 500$; b) $a_{15} = 47$, $S_{30} = 1500$!

885. Határozzátok meg a számtani sorozat első száz tagjának összegét:
a) 50, 49, 48, ... ; b) –50, –49, –48, ... ;
c) 2, 7, 12, 17, ... ; d) 16, 13, 10, 7, ... !

886. Határozzátok meg a számtani sorozat első negyven tagjának összegét:

a) $a_1 = 2, d = 3$; b) $a_1 = -18, d = 5$;

c) $a_1 = 3, d = -0{,}2$; d) $a_1 = 7, a_{50} = 252$!

887. A számtani sorozatnak ismert az első a_1 tagja és d különbsége. Határozzátok meg első n tagjainak S_n összegét, ha:

a) $a_1 = 3, d = 2, n = 32$; b) $a_1 = -4, d = 4, n = 25$;

c) $a_1 = 15, d = -2, n = 40$; d) $a_1 = -5, d = -7, n = 12$;

e) $a_1 = 0, d = 7, n = 35$; f) $a_1 = 8, d = 0, n = 50$!

888. ***Ókori arab feladat.*** Határozzátok meg a 3, 7, 11, 15, ... számtani sorozat 20-ik tagját és húsz tagjának összegét!

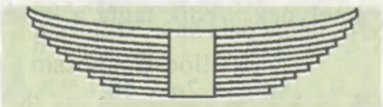
889. ***Ókori zsidó feladat.*** Határozzátok meg az első hatvan természetes szám összegét!

890. A tanító azt a feladatot adta a gyerekeknek, hogy számítsák ki 1-től 40-ig valamennyi természetes szám összegét; úgy vélte, sokáig tart majd, amíg a tanulók összeadnak negyven számot. Viszont az ifjú Karl Gauss, a későbbi híres német matematikus, egy perc alatt kiszámította a feladatot. Hogyan sikerülhetett ez neki? Próbáljátok meg szóban megoldani a feladatot!

891. Határozzátok meg az első száz természetes szám összegét!

892. Határozzátok meg az első száz nem páros természetes szám összegét!

893. A lengéscsillapító tíz acéllapból áll (136. ábra). A legfelső lap hossza 105 cm, mindegyik egymás után következő 9 cm-rel rövidebb a megelőzőnél. Határozzátok meg az acéllapok hosszainak összegét!



136. ábra

894. ***Ókori feladat.*** A kutat ásó embereknek 30 ezüstöt ígértek az első méter kivájásáért, minden következő méterért pedig 20 ezüsttel többet, mint a megelőző méterért. Hány ezüstöt kapnak a kútásók egy 12 méteres kút kivájásáért?

B szint

895. A számtani sorozatban $a_1 = 0{,}1$, $d = 2$. Határozzátok meg: a_{10}, a_n, a_{2n}!

896. $a_1, a_2, a_3, \ldots$ számtani sorozat. Határozzátok meg a_{30}-at, ha

a) $a_3 = 3, a_4 = 4$; b) $a_5 = 9, a_7 = 13$;

c) $a_1 = 8, a_5 - a_3 = 6$; d) $a_2 = 5, a_5 - a_1 = 12$!

897. $a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots$ számtani sorozat. Határozzátok meg a_1, d, a_{21}, a_{100}-at, ha

a) $a_4 = 10, a_7 = 19$; b) $a_5 = 5{,}2, a_9 = 6{,}8$;

c) $a_5 = 8{,}2, a_{10} = 4{,}7$; d) $a_8 = 11{,}2, a_{15} = 19{,}6$!

898. Tagja-e a 253 a 15, 23, 31, ... számtani sorozatnak?

899. Tagja-e a 212 a következő számtani sorozatoknak:

a) 3, 14, 25, 36, ... ; b) 275, 269, 263, 257, ... ?

900. A –23, –14, –3, 1, 3, 14, 23 számok közül melyek tagjai annak a számtani sorozatnak, amelynek n-edik tagja:

a) $a_n = 5n - 19$; b) $b_n = 0{,}1n + 11$; c) $c_n = 97 - 2n$?

901. Hány negatív tagja van a következő számtani sorozatoknak:

a) –10,3, –8,6, ... ; b) –37,5, –35,7, ... ?

902. Hány pozitív tagja van a következő számtani sorozatoknak:

a) 2,5; 2,3; 2,1, ... ; b) 176; 151; 126; ... ?

903. Hány negatív tagja van a következő számtani sorozatoknak:

a) –32, –30, –28, ... ; b) $-8\frac{1}{2}, -8, -7\frac{1}{2}, \ldots$?

904. A 10, 16, 22, ... számtani sorozat hány tagja található a 110 és a 345 számok között?

905. Határozzátok meg annak a számtani sorozatnak az első tagját és a differenciáját, amelynek n-edik tagja a következő képlettel van megadva:

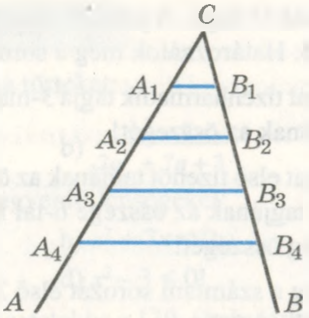
a) $c_n = 5n - 3$; b) $a_n = 2n + 10$; c) $a_n = -3 - 0{,}5n$!

906. Számtani sorozat-e az a sorozat, amelynek n-edik tagja:

a) $a_n = 3n + 1$; b) $b_n = 5 - 4n$; c) $c_n = 2^n + 1$?

907. Az ACB szög CA szárán a csúcstól egyenlő hosszúságú szakaszokat mértek fel. A szakaszok végpontjaiból párhuzamos egyeneseket húztak (137. ábra). Számítsátok ki az A_3B_3, A_7B_7 és A_nB_n szakasz hosszát, ha $A_1B_1 = 2{,}5$ cm!

908. $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ számtani sorozat, a c tetszőleges szám. Bizonyítsátok be, hogy a $ca_1, ca_2, ca_3, ca_4, \ldots$ sorozat szintén számtani sorozat!



137. ábra

909. $a_1, a_2, a_3, \ldots$ és $x_1, x_2, x_3, \ldots$ számtani sorozat. Bizonyítsátok be, hogy az $a_1 + x_1, a_2 + x_2, a_3 + x_3, \ldots$ sorozat szintén számtani sorozat!

910. Az a^2, b^2, c^2 számok nem egyenlők és számtani sorozatot alkotnak. Bizonyítsátok be, hogy számtani sorozatot képeznek az $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ számok is!

911. Adva van egy számtani sorozat, amelynek n-edik tagja a_n. Bizonyítsátok be, hogy: a) $a_2 + a_{23} = a_{13} + a_{12}$; b) $a_{20} - a_{16} = a_{10} - a_6$!

912. ***Feofan Prokopovics feladata.*** Egy embernek nagyon sok lova volt, és mindegyiknek különböző volt az ára. A legrosszabb ló 4 aranyba került, a legjobb 55-be, és a legrosszabbtól a legjobbig 3 arannyal nőtt lovanként. Hány lova volt az embernek?

913. Határozzátok meg a számtani sorozat első n tagjának összegét, ha:

a) $a_1 = 1, a_5 = 3, n = 40$; b) $a_1 = -3, a_3 = 1, n = 50$;

c) $a_2 = 5, a_4 = 6, n = 100$; d) $a_1 = a_{100}, a_3 = 3, n = 100$!

914. Határozzátok meg valamennyi 200-nál kisebb páros természetes szám összegét!

915. Határozzátok meg valamennyi 200-nál kisebb páratlan természetes szám összegét!

916. Határozzátok meg az 1000-nél kisebb természetes számok összegét, amelyek a következő számokkal oszthatók: a) 3; b) 5; c) 12!

917. Határozzátok meg az alábbi intervallumokhoz tartozó valamennyi egész szám összegét:

a) $[-30; 70]$; b) $[-70; -30]$; c) $(-70; 70)$!

918. A számtani sorozat 10 tagú. A páratlan sorszámú tagok összege 10, a páros tagoké 25. Határozzátok meg a sorozat hetedik tagját!

919. A számtani sorozat tizenharmadik tagja 3-mal egyenlő. Határozzátok meg első 25 tagjának az összegét!

920. A számtani sorozat első tizenöt tagjának az összege 20-szal egyenlő, ennél az első 12 tagjának az összege 6-tal kevesebb. Határozzátok meg az első 27 tag összegét!

921. Határozzátok meg a számtani sorozat első 20 tagjának az összegét, ha n-edik tagjának a képlete:

a) $a_n = 2 + 5n$; b) $a_n = 2n - 1$; c) $a_n = -3 + n$!

922. Határozzátok meg a számtani sorozat ötödik tagját, ha első n tagjainak összege a következő képletekkel határozható meg:

a) $S_n = n^2 - 6n$; b) $S_n = 3n^2 - n$; c) $S_n = 4n^2 - 2n$!

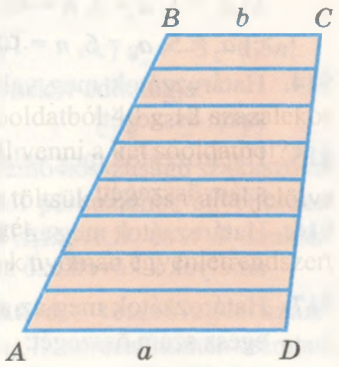
923. A számtani sorozat negyedik és hatodik tagjának összege 14-gyel egyenlő. Határozzátok meg a sorozat első kilenc tagjának összegét!

924. ***Franker feladata.*** Hányat üt az óra 12 óra alatt, ha félóránként üt?

925. Egy szabadon eső test az első másodpercben 4,9 m-t tesz meg, és minden következő másodpercben 9,8 m-rel többet. Számítsátok ki: a) a bánya mélységét, ha a kő 8 másodperc alatt éri el az alját; b) hány másodpercig esne az anyacsavar 490 m magasból!

926. Egy ötszög belső szögeinek fokmértékei számtani sorozatot alkotnak. Bizonyítsátok be, hogy a szögek egyike 108°! Állítsatok össze hasonló feladatot háromszöggel és hétszöggel kapcsolatban!

927. A trapéz alapjaival párhuzamos szakaszok a szárakat 8 egyenlő részre osztják. Határozzátok meg a szakaszok hosszát és összegüket, ha a trapéz alapjai a és b (138. ábra)!



138. ábra

Ismétlő feladatok

928. Egyszerűsítsétek a törteket:

a) $\frac{3x-9}{2x^2-5x-3}$; b) $\frac{a^2-9}{2a^2+7a+3}$; c) $\frac{c^2-8c-20}{c^2-11c+10}$!

929. Oldjátok meg az egyenlőtlenségeket:

a) $x^2-8x<0$; b) $x^2+7x<0$;

c) $x^2-16<0$; d) $x^2-3\le 0$!

930. Rajzoljátok át a füzetetekbe a 139. ábrán látható táblázatot! Töltsétek ki a táblázat üres kockáit a, b, c, k, p, t, x, y, z betűkkel oly módon, hogy minden sorban, minden oszlopban és minden 3×3-as kis négyzetben a felsorolt betűk csak egyszer forduljanak elő!

		a		b			z	
k		z	a	c	x		y	
		t	p				b	
	c					z		
a	t		c	z			x	k
		p			a		c	t
b	z		x	t				y
				y		b	p	
	x	y			b		t	

139. ábra

22.§. MÉRTANI SOROZAT

Mértani sorozatnak **nevezzük az olyan számsorozatot, melynek a második tagtól kezdve minden tagját úgy kapjuk meg, hogy a sorozat előző tagját megszorozzuk a sorozatra jellemző állandó számmal. Ezt az állandó q számot az adott mértani sorozat *hányadosának (kvóciensének)* nevezzük.**

A mértani sorozat b_1 első tagja és q hányadosa bármilyen szám lehet, kivéve a nullát.

Másként fogalmazva, a mértani sorozat olyan sorozat, amely a következő rekurzív képlettel adható meg:

$b_1 = b$, $b_{n+1} = b_n \cdot q$, ahol $n \in N$, $b \neq 0$ és $q \neq 0$ adott számok.

Mértani sorozatok példái:

3, 6, 12, 24, 48, 96, … ($b_1 = 3$, $q = 2$);

$1, -3, 9, -27, 81, -243, \ldots$ $(b_1 = 1, q = -3)$;

$-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \ldots \left(b_1 = -1, q = \frac{1}{2}\right)$;

$7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, \ldots$ $(b_1 = 7, q = 1)$.

M e g j e g y z é s. Minden nulla különbségű számtani sorozatot olyan mértani sorozatnak tekinthetünk, melynek hányadosa 1.

A b_1 első tagú és q hányadosú mértani sorozatnak a következők az első tagjai:

$$b_1;\ b_1q,\ b_1q^2,\ b_1q^3,\ b_1q^4,\ \ldots .$$

A második tag $b_2 = b_1q$, a harmadik tag $b_3 = b_1q^2$, az n-edik tag:

$$\boldsymbol{b_n = b_1q^{n-1}.}$$

Ez a képlet a mértani sorozat n-edik tagjának a képlete.

1. példa. Egy mértani sorozatban $b_1 = 5$, $q = 2$. Határozzátok meg b_{10}-et!

✓ M e g o l d á s. $b_{10} = b_1q^{10-1}$, $b_{10} = 5 \cdot 2^9 = 2\,560$.

F e l e l e t. 2 560.

2. példa. A mértani sorozat első és hetedik tagja 81 és $\frac{64}{9}$. Határozzátok meg a sorozat hányadosát!

✓ M e g o l d á s. Az n-edik tag képlete szerint a mértani sorozat:

$$b_7 = b_1q^6,\ \ \frac{64}{9} = 81 \cdot q^6,\ \ q^6 = \frac{64}{9 \cdot 81},\ \ q^6 = \left(\frac{2}{3}\right)^6.$$

Ha $q^6 = \left(\frac{2}{3}\right)^6$, akkor $q = \frac{2}{3}$ vagy $q = -\frac{2}{3}$.

F e l e l e t. $\frac{2}{3}$ vagy $-\frac{2}{3}$.

Vizsgáljuk meg a mértani sorozat tulajdonságait.

1. tétel. A mértani sorozat minden tagjának négyzete a második tagtól kezdődően a két szomszédos tagjának szorzatával egyenlő:

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$$

Bizonyítás. A meghatározás szerint $b_{n-1} = \frac{b_n}{q}$, $b_{n+1} = b_n \cdot q$.

Vagyis $b_{n+1} \cdot b_{n-1} = b_n \cdot q \cdot \frac{b_n}{q} = b_n^2$.

A tétel fordítottja is igaz. Bizonyítsátok be önállóan!

2. tétel. **A mértani sorozat első *n* tagjának összegét abban az esetben, ha $q \neq 1$, a következő képlet fejezi ki:**

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Bizonyítás.

Legyen $S_n = b_1 + b_1q + b_1q^2 + \ldots + b_1q^{n-2} + b_1q^{n-1}$. Megszorozzuk az egyenlőség mindkét oldalát a q hányadossal:

$$S_nq = b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + \ldots + b_1q^{n-1} + b_1q^n.$$

Tagonként kivonjuk az első egyenlőségből a másodikat, miáltal az azonos tagok, $b_1q, b_1q^2, b_1q^3 \ldots, b_1q^{n-1}$ kiesnek. Eredményként a következő egyenlőséget kapjuk:

$$S_nq - S_n = b_1q^n - b_1 \text{ vagy } S_n(q - 1) = b_1(q^n - 1),$$

ahonnan

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Ezzel a képlettel számíthatjuk ki a b_1 első tagú és $q \neq 1$ hányadosú mértani sorozat első *n* tagjának összegét.

Ha $q = 1$, akkor ez a képlet nem alkalmazható (nullával nem lehet osztani). Mivel ebben az esetben a sorozat minden tagja egyenlő b_1, ezért $S_n = nb_1$.

3. példa. Határozzátok meg a 2, 6, 18, 54, … mértani sorozat első húsz tagjának összegét!

✓ Megoldás. Ebben a sorozatban $b_1 = 2$, $q = 3$, ezért

$$S_{20} = \frac{2(3^{20} - 1)}{3 - 1} = 3^{20} - 1.$$

Felelet. $3^{20} - 1$.

A véges mértani sorozat tagjainak összege a következő képlettel is kiszámítható: $S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1}$.

Bizonyítsátok be önállóan!

A mértani sorozat első n tagjának összege az n növekedésével nagyon gyorsan nő. Megoldunk egy ezzel kapcsolatos feladatot.

Ősi indiai feladat. A maharadzsa nagyon szeretett sakkozni, ezért megígérte a játék feltalálójának, hogy busásan megjutalmazza. A feltaláló azt kérte, hogy a tábla első mezőjére egy búzaszemet tegyen, a másodikra kettőt, a harmadikra négyet, és minden következőre az előző kétszeresét. Az uralkodó nagyon elcsodálkozott, hogy ilyen keveset kér a találmányáért. Az ígéretét azonban nem tudta teljesíteni. Vajon miért?

M e g o l d á s. A sakktáblának 64 mezője van. Ezért az uralkodónak összesen $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{64}$ búzaszemet kellett volna adnia a feltalálónak.

Próbáljátok meg kiszámítani ezt az összeget. Most csak az utolsó összeadandót $2^5 = 32$, $2^{10} = 32^2 = 1024 > 10^3$ vizsgáljuk meg közelebbről:

$2^{64} = 2^4 \cdot (2^{10})^6 > 16 \cdot (10^3)^6 = 16 \cdot 10^{18} = 16\,000\,000\,000\,000\,000$.

Ha elfogadjuk, hogy 400 búzaszem tömege 1 kg, akkor 2^{64} búzaszem tömege több mint

$$16 \cdot 10^{18} : (4 \cdot 10^3) = 4 \cdot 10^{15} \text{ (kg) vagy } 4 \cdot 10^{12} \text{ t.}$$

És ez csak az utolsó összeadandó közelítő értéke. Ekkora mennyiségű terményt több száz év alatt sem tudnak megtermelni a világ országai együttvéve.

A 2, 4, 8, 16, 32 ... mértani sorozat a természetes számok halmazán meghatározott $y = 2^x$ függvény értéksorozata.

Ellenőrizzétek magatokat!

1. Fogalmazzátok meg, mi a mértani sorozat!
2. Mi a mértani sorozat hányadosa?
3. Hogyan fejezhető ki a mértani sorozat n-edik tagja az első tagja és hányadosa által?
4. Fogalmazzátok meg a mértani sorozat tulajdonságát!
5. Mivel egyenlő a mértani sorozat első n tagjainak összege?

Oldjuk meg együtt!

1. A mértani sorozatban $b_4 = 2$, $b_7 = -54$. Határozzátok meg a következőket: b_1 és q!

✓ Megoldás. Az n-edik tag képlete szerint $b_4 = b_1 \cdot q^3$ és $b_7 = b_1 \cdot q^6$. Behelyettesítjük az egyenlőségekbe a $b_4 = 2$, $b_7 = -54$ értékeket és megoldjuk a következő rendszert: $\begin{cases} 2 = b_1 \cdot q^3, \\ -54 = b_1 \cdot q^6. \end{cases}$

Tagonként elosztjuk a második egyenletet az elsővel:

$\frac{-54}{2} = \frac{b_1 \cdot q^6}{b_1 \cdot q^3}$. A következőket kapjuk: $q^3 = -27$ és $q = -3$.

A rendszer első egyenletéből meghatározzuk b_1-et:

$$2 = b_1 \cdot (-3)^3;\ b_1 = 2 : (-27) = -\frac{2}{27}.$$

Felelet. $b_1 = -\frac{2}{27}$, $q = -3$.

2. Határozzátok meg a mértani sorozat első öt tagjának összegét, amelyben $b_1 = 8$, $q = \frac{1}{2}$!

✓ Megoldás. *Első módszer.* A mértani sorozat első n tagjainak összege a következő képlettel számítható ki:

$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$. Ha $n = 5$, akkor

$$S_5 = \frac{b_1(q^5 - 1)}{q - 1} = \frac{8 \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^5 - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{8 \cdot \left(\frac{1}{32} - 1\right)}{-\frac{1}{2}} = \frac{-8 \cdot \frac{31}{32}}{-\frac{1}{2}} = \frac{31}{2} = 15\frac{1}{2}.$$

Második módszer. Kiírjuk az adott sorozat 5 tagját: 8, 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$. Az összegüket egyszerű összeadással kapjuk meg: $15\frac{1}{2}$.

Felelet. $S_5 = 15\frac{1}{2}$.

Oldjátok meg szóban!

931. Jelöljétek meg a mértani sorozat három következő tagját:

a) 3, 6, 12, ... ; b) 16, 8, 4, ... ;

c) –1, –2, –4, ... ; d) –2, 4, –8, ... !

932. Mértaniak-e a következő sorozatok:

a) 1, 0,1, 0,01, 0,001, 0,0001;

b) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$?

Ha igen, akkor jelöljétek meg a hányadosaikat!

933. Mértaniak-e a következő sorozatok:

a) 2, 4, 6, 8, ... ; b) 1, –3, 9, 27, –81, ... ;

c) 3, 6, 12, 14, ... ; d) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$?

934. Mértani-e a 7^n, 7^{n+1}, 7^{n+2}, 7^{n+3} sorozat, ahol n tetszőleges természetes szám? És a 7^n, -7^{n+1}, 7^{n+2}, -7^{n+3} sorozat?

A szint

935. Írjátok fel annak a mértani sorozatnak az első hét tagját, amelyben:

a) $b_1 = 1, q = 3$; b) $b_1 = 10, q = \frac{1}{2}$;

c) $b_1 = -5, q = 2$; d) $b_1 = 1, q = -2$!

936. Írjátok fel annak a mértani sorozatnak az első öt tagját, amelyben:

a) $b_1 = 18, q = -1$; b) $b_1 = 5, q = 2$;

c) $b_1 = -8, q = \frac{1}{2}$; d) $b_1 = \frac{5}{27}, q = 3$!

937. Határozzátok meg az alábbi mértani sorozatok hányadosát és ötödik tagját:

a) –1, 3, ... ; b) 0,1, 0,01, ... ;

c) 625, 125, ... ; d) 4, –2, ... !

938. A mértani sorozatban $b_1 = -3, q = 2$. Határozzátok meg: b_4, b_7, b_n!

939. Határozzátok meg annak a mértani sorozatnak az első tagját, amelyben:

a) $b_8 = 384, q = 2$; b) $b_5 = 31{,}25, q = -2{,}5$!

940. $b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots$ mértani sorozat. Határozzátok meg b_{12}-t, ha:

a) $b_1 = 1, b_2 = 6$; b) $b_1 = 25, b_2 = -50$;

c) $b_3 = 1, b_4 = 0{,}5$; d) $b_2 = 2, b_4 = 4$!

941. Határozzátok meg a mértani sorozat hetedik tagját, ha:

a) $b_3 = 3, b_4 = 6$; b) $b_3 = -1{,}5, b_5 = -6$;

c) $b_5 = 80, b_6 = -160$; d) $b_6 = 18, b_4 = 72$!

942. Írjátok fel a mértani sorozatok n-edik tagjának képletét:

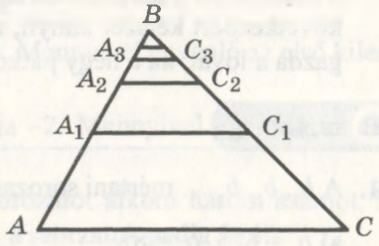
a) 2, 6, 18, ... ; b) $\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, 1, \ldots$;

c) $1, \sqrt{2}, 2, \ldots$; d) 64, –32, 16, ... !

943. Határozzátok meg azon mértani sorozat n-edik tagjának sorszámát, amelyben:

a) $b_1 = 4, q = 3, b_n = 324$; b) $b_1 = -8, q = 2, b_n = -256$!

944. Az A_1C_1 szakasz az ABC háromszög középvonala. Az A_2C_2 az A_1BC_1 háromszögé, az A_3C_3 szakasz pedig az A_2BC_2 háromszögé és így tovább (140. ábra). Igaz-e az állítás, hogy az $AC, A_1C_1, A_2C_2, A_3C_3, \ldots$ szakaszok hosszaikkal mértani sorozatot alkotnak?



140. ábra

945. A mértani sorozat első tagja b_1, hányadosa q. Határozzátok meg első tagjainak az összegét, ha:

a) $b_1 = -3, q = 3, n = 6$; b) $b_1 = 2{,}5, q = 0{,}4, n = 4$;

c) $b_1 = 4, q = -2, n = 10$; d) $b_1 = \frac{1}{2}; q = -\frac{1}{3}, n = 6$!

946. Határozzátok meg a mértani sorozat első n tagjainak összegét, ha:

a) $b_1 = 1, q = 2, n = 9$; b) $b_1 = 1, q = \frac{1}{2}, n = 10$;

c) $b_1 = 81, q = \frac{1}{3}, n = 8$; d) $b_1 = -2, q = 2, n = 12$!

947. Határozzátok meg a mértani sorozatok első hat tagjának összegét!

a) $-2, 10, \ldots$; b) $5, 10, \ldots$; c) $32, -16, \ldots$;

d) $3, 3, 3, 3, 3, 3, \ldots$; e) $5, 10, 20, 40, 80, \ldots$!

948. Határozzátok meg a mértani sorozatok első tizenöt tagjának összegét:

a) $1, 2, 4, 8, \ldots$; b) $1024, 512, 256, \ldots$;

c) $1, -2, 4, -8, \ldots$; d) $1024, -512, 256, \ldots$!

949. ***Ókori feladat.*** Egy okos szegény ember kétheti szállást kért egy fösvény úrnál a következő feltétel mellett: „Az első napért 1 dinárt, a másodikért 2 dinárt, a harmadikért 3 dinárt stb. fizetek neked, 1 dinárral növelve a napi szállásdíj összegét. Te nekem könyöradományként az első napon 1 garast, a másodikon 2 garast, a harmadikon 4 garast stb. biztosítasz, naponta duplázva az alamizsna összegét." A fukar úr örömmel ment bele az alkuba, azt gondolva, hogy jó üzletet köt. Mennyi pénzt kapott a gazdag úr? Tekintsük a garast a dinár váltópénzének; 1 dinár = 100 garas.

950. ***Euler feladata.*** A lovát áruba bocsátó gazda a lókupecnek azt az ajánlatot tette, hogy csak azokért a szögekért fizessen, amelyekkel a patkók vannak az állat patáihoz rögzítve. Így az első szögért 1 garast, a másodikért 2 garast, a harmadikért 4 garast stb. kért, azaz minden következőért kétszer annyit, mint az előzőért. Mennyiért adta el a gazda a lovát, ha a négy patkóban 32 szög volt?

B szint

951. A $b_1, b_2, b_3 \ldots$ mértani sorozat. Határozzátok meg b_1-et és q-t, ha:

a) $b_3 = 625, b_7 = 81$; b) $b_5 = 3, b_{10} = -27\sqrt{3}$;

c) $b_4 = \frac{9}{32}, b_8 = \frac{1}{18}$; d) $b_4 = -6, b_8 = -1\frac{115}{128}$!

952. Írjátok fel a mértani sorozatok n-edik tagjának képletét:

a) $3, -6, \ldots$; b) $-0{,}1, -1, \ldots$;

c) $12, 8, \ldots$; d) $\frac{2}{5}, 4, \ldots$!

953. Az alábbi mértani sorozatok tagja-e a 384-es szám:

a) $3, 6, \ldots$; b) $\frac{4}{81}, \frac{8}{27}, \ldots$?

954. A –27, –9, 18, 20, 27 számok közül melyik tagja annak a mértani sorozatnak, amelynek n-edik tagja:

a) $b_n = 5 \cdot 2^n$; b) $x_n = (-3)^{n+1}$;

c) $y_n = -36 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n$; d) $c_n = -12 \cdot \left(\frac{-3}{2}\right)^n$?

955. Határozzátok meg annak a mértani sorozatnak az első tagját és hányadosát, amelyben:

a) $b_1 + b_3 = 10$, $b_2 + b_4 = 30$; b) $b_5 - b_1 = 15$, $b_4 - b_2 = 6$!

956. Mértani-e a $c_n = (-3)^{n+2}$ képlettel megadott sorozat? Ha igen, akkor határozzátok meg az első tagját és hányadosát!

957. Bizonyítsátok be, hogy mértani az adott (x_n) sorozat:

a) $x_n = 3 \cdot 7^n$; b) $x_n = 5 \cdot 2^{n+1}$; c) $x_n = 0{,}4^{1+n}$!

958. Bizonyítsátok be, hogyha a, b, c mértani sorozat, akkor:

$$(a^2 + b^2)c = (b^2 + c^2)a!$$

959. Adott a b_1, b_2, b_3, b_4, … mértani sorozat. Bizonyítsátok be, hogy mértaniak a következő sorozatok:

a) b_1b_2, b_2b_3, b_3b_4, … ;

b) $b_1 + b_2$, $b_2 + b_3$, $b_3 + b_4$, … ;

c) $b_1 - b_2$, $b_2 - b_3$, $b_3 - b_4$, … !

960. A mértani sorozat ötödik tagja 1. Mennyivel egyenlő az első kilenc tagjának szorzata?

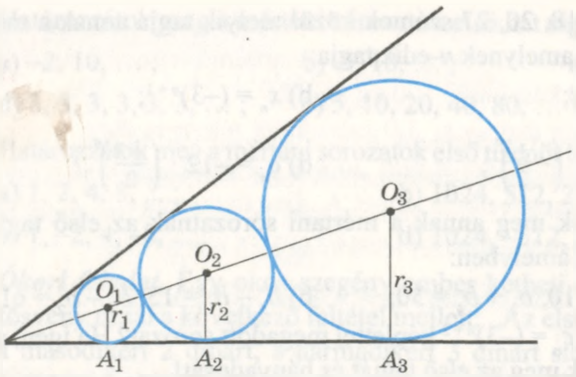
961. A mértani sorozat hatodik tagja –2. Mennyivel egyenlő az első tizenegy tagjának szorzata?

962. Határozzátok meg a mértani sorozatot alkotó három számot, ha ismeretes, hogy az összegük 21, a szorzatuk pedig 216!

963. Az 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 mértani sorozat számait úgy helyezzétek el egy négyzet kilenc kockájába, hogy a szorzatuk minden egyes sorban és oszlopban, valamint mindegyik átlóban egymással egyenlő legyen!

964. A légritkító szivattyú minden egyes üteme 5%-kal csökkentette az edényben lévő levegő mennyiségét. Számítsátok ki az edényben uralkodó légnyomást a szivattyú tíz üteme után, ha az eredetileg 760 Hgmm volt!

965. Képezhetnek-e mértani sorozatot a derékszögű háromszög oldalhosszai?



141. ábra

966. A hegyesszögbe n számú, egymást érintő körvonal van írva (141. ábra). Bizonyítsátok be, hogy a körsugarak hosszúságai mértani sorozatot képeznek! Mitől függ ennek a hányadosa?

967. Írjátok fel a következő tulajdonságokkal rendelkező sorozat néhány első tagját: $b_1 = 1$, $b_n = 3b_{n-1}$! Határozzátok meg n-edik tagjának a képletét! Számítsátok ki b_5-öt és S_{10}-et!

968. A $40\frac{1}{2}$ és $5\frac{1}{3}$ számok közé helyezzetek négy olyan számot, amelyek az adott számokkal együtt mértani sorozatot képeznek! Határozzátok meg kétféle módszerrel az összegüket!

969*. Határozzátok meg a mértani sorozat tagjainak a számát, amelyben:

a) $b_1 = 3$, $b_n = 96$, $S_n = 189$;

b) $b_1 = 1$, $b_n = -512$, $S_n = -341$;

c) $q = -\frac{1}{3}$, $b_n = \frac{1}{3}$, $S_n = 20\frac{1}{3}$;

d) $q = \sqrt{3}$, $b_n = 18\sqrt{3}$, $S_n = 26\sqrt{3} + 24$!

970. Határozzátok meg azt a négy számot, amelyek közül az első három mértani sorozat egymást követő tagja, az utolsó három pedig számtani sorozat tagja, ha a szélső számok összege 21, a középső számoké pedig 18!

971. Keressetek olyan x, y, z, t számokat, hogy az x, y, -2, z, -8, t sorozat mértani legyen!

972. Az alábbi mértani sorozatok hányadik sorszámú tagjától kezdődően:

a) 729, 243, ... lesz mindegyik tag kisebb 0,01-nél;

b) $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$, ... lesz mindegyik tag 5-nél nagyobb?

973. Vezessétek le a mértani sorozat első n tagja szorzatának képletét!

974. Az eset több mint száz éve történt. Egy juhász 20 birkát adott el 200 ezüstért. Amikor az egyik vevő sokáig alkudozott az áron, a pásztor a következő javaslattal állt elő: „Adj az első bárányért 1 garast, a másodikért 2 garast, a harmadikért 4 garast és minden következőért kétszer annyit, mint az előzőért!" A vásárló elfogadta az ajánlatot. Mennyit fizetett a 200 birkáért? (Tekintsük úgy, hogy 1 ezüst = 100 garas.)

975. Az emberi szervezetbe bekerült baktérium 20 percenként osztódik, és mindegyik újonnan keletkezett baktérium is 20 percenként kettéosztódik. Hány baktérium lesz egy nap alatt a szervezetben?

976. Képzeljük el, hogy időszámításunk kezdetén M nő két leánygyermeket szült, akik 30 éves korukig szintén két-két lányt szültek és így tovább. Lehetséges-e ez? Ha igen, akkor hány leszármazottja élne M-nek napjainkban?

Ismétlő gyakorlatok

977. Határozzátok meg az $y = x^2$ függvény értelmezési tartományát:

a) (0; 3); b) (–5; –3); c) [–2; 3); d) [–4; 4)!

978. A 142. ábrán gyufából kirakott alakzatok láthatók.



142. ábra

Képzeljétek el, hogy az alakzatok sora folytatódik. Hány gyufára lenne szükség az F_9 alakzat kirakásához?

979. Egy fémdarab tömege 440 g, a másiké 429 g. Határozzátok meg a fémdarabok mindegyikének sűrűségét, ha az első sűrűsége 1 g/cm³-rel nagyobb, a térfogata pedig 5 cm³-rel kisebb, mint a másiké!

980. Oldjátok meg grafikusan az egyenletrendszert:

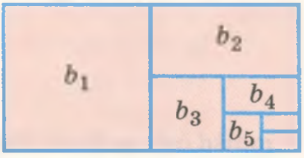
a) $\begin{cases} xy - 6 = 0, \\ x - y = 1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} xy + 6 = 0, \\ 2x + y = 4! \end{cases}$

23. §. ÖSSZEGSZÁMÍTÁSI FELADATOK

Eddig nem foglalkoztunk végtelen számú összeadandóból álló sorozatok összegeivel, pedig néha erre is szükség lehet. Határozzuk meg például az $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$ végtelen mértani sorozat összegét!

Legyen a 143. ábrán látható négyzet b_1 területe 1, a b_2, b_3, b_4, ... téglalapok területei pedig megfelelően $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$. Ha a téglalapok számát a végtelenségig növeljük, akkor területük összege egyre jobban megközelíti a 2-t. Ezért úgy tekintjük, hogy

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 2.$$



143. ábra

Általánosítsuk a példát. Adva van a b_1, b_1q, b_1q^2, b_1q^3, ... végtelen mértani sorozat, melynek hányadosa $|q| < 1$. Az ismert képlet alapján

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q} \quad \text{vagy} \quad S_n = \frac{b_1}{1 - q} - \frac{b_1 q^n}{1 - q}.$$

Ebben az esetben a $\frac{b_1}{1-q}$ állandó szám, az n pedig változó. Ha $|q| < 1$, akkor az n korlátlan növekedésekor a q^n hatvány 0-hoz tart (ezt így jelöljük: ha $n \to \infty$, akkor $q^n \to 0$). Ekkor a $\frac{b_1 q^n}{1-q}$ tört értéke is 0-hoz tart.

Vagyis ha $n \to \infty$, akkor $S_n \to \frac{b_1}{1-q}$. Ezért megegyezhetünk abban, hogy azon végtelen mértani sorozat összegének, melynek első tagja b_1, hányadosa pedig $|q| < 1$, a $\frac{b_1}{1-q}$ számot tekintjük.

Másként fogalmazva, ha $|q| < 1$ és $b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \ldots = S$, akkor

$$S = \frac{b_1}{1-q}.$$

1. példa. Határozzátok meg a $4, -\frac{4}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{4}{27}, \ldots$ mértani sorozat összegét!

✓ Megoldás. Itt $b_1 = 4$, $q = -\frac{1}{3}$, ezért a keresett összeg:

$$S = \frac{4}{1 + \frac{1}{3}} = 3.$$

Felelet. $S = 3$.

Az $S = \frac{b_1}{1-q}$ képlettel a *végtelen szakaszos tizedes törtek* közönséges törtek alakjában írhatók le.

2. példa. Írjátok fel közönséges törtek alakjában a végtelen szakaszos tizedes törteket:

a) 0,(2); b) 1,(6); c) 0,(23)!

✓ Megoldás.

a) $0,(2) = 0,2222\ldots = \frac{2}{10} + \frac{2}{100} + \frac{2}{1000} + \ldots = \frac{0,2}{1-0,1} = \frac{2}{9}$;

b) $0,(6) = 0,6666\ldots = \frac{6}{10} + \frac{6}{100} + \frac{6}{1000} + \ldots = \frac{0,6}{1-0,1} = \frac{2}{3}$.

Tehát $1,(6) = 1 + 0,(6) = 1\frac{2}{3}$;

c) $0,(23) = 0,2323\ldots = \frac{23}{100} + \frac{23}{10000} + \ldots = \frac{0,23}{1-0,01} = \frac{23}{99}$.

Felelet. a) $\frac{2}{9}$; b) $1\frac{2}{3}$; c) $\frac{23}{99}$.

A végtelen szakaszos tizedes tört, amelynek egész része nullával egyenlő, a szakasza pedig közvetlenül a tizedesvessző után következik, olyan közönséges törttel egyenlő, amelynek a számlálója a szakaszban lévő szám, s a nevezőjében annyi kilences található, ahány számjegy a szakaszban van.

Gondolkodjatok el azon, hogyan írható fel közönséges tört alakjában például az 1,5(6) szám.

Eddig a legegyszerűbb számtani és mértani sorozatok összegét határoztuk meg. Azonban gyakran van szükség más sorozatok összegeinek kiszámítására is. Megvizsgálunk néhány példát.

3. példa. Határozzátok meg az alábbi sorozat első száz tagjának S összegét:

$$\frac{1}{1\cdot 2}, \frac{1}{2\cdot 3}, \frac{1}{3\cdot 4}, \ldots, \frac{1}{n(n+1)}, \ldots !$$

✓Megoldás. Az adott sorozat minden tagja megadható különbség alakjában:

$$\frac{1}{1\cdot 2} = 1 - \frac{1}{2}, \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \ldots .$$

Vagyis

$$S = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{100\cdot 101} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{100} - \frac{1}{101} =$$

$$= 1 - \frac{1}{101} = \frac{100}{101}.$$

Felelet. $S = \frac{100}{101}$.

4. példa. Határozzátok meg az első n természetes számok négyzeteinek összegét!

✓ M e g o l d á s. A „kéttag köbének" képlete alapján $(a + 1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$, ahonnan $3a^2 = (a + 1)^3 - a^3 - 3a - 1$. Az a változóval folytonosan 1, 2, 3, ..., n értékeket közölve n számú igaz számegyenlőséget kapunk:

$$3 \cdot 1^2 = 2^3 - 1^3 - 3 \cdot 1 - 1,$$
$$3 \cdot 2^2 = 3^3 - 2^3 - 3 \cdot 2 - 1,$$
$$3 \cdot 3^2 = 4^3 - 3^3 - 3 \cdot 3 - 1,$$
$$3 \cdot 4^2 = 5^3 - 4^3 - 3 \cdot 4 - 1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$3 \cdot n^2 = (n + 1)^3 - n^3 - 3 \cdot n - 1.$$

Az egyenlőségeket tagonként összeadva (a $2^3, 3^3, 4^3, \ldots, n^3$ kölcsönösen megsemmisítik egymást) a következő azonosságokat kapjuk:

$$3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) =$$
$$= (n + 1)^3 - 3(1 + 2 + 3 + \ldots + n) - n - 1,$$

ahonnan

$$3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) =$$
$$= (n + 1)^3 - \frac{3}{2}n \cdot (n + 1) - (n + 1) = \frac{n}{2} \cdot (n + 1)(2n + 1).$$

Vagyis

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n}{6} \cdot (n + 1)(2n + 1).$$

F e l e l e t. $\frac{n}{6} \cdot (n + 1)(2n + 1)$.

Figyeljétek meg az $a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4$ kifejezést! Ez az a^4 első tagú és $\frac{b}{a}$ hányadosú mértani sorozat első tagjainak összege. A mértani sorozat tagjai összegének képlete szerint

$$a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4 = \frac{a^4\left(\frac{b^5}{a^5} - 1\right)}{\frac{b}{a} - 1} = \frac{a^5 - b^5}{a - b}.$$

Vagyis $a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$.

Ugyanígy bizonyíthatók a következő azonosságok:

$$a^6 - b^6 = (a - b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5).$$

$$a^7 - b^7 = (a - b)(a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6).$$

Általánosítva:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

A „négyzetek különbsége" és a „köbök különbsége" ennek az általános képletnek a speciális esetei.

Ellenőrizzétek magatokat!

1. Hogyan határozható meg a természetes számok első n tagjának összege?
2. Mennyivel egyenlő a –100 és 100 közötti valamennyi egész szám összege?
3. Létezik-e azon végtelen mértani sorozat tagjainak az összege, amelynek a hányadosa nagyobb 1-nél?
4. Mennyivel egyenlő a végtelen mértani sorozat tagjainak az összege, ha hányadosának abszolút értéke kisebb 1-nél ($|q| < 1$) ?
5. Mennyivel egyenlő a végtelen számú összeadandók összege:

$4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$?

Oldjuk meg együtt!

1. Határozzátok meg a $3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots$ sorozat összegét, amelynek az összeadandói mértani sorozat tagjai!

✓ Megoldás. A sorozat első tagja a 3-as szám, a hányadosa pedig $\frac{1}{3}$, ezért a keresett összeg $S = \frac{3}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3 \cdot 3}{3 - 1} = 4{,}5$.

Felelet. 4,5.

2. Egyszerűsítsétek a kifejezést:

$$\frac{1}{3 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 15} + \ldots + \frac{1}{(4n - 1)(4n + 3)}.$$

✓ M e g o l d á s. Megszorozzuk és elosztjuk 4-gyel az adott összeget. A következőt kapjuk:

$$\frac{1}{3\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 15}+\ldots+\frac{1}{(4n-1)(4n+3)}=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{4}{3\cdot 7}+\frac{4}{7\cdot 11}+\frac{4}{11\cdot 15}+\ldots+\frac{4}{(4n-1)(4n+3)}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{11}-\frac{1}{15}+\ldots+\frac{1}{(4n-1)}-\frac{1}{(4n+3)}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{(4n+3)}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{4n+3-3}{3\cdot(4n+3)}=\frac{n}{3\cdot(4n+3)}.$$

F e l e l e t: $\frac{n}{3\cdot(4n+3)}$.

Oldjátok meg szóban!

981. Határozzátok meg a sorozat tagjainak összegét:

$-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$!

982. Határozzátok meg azon számtani sorozat száz tagjának összegét, amelyben:

$a_1 = 3$, $d = 0$!

983. Mennyivel egyenlők az összegek:

a) $1-2+3-4+5-6+7-8+9-10$;

b) $a-8x+2a-4x+4a-2x+8a-x$?

A szint

984. Határozzátok meg a végtelen mértani sorozatok összegét:

a) $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \ldots$;

b) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$;

c) $9, -3, 1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ldots$;

d) $-8, 4, -2, 1, -\frac{1}{2}, \ldots$!

985. Határozzátok meg azokat az összeget, amelyeknek az összeadandói az alábbi mértani sorozatok egymás után következő tagjai:

a) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots$;

b) $2-\frac{2}{5}+\frac{2}{25}-\frac{2}{125}+\ldots$;

c) $16 - 8 + 4 - 2 + \ldots$; d) $-1 - \frac{3}{4} - \frac{9}{16} \ldots$!

986. ***Archimédesz feladata.*** Határozzátok meg a következő végtelen mértani sorozat összegét:

$$1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \ldots !$$

987. Határozzátok meg a végtelen mértani sorozat összegét:

a) $3 + \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \ldots$;

b) $6 + \frac{6}{10} + \frac{6}{100} + \frac{6}{1000} + \ldots$!

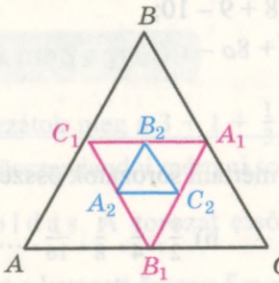
988. Adjátok meg közönséges törtek alakjában a végtelen szakaszos tizedes törteket:

a) 0,3333...; b) 0,6666...; c) 0,111111... !

989. Írjátok fel közönséges törtek alakjában a végtelen tizedes törteket:

a) 0,(4); b) 0,(5); c) 0,(12); d) 0,(25)!

990. Adva van az 1 cm oldalhosszúságú egyenlő oldalú háromszög. Oldalainak felezőpontjai egy másik háromszög csúcsai, míg az utóbbi háromszög oldalainak felezőpontjai egy harmadik háromszög csúcsai stb. (144. ábra). Határozzátok meg valamennyi háromszög kerületeinek összegét!



144. ábra.

991. Állítsatok össze a **990**-edikhez hasonló, négyzetekkel kapcsolatos feladatot, és oldjátok is meg!

992. ***Oresme feladata.*** Bizonyítsátok be, hogy:

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{1}{8} + \frac{3}{32} + \ldots = \frac{7}{4} !$$

B szint

993. Határozzátok meg a végtelen mértani sorozat összegét:

a) $1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \ldots$;

b) $5, \sqrt{5}, 1, \ldots$;

c) $1, \pi - 3, (\pi - 3)^2, \ldots$;

d) $\frac{1}{2-\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}, \ldots$!

994. Az r sugarú körbe szabályos háromszög van írva, a háromszögbe egy másik kört írtak, amelybe ugyancsak egy háromszög van beírva. Határozzátok meg mindegyik háromszög kerületeinek összegét és mindegyik körvonal hosszának összegét!

995. Adjátok meg közönséges törtek alakjában a végtelen szakaszos tizedes törteket:

a) 10,(4); b) 3,0(6); c) 0,(24); d) 1,4(7)!

996. Írjátok fel közönséges törtek alakjában a következő számokat:

a) 3,(5); b) 21,(21); c) 1,1(6); d) 10,00(52)!

997. Ismeretes, hogy $|a| < 1, |x| < 1$. Egyszerűsítsétek a végtelen összegeket:

a) $1 + a + a^2 + a^3 + \ldots$;

b) $1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$.!

998. Határozzátok meg a végtelen számú összeadandók összegét:

$$(8 + 4\sqrt{2}) + (4 + 2\sqrt{2}) + (2 + \sqrt{2}) + \ldots,$$

amelyek mindegyike kétszer kisebb az előzőnél!

999. Írjatok fel egy olyan végtelenül fogyó mértani sorozatot, amelynek első tagja 3, tagjainak összege pedig 4!

1000. A végtelenül fogyó mértani sorozat első tagja 8-cal nagyobb, mint a második, az összege pedig 18-cal egyenlő. Határozzátok meg a sorozat negyedik tagját!

1001. A végtelenül fogyó mértani sorozat tagjainak összege 1,5, míg négyzeteik összege 1,125. Határozzátok meg a sorozat első tagját és hányadosát (kvóciensét)!

1002. Határozzátok meg az első száz összeadandó összegét:

a) $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \ldots + n(-1)^{n+1} + \ldots$;

b) $1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + n^2(-1)^{n+1} + \ldots$!

1003. Határozzátok meg a sorozat első negyven tagjának összegét:

a) $\frac{41}{1\cdot 2}, \frac{41}{2\cdot 3}, \frac{41}{3\cdot 4}, \frac{41}{4\cdot 5}, \dots, \frac{41}{n(n+1)}, \dots$;

b) $\frac{3}{1\cdot 4}, \frac{3}{4\cdot 7}, \frac{3}{7\cdot 10}, \frac{3}{10\cdot 13}, \dots, \frac{3}{(3n-2)(3n+1)}, \dots$!

1004. Bizonyítsátok be az azonosságot:

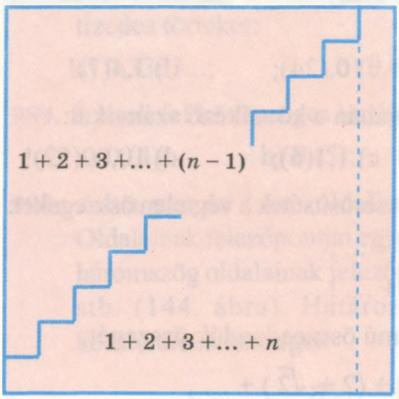
$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n + (n-1) + \dots + 3 + 2 + 1 = n^2$!

Magyarázzátok meg a mértani tartalmát a 145. ábra alapján!

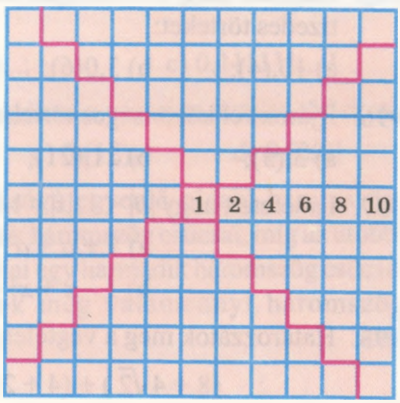
1005. Bizonyítsátok be az azonosságot:

$8 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n) + 1 = (2n+1)^2$!

Magyarázzátok meg a mértani tartalmát a 146. ábra alapján!



145. ábra



146. ábra

Oldjátok meg az egyenleteket, amelyeknek a bal oldala mértani sorozat tagjainak az összege (**1006–1007**)!

» **1006.** $\frac{1}{x} + x + x^2 + \dots + x^4 + \dots = \frac{7}{2}$, ha $|x| < 1$.

1007. $1 + 2x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots = \frac{13}{6}$, ha $|x| < 1$.

Bizonyítsátok be az azonosságokat (**1008–1010**)!

» **1008.** $(1 + 2 + 3 + \dots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$.

1009. $4(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) = n^2(n+1)^2$.

1010. $3(1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = n(n+1)(n+2)$.

OLDJÁTOK MEG ÖNÁLLÓAN A FELADATOKAT!

I. változat

1°. Határozzátok meg a 3, 7, 11, 15, ... számtani sorozat n-edik és 50-edik tagját, valamint első 50 tagjának az összegét!

2°. Határozzátok meg a 2, –6, 18, –54, ... mértani sorozat n-edik tagját és első hét tagjának az összegét!

3*. Határozzátok meg annak a növekvő mértani sorozatnak a hányadosát, melynek első, második és negyedik tagja számtani sorozatot képez!

II. változat

1°. Határozzátok meg a 2, 7, 12, 17, ... számtani sorozat n-edik és 40-edik tagját, valamint első 40 tagjának az összegét!

2°. Határozzátok meg a 2, –4, 8, –16, ... mértani sorozat n-edik tagját és első tíz tagjának az összegét!

3*. Határozzátok meg annak a növekvő mértani sorozatnak a hányadosát, melynek második, harmadik és ötödik tagja számtani sorozatot képez!

III. változat

1°. Határozzátok meg az 5, 9, 13, 17, ... számtani sorozat n-edik és 50-edik tagját, valamint első 50 tagjának az összegét!

2°. Határozzátok meg a 3, –6, 12, –24, ... mértani sorozat n-edik tagját és első tíz tagjának az összegét!

3*. Határozzátok meg annak a növekvő mértani sorozatnak a hányadosát, melynek harmadik, negyedik és hatodik tagja számtani sorozatot képez!

IV. változat

1°. Határozzátok meg a 4, 7, 10, 13, ... számtani sorozat n-edik és 60-adik tagját, valamint első 60 tagjának az összegét!

2°. Határozzátok meg a 3, –9, 27, –81, ... mértani sorozat n-edik tagját és első nyolc tagjának az összegét!

3*. Határozzátok meg annak a növekvő mértani sorozatnak a hányadosát, melynek negyedik, ötödik és hetedik tagja számtani sorozatot képez!

A FEJEZET TARTALMÁNAK ÖSSZEFOGLALÁSA

A *számsorozat* az összes vagy az első n természetes számok halmazán megadott függvény.

Számtani sorozatnak nevezzük mindazokat a sorozatokat, amelyekben (a másodiktól kezdve) bármelyik tag és az azt megelőző tag különbsége állandó. Ezt az állandó különbséget differenciának (*különbségnek*) nevezzük és d betűvel jelöljük.

A számtani sorozat egymás után következő első tagjait a_1, a_2, a_3, …, a_n, … betűkkel jelölik. A sorozat n-edik tagja: $a_n = a_1 + (n-1)d$.

A számtani sorozat első n tagjainak összege:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n.$$

Mértani sorozatnak nevezzük mindazokat a sorozatokat, amelyekben (a másodiktól kezdve) bármelyik tag és az azt megelőző tag hányadosa állandó. Ezt az állandó hányadost (kvóciensnek) *hányadosnak* nevezzük és q betűvel jelöljük. Úgy tekintik, hogy $b_1 \neq 0$, $q \neq 0$.

Ha b_1, b_2, b_3, … , b_n, … a mértani sorozat első tagjai, akkor n-edik tagja: $b_n = b_1 q^{n-1}$.

A mértani sorozat első n tagjainak összege:

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}, q \neq 1.$$

Ha $q = 1$, akkor $S_n = nb_1$.

Ha a végtelen mértani sorozat hányadosa kisebb 1-nél, akkor összes tagjának összege a következő képlettel határozható meg:

$$S = \frac{b_1}{1 - q}.$$

Ezzel a képlettel írhatók le közönséges törtek alakjában a végtelen szakaszos tizedes törtek:

$$0,(5) = 0,555\ldots = \frac{5}{10} + \frac{5}{100} + \ldots = \frac{0,5}{1 - 0,1} = \frac{5}{9}.$$

MATEMATIKATÖRTÉNET

Az egyiptomi Rhind-papiruszon (i. e. II. évezred) a következő feladat olvasható: „Ossz szét 10 véka árpát tíz ember között úgy, hogy mindenki $\frac{1}{8}$-dal többet kapjon, mint a mellette lévő!” Az $a,\ a+\frac{1}{8},\ a+\frac{2}{8},\ \ldots,\ a+\frac{9}{8}$ számtani sorozat tíz tagjának meghatározásáról van szó, amelyek összege 10-zel egyenlő.

Az ókori babilóniaiak a többi között ki tudták számolni az $1+2+2^2+2^3+\ldots+2^9$ mértani sorozat tagjainak összegét.

Az ókori Görögország matematikusai már az i. e. V. században tudták, hogy

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1),$$
$$2+4+6+\ldots+2n=n(n+1),$$
$$1+3+5+\ldots+(2n+1)=n^2.$$

Eukleidész *Elemek* című művében le van írva a szabály, amely alapján kiszámítható a mértani sorozat tagjainak összege.

Archimédesz levezette, miként számítható ki az első n természetes szám négyzeteinek összege. A tudós meg tudta határozni a végtelenül fogyó mértani sorozat tagjainak összegét is.

Az első n természetes számok köbei összegének kiszámítását lehetővé tévő

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=(1+2+3+\ldots+n)^2$$

összefüggést Abu-Bekri bagdadi matematikus fedezte fel a XI. században.

Sok számsor n tagjai összegének kiszámítására dolgozott ki az itt következőhöz hasonló

$$1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\ldots+n(n+1)(n+2),$$

$$1+3+6+10+\ldots+\frac{1}{2}n(n+1),$$

$$\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)},$$

eredeti módszert V. J. Bunyakovszkij ukrán matematikus (lásd 65. old.).

FELKÉSZÜLÉS A TÉMAISMERETI ÉRTÉKELÉSRE

4. sz. tesztfeladat

1. Határozzátok meg a számtani sorozat hetedik tagját, ha $a_6 + a_8 = 20$:
   a) 5; b) 20; c) 10; d) 15!
2. Számítsátok ki a mértani sorozat első tagját, ha $b_3 = 4$, $b_4 = 2$:
   a) 2; b) 4; c) 8; d) 16!
3. Határozzátok meg annak a sorozatnak az ötödik tagját, amely a következő képlettel van megadva:
   $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 3 \cdot a_n$:
   a) 162; b) 54; c) 18; d) 93!
4. Határozzátok meg a végtelenül fogyó mértani sorozat összegét:
   $2, -\frac{2}{3}, \frac{2}{9}, -\frac{2}{27}, \ldots$:
   a) $\frac{3}{2}$; b) $1\frac{1}{2}$; c) $-\frac{3}{2}$; d) 1!
5. Határozzátok meg az összes kétjegyű páros szám összegét:
   a) 2408; b) 2450; c) 2440; d) 2430!
6. Határozzátok meg a $b_3 \cdot b_4 \cdot b_5$ mértani sorozat tagjainak szorzatát, ha $b_4 = 2$:
   a) 4; b) 14; c) 8; d) 60!
7. Írjátok fel a 2, 6, … számtani sorozat n-edik tagjának képletét:
   a) $a_n = n^2 + n$; b) $a_n = 4n - 2$; c) $a_n = 4n + 2$; d) $a_n = n - n^2$!
8. Határozzátok meg a mértani sorozat első hat tagjának összegét, ha: $b_1 = 3$, $q = 2$:
   a) 197; b) 90; c) 189; d) 93!
9. Milyen két számot kell elhelyezni a 2 és a 31,25 számok közé, hogy együtt mértani sorozatot képezzenek:
   a) 1 és 7; b) 3 és 4,5; c) 2,5 és 8; d) 3,5 és 4?
10. Milyen sorszámú a 3, 6, … mértani sorozatban a 384 szám:
    a) 7; b) 9; c) 8; d) 10?

Típusfeladatok a 4. sz. dolgozathoz

1°. A számtani sorozatban $a_1 = 4$, $a_2 = 14$.
Határozzátok meg: a) d; b) a_5; c) S_{10}!

2°. A mértani sorozatban $b_1 = 16$, $b_2 = 8$.
Határozzátok meg: a) q; b) b_6; c) S_5!

3•. Határozzátok meg a számtani sorozat nyolcadik tagját, ha $a_2 + a_{14} = 20$!

4°. Határozzátok meg a végtelen mértani sorozat összegét:

$16,\ -4,\ 1,\ -\frac{1}{4},\ \ldots$!

5. Fejezzétek ki közönséges tört alakjában:
a°) 0,(2); b•) 0,(25); c••) 0,3(8)!

6•. Határozzátok meg a mértani sorozat n tagjainak számát, amelyben

$b_1 = \frac{3}{2}$, $b_n = 768$, $S_n = 1534{,}5$!

7•. A $-3{,}6; -3{,}3; -3, \ldots$ számtani sorozat melyik sorszámú helyétől pozitívak a tagok?

8•. Határozzátok meg az összes olyan természetes szám összegét, amelyek kisebbek 100-nál és oszthatók 6-tal!

9•. A kertben az egyik gyerek egy őszibarackot szakított le a fáról, a másik kettőt, s minden következő gyerek egy-egy őszibarackkal többet. Azután a gyerekek a leszakított barackokat egymás között egyenlően elosztották, aminek eredményeként mindegyiküknek 6–6 gyümölcs jutott. Hány gyerek szakított őszibarackot?

10••. A mértani sorozat első n tagjainak összege az $S_n = 2(5^n - 1)$ képlettel számítható ki.
Határozzátok meg: a) S_4; b) a_5!

ISMÉTLŐ FELADATOK ÉS GYAKORLATOK

EGYENLŐTLENSÉGEK

Oldjátok meg az egyenlőtlenségeket, megoldásaik halmazát ábrázoljátok a koordináta-egyenesen (**1011–1015**)!

1011. a) $5x < 15$; b) $0{,}6x \geq 3$; c) $-4x < 1$;
d) $7x + 1 < 15$; e) $9x - 5 \leq 13$; f) $7 - 4x > 15$.

1012. a) $3x - 5 < x + 7$; b) $x + 15 \geq 5x + 3$;
c) $0{,}3y + 1 > 3 - 0{,}2y$; d) $1{,}5z - 2 < z + 8$.

1013. a) $2x - \frac{3}{5}(x-1) > 4$; b) $5 \leq 3x - \frac{2}{3}(x-1)$;

c) $1 + \frac{2x+1}{3} < \frac{11-3x}{4}$; d) $\frac{7z-16}{5} - \frac{4z+5}{6} < 11$.

1014. a) $5 \cdot (x-1) - 2 \cdot (3x-2) > 3x - 4 \cdot (2x-7)$;
b) $4 \cdot (3-2y) - 3 \cdot (4y+5) < 5y + 3 \cdot (y-4)$.

1015. a) $0{,}5 - 1{,}2 \cdot (3-x) \leq 4{,}5 \cdot (2-4x) - 5x$;
b) $1{,}2z - 0{,}6 \cdot (5-3z) \geq 2{,}3 \cdot (2-5z) - 4z$.

1016. A változó mely értékei mellett van értelme a kifejezéseknek:

a) $\sqrt{5x-7}$; b) $\sqrt{1-2x}$; c) $\frac{1}{x} + \sqrt{3x-1}$?

1017. Határozzátok meg a függvények értelmezési tartományait:

a) $y = \sqrt{-2x}$; b) $y = \sqrt{3-7x}$; c) $y = \sqrt{x^2+3}$;

d) $y = \sqrt{-x^2-1}$; e) $y = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$; f) $y = \frac{2}{x} - \sqrt{1-x}$!

Oldjátok meg az egyenlőtlenség-rendszereket (**1018–1021**)!

1018. a) $\begin{cases} 5x+1 > 6x-18, \\ 3x-7 < 5x-13; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 7y+3 > 8y-17, \\ 3y-2 < 6y-12. \end{cases}$

1019. a) $\begin{cases} 4x+5 < 9x-5, \\ 8x-7 \geq 5x+4; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5+3z \leq 9z-4, \\ 8z-6 > 7z+3. \end{cases}$

1020. a) $\begin{cases} 3(2x-1)+2{,}5x < 4, \\ 0{,}5(x-3)-4{,}5 < x; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 1{,}5(2x-3)+2{,}7x < 2, \\ 3x-2{,}5(4-0{,}5x) > 0. \end{cases}$

1021. a) $\begin{cases} 1+2x > \frac{9x-2}{4}, \\ 7+2x > 3x-1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{2-6x}{5} \geq 3x+13, \\ 5x-8 \leq \frac{3x+2}{4}. \end{cases}$

1022. Oldjátok meg a kettős egyenlőtlenségeket:

a) $9 < 2x + 3 < 17$; b) $-8 < 3x - 2 < 25$;

c) $0 \leq 1 - x \leq 1$; d) $0 \leq 2 - x \leq 2$;

e) $-8 \leq 3 - 11z < 58$; f) $-1{,}5 < \frac{1}{6}(1 - 2y) \leq -0{,}5$!

Oldjátok meg az egyenlőtlenségeket (**1023–1025**)!

1023. a) $(x + 3)(x - 5) < 0$; b) $(x + 7)(x + 4) < 0$;

c) $(y - 2)(8 - y) > 0$; d) $(z - 5)(6 - z) < 0$.

1024. a) $(x^2 + 3)(x - 5) < 0$; b) $(y + 2)(2 + y^2) > 0$;

c) $(3x - 2)(5 - 2x) > 0$; d) $4(2y - 3)(7 - 3y) < 0$.

1025. a) $\frac{12}{x+3} > 0$; b) $\frac{18}{2z+1} < 0$; c) $\frac{13}{2-3x} > 0$;

d) $\frac{x+5}{3-2x} > 0$; e) $\frac{x-7}{2-4x} < 0$; f) $\frac{c-3}{5-2c} < 0$.

FÜGGVÉNYEK ÉS GRAFIKONOK

1026. Határozzátok meg az $f(-2)$; $f(-1)$; $f(0)$; $f(1)$; $f(2)$-t, ha a függvények a következő képletekkel vannak megadva:

a) $f(x) = 2x^2 + 3$; b) $f(x) = 3x^3 - 2$; c) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$!

1027. A függvény az $y = \frac{6x}{1+x}$ képlettel van megadva az első tíz természetes szám halmazán. Adjátok meg a függvényt táblázat alakjában!

1028. A függvény az $y = 2\sqrt{x+5}$ képlettel van megadva a $D = \{-4; -2{,}75; -1; 1{,}25; 4; 11\}$ értelmezési tartományban. Adjátok meg a függvényt táblázattal és grafikonnal!

1029. Ábrázoljátok az $y = x^2 - 4$ függvény grafikonját, ha $D = \{-1; 0; 1; 2; 3\}$! Határozzátok meg az értékkészletét!

1030. Határozzátok meg a függvények értelmezési tartományát:

a) $y = 5x - 1$; b) $y = \sqrt{x+1}$; c) $y = \sqrt{4-x}$;

d) $y = \frac{1}{x^2 - 1}$; e) $y = \frac{3x}{x+3}$; f) $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$!

1031. Az x mely értékei mellett legkisebbek a függvények értékei:

a) $y = x^2 - 6x + 9$; b) $y = x^2 + 4x + 7$;

c) $y = 4x^2 - 12x - 3$; d) $y = 4x^2 - 4x + 1$?

1032. Határozzátok meg a függvények legnagyobb értékeit:

a) $y = 3 - (x - 2)^2$; b) $y = -0{,}25(x + 5)^2$;

c) $y = 6x - x^2 - 10$; d) $y = -5x^2 + 4x + 1$!

1033. Határozzátok meg a függvények x-tengellyel alkotott metszéspontjait:

a) $y = x^2 + 10x - 11$; b) $y = x^2 + 18x + 81$;

c) $y = 6x^2 - 5x - 1$; d) $y = 2x^2 + 3x - 9$;

e) $y = -2x^2 + 7x - 3$; f) $y = 5 - 2x - 7x^2$;

g) $y = 6x^2 - x$; h) $y = -2x(x + 3)$!

1034. Szerkesszetek parabolát teljes négyzetté való alakítással:

a) $y = x^2 + 4x + 5$; b) $y = x^2 - 6x + 5$;

c) $y = x^2 - 2x - 1$; d) $y = 1 + 4x - x^2$;

e) $y = 4x^2 - 4x + 5$; f) $y = 5x^2 + 10x + 4$!

Ábrázoljátok a függvények görbéit (**1035–1037**)!

1035. a) $y = (x + 2)^2 - 3$; b) $y = (x - 1)^2 + 3$;

c) $y = -(x - 3)^2 + 1$; d) $y = 2(x + 1)^2 - 1$;

e) $y = 0{,}5(x - 2) - 2$; f) $y = 5 - (x - 0{,}5)^2$.

1036. a) $y = x(x - 2)$; b) $y = x(5 - x)$; c) $y = x^2 - 6x$;

d) $y = 2x - x^2$; e) $y = 3x^2 + 12$; f) $y = x - 2x^2$.

1037. a) $y = 3x^2 + 3x - 1$; b) $y = 2x^2 - 4x + 5$;

c) $y = -3x^2 + 6x - 1$; d) $y = -x^2 + x - 3$;

e) $y = -2x^2 + 3x + 2$; f) $y = 5x^2 + 3x - 2$.

Oldjátok meg a másodfokú egyenlőtlenségeket (**1038–1044**)!

1038. a) $x^2 + 2x > 0$; b) $x^2 - x \geq 0$;

c) $2x^2 + 5x \leq 0$; d) $3x^2 - x < 0$.

1039. a) $x^2 - 3x + 2 > 0$; b) $x^2 + 5x + 6 < 0$;

c) $x^2 - x - 2 \leq 0$; d) $x^2 + 2x - 15 \geq 0$.

1040. a) $3x^2 - x - 4 \geq 0$; b) $5x^2 - 2x - 3 > 0$;
c) $6x^2 + 5x + 1 < 0$; d) $10x^2 - 9x + 2 \leq 0$.

1041. a) $-x^2 + 2x - 1 < 0$; b) $-x^2 - 2x - 5 > 0$;
c) $6x - 9 - x^2 \geq 0$; d) $3x - 7x^2 - 5 \leq 0$.

1042. a) $(x - 3)(x + 5) > 0$; b) $(x + 2)(x + 7) < 0$;
c) $(x + 7)(x - 1) \geq 0$; d) $(x - 3)(x - 5) \leq 0$.

1043. a) $(2x + 1)(x + 1) > 0$; b) $(3x - 2)(2x + 3) \geq 0$;
c) $(x - 7)(3x + 1) < 0$; d) $(2x - 5)(3x - 6) > 0$.

1044. a) $(x - 1)(2 - x) > 0$; b) $(3 + x)(x + 7) < 0$;
c) $(3 - x)(5 + x) \leq 0$; d) $(5 - x)(1 - x) \geq 0$.

1045. Oldjátok meg az egyenlőtlenségeket:

a) $\frac{x+3}{x-7} > 0$; b) $\frac{x}{x+2} > 0$;

c) $\frac{2+x}{x+3} < 0$; d) $\frac{3-x}{x} < 0$!

1046. Oldjátok meg az egyenletrendszereket helyettesítési módszerrel:

a) $\begin{cases} x - y = 3, \\ x^2 + y^2 = 9; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 3, \\ xy = 4; \end{cases}$

c) $\begin{cases} xy - 2y = 4, \\ y = x - 2; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x + 4y = 8, \\ xy = 1. \end{cases}$

1047. Oldjátok meg az egyenletrendszereket az egyenlő együtthatók módszerével:

a) $\begin{cases} x + y - xy = -23, \\ x - y + xy = 49; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + xy = 15, \\ y^2 + xy = 10; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ (x - y)(x + y) = 8; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 19, \\ x^2y + xy^2 = -6. \end{cases}$

1048. Oldjátok meg az egyenletrendszereket új ismeretlen bevezetésének módszerével:

a) $\begin{cases} 5(x + y) + 2xy = -19, \\ x + y + 3xy = -35; \end{cases}$ b) $\begin{cases} xy + x + y = -11, \\ x^2y + y^2x = 30; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 28, \\ x + y = 4; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2xy - 3\frac{x}{y} = 15, \\ xy + \frac{x}{y} = 15! \end{cases}$

AZ ALKALMAZOTT MATEMATIKA ELEMEI.

Készítsetek matematikai modellt (egyenlet, egyenletrendszer vagy diagram alakjában) a feladatok megoldásához (**1049 –1056**)!

1049. Két bárkán összesen 900 t búza van. Hány mázsa búza van rajtuk külön-külön, ha az elsőn 20%-kal van több, mint a másikon?

1050. Az üzletbe kétféle minőségű, összesen 1800 kg liszt érkezett. Azt követően, hogy 60% első- és 70% másodosztályút értékesítettek belőle, a boltban 640 kg liszt maradt. Mennyi első- és mennyi másodosztályú lisztet kapott az üzlet?

1051. A matematikai felvételi vizsgán a diákok 15%-a egyetlen feladatot sem oldott meg, 144 felvételiző hibásan oldotta meg a feladatokat, míg azoknak a száma, akik mindegyik feladatot megoldották, úgy aránylik azokéhoz, akik egyetlen feladattal sem birkóztak meg, mint 5 : 3. Hány felvételiző tette le a matematika vizsgát?

1052. A gyorsvonat egy órával hamarabb tette meg a 400 km-es távot, mint a tehervonat. Milyen a vonatok sebessége, ha a tehervonaté 20 km/h-val kisebb, mint a gyorsvonaté?

1053. Az 1200 km-es utat megtett turista kiszámította, hogy ha 6 nappal tovább lett volna úton, akkor naponta 10 km-rel rövidebb távot tett volna meg. Mekkora távot tett meg naponta a turista?

1054. Az úszómedencét két csőből 6 óra alatt töltötték fel vízzel. Az egyik cső 5 órával hamarabb töltené fel vízzel a medencét, mint a másik. Mennyi idő alatt töltődne fel a medence a két csövön keresztül külön-külön?

1055. Két szövőnő együtt dolgozva 12 nap alatt tudja teljesíteni a rendelést. Hány nap alatt teljesítené a rendelést a két szövőnő külön-külön, ha ismeretes, hogy az egyik teljesítménye 1,5-szer akkora, mint a másiké?

1056. A vonatnak bizonyos idő alatt kellett megtennie a 250 km távot. De 2 órával az indulást követően 20 percre meg kellett állnia, s hogy behozza a késést és idejében megérkezzen a célállomásra, 25 km/h-val kellett növelnie a sebességét. Mekkora volt a vonat menetrend szerinti sebessége?

1057. Az Antonovka fajtájú alma cukortartalma tömegének 10,7%-a. Mennyi cukor van 50 kg ilyen almában?

1058. A bank 45 ügyfelet szolgált ki, ami az összes ügyfél 15%-a. Hány ügyfele van a banknak?

1059. Az árucikk árát először 10%-kal, majd további 5%-kal csökkentették, minek eredményeként az ára 34,2 hrivnya lett. Mennyi volt eredetileg az árucikk ára?

1060. Kezdetben két hordóban egyenlő mennyiségű víz volt. Később az egyik hordóban 10%-kal csökkent, majd 10%-kal nőt a víz mennyisége. A másik hordóban a víz mennyisége először 10%-kal növekedett, később 10%-kal csökkent. Melyik hordóban lett több víz?

1061. Hány százalékkal nő a téglalap területe, ha a hosszát 20%-kal, szélességét pedig 10%-kal megnövelik?

1062. Az árucikk árát 20%-kal csökkentették. Hány százalékkal kell ezután megnövelni a cikk árát, hogy az eredeti nagyságú legyen?

1063. A termék elkészítésére fordított kiadások 1250 hrivnyát tesznek ki, míg az ára 1750 hrivnya. Számítsátok ki százalékban az árrést!

1064. A kereskedelmi cég két tárgyat vásárolt 2500 hrivnyáért, majd a viszonteladásukból 40% nyereségre tett szert. Mennyit fizetett a cég a tárgyakért külön-külön, ha az egyik eladása 25%, míg a másiké 50% nyereséget eredményezett?

1065. A 12 kg tömegű réz-ón ötvözet 45% rezet tartalmaz. Hány kilogramm tiszta ónt kellene az ötvözethez adni, hogy az újonnan képződő ötvözet 40% rezet tartalmazzon?

1066. A 22 fős osztályból találomra kiválasztottak egy tanulót. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott tanuló fiú, ha az osztályban a fiúk létszáma 10?

1067. A dobozban 7 fehér és 13 fekete golyó van. Találomra kivesznek belőle egyet. Mekkora a valószínűsége annak, hogy az fehér golyó lesz?

1068. A zacskóban a darab fehér és b darab fekete golyó van. Kivesznek belőle egy fehér színűt és félreteszik. Ezután kivesznek még egyet. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a második golyó is fehér színű?

1069. Az 1 és 20 közötti természetes számok közül a tanuló találomra megnevez egyet. Mekkora a valószínűsége annak, hogy ez a szám 30 osztója?

1070. Hét egyforma kártyára egy-egy betűt írnak, amelyekből kirakható az ALGEBRA szó. Ezután lefordítják a lapokat, összekeverik és találomra veszik fel őket. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a felszedett kártyalapokból kirakható lesz a GRAB szó?

1071. A 3×4×5 méretű fa téglatest minden oldalát befestették, majd 60 egyenlő kockára vágták fel és a darabokat egy zsákba szórták. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a zsákból találomra kivett kocka: a) 3 oldala festett; b) 2 oldala festett; c) 1 oldala festett; d) 0 oldala festett?

1072. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a találomra kiválasztott háromjegyű szám: a) 5-tel osztható; b) nagyobb 100-nál; c) kisebb 200-nál?

1073. Határozzátok meg a minták móduszát, mediánját és átlagát:
a) 3, 4, 4, 4, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 9;
b) 11, 17, 12, 13, 14, 15, 15, 16, 16, 13, 15, 11!

1074. Határozzátok meg a minták centrális tendenciáit:
a) 1,2; 2,1; 2,4; 2,7; 2,8; 3,0; 3,0; 3,0; 3,0; 3,1; 3,1; 3,4; 3,6;
b) 0,98; 1,03; 1,06; 0,97; 0,97; 1,05; 1,01; 0,98; 0,97; 0,99; 0,96; 1,02; 0,97; 1,01; 1,03!

1075. 48 diák vizsgateszt-eredményei alapján összeállították az elkövetett hibák táblázatát:

3	1	2	2	0	3	3	1	3	2	4	2
2	3	0	1	5	3	1	2	4	1	3	2
0	3	2	2	4	3	0	1	3	3	2	3
4	1	0	2	2	1	2	0	1	2	3	2

Állítsatok össze gyakorisági táblázatot, és rajzoljatok hisztogramot! Határozzátok meg a minta centrális tendenciáit!

1076. A gyárban 200 alkatrészt csiszoltak le, majd megmérték őket, s a mérési eredményeket táblázatba foglalták.

d, cm	6,67—6,69	6,69—6,71	6,71—6,73	6,73—6,75	6,75—6,77	6,77—6,79	6,79—6,81	6,81—6,83
Alkatrészek száma	5	17	24	54	52	23	18	7

A táblázat adatai alapján: a) szerkesszetek hisztogramot; b) határozzátok meg valamennyi érték relatív gyakoriságát!

1077. Az üzemben 3050 nyersvasöntvény vegyelemzését végezték el, és táblázatba foglalták az öntvények (százalékban kifejezett) széntartalmát.

Széntartalom, %	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7
Öntvényszám	52	120	180	205	407	507	621	413	320	225

A táblázat adatai alapján: a) határozzátok meg valamennyi érték relatív gyakoriságát; b) határozzátok meg a minta centrális tendenciáit!

SZÁMSOROZATOK

1078. Írjátok fel annak a sorozatnak az első öt tagját, amelynek az n-edik tagja a következő képlettel van megadva:

a) $a_n = 2(n + 1)$; b) $x_n = 6 : n$; c) $y_n = n^3 + 3n - (-1)^n$;

d) $b_n = 1 + n^2$; e) $c_n = 2n \cdot n^2$; f) $z_n = 1 + (-1)^n$!

1079. A sorozat az $a_n = 2n^2 + 3$ képlettel van megadva. Határozzátok meg:

a) a_3; b) a_6; c) a_{15}; d) a_{100}!

1080. Írjátok fel annak a sorozatnak a hetedik, tizedik és huszonötödik tagját, amelynek az n-edik tagja a következő képlettel van megadva:

a) $c_n = (1 - n)^2$; b) $c_n = 350 + n$; c) $c_n = 2n - (-1)^n$!

1081. Írjátok fel annak a számtani sorozatnak az első öt tagját, amelyben:

a) $a_1 = 17$, $d = 2$; b) $a_1 = 0{,}5$, $d = 10$;

c) $a_1 = -\frac{1}{4}$, $d = \frac{1}{4}$; d) $a_1 = 6$, $d = 0$!

1082. A számtani sorozat első tagja a_1, a különbsége d. Határozzátok meg első n tagjainak S_n összegét, ha:

a) $a_1 = 5, d = 3, n = 31$; b) $a_1 = 14{,}5, d = 0{,}7, n = 26$;

c) $a_1 = -\frac{3}{2}, d = \frac{1}{2}, n = 35$; d) $a_1 = 111, d = -\frac{2}{5}, n = 56$!

1083. Határozzátok meg a számtani sorozat első száz tagjának összegét:

a) $a_1 = -35, d = 6$; b) $a_1 = 66, d = -8$;

c) $a_1 = -2{,}5, d = 3$; d) $a_1 = -20, d = 1{,}4$.

1084. A számtani sorozat első négy tagjának összege 56, míg az utolsó négy tag összegè 112. Határozzátok meg a számsorozat tagjainak számát, ha az első tagja 11-gyel egyenlő!

1085. A növekvő számtani sorozat első és ötödik tagjának összege 14, második és negyedik tagjának a szorzata 45-tel egyenlő. A sorozat hány tagját kellene összeadni, hogy az eredmény 24 legyen?

1086. Adva van két számtani sorozat. Az első sorozat első és ötödik tagja rendre 7 és –5. A második sorozatban az első tag 0, az utolsó 3,5. Határozzátok meg a második sorozat tagjainak összegét, ha ismeretes, hogy mindkét sorozat harmadik tagja egymással egyenlő!

1087. A mértani sorozatban $b_7 = 80$, $b_8 = -160$. Határozzátok meg: b_1, q, b_5!

1088. A mértani sorozatban $b_6 = 18$, $b_4 = 72$. Határozzátok meg: b_1, q!

1089. Írjátok fel azt a hat tagból álló mértani sorozatot, amelyben az első három tag összege 168, az utolsó háromé pedig 21!

1090. A növekedő mértani sorozat első és utolsó tagjának összege 66, második és utolsó előtti tagjának szorzata 128, összes tagjának összege pedig 126. Hány tagú a sorozat?

1091. ***Dzsemsid al-Kashi feladata.*** A kertben egy ember egy gránátalmát szakított le a fáról, a másik kettőt, s minden következő egy-egy gránátalmával többet. Azután az emberek a leszakított gránátalmákat egymás között egyenlően elosztották, aminek eredményeként mindegyiküknek 6–6 gyümölcs jutott. Hányan szakítottak gránátalmát?

1092. ***Ókori indiai feladat.*** A vándor első nap két egységnyi utat tett meg, minden következő napon három egységgel többet, mint az azt

megelőző napon. Egy másik vándor az út három egységét teszi meg az első napon, minden következő napon két egységgel többet. Mikor éri utol az első vándor a másikat, ha egyszerre indultak útnak ugyanarról a helyről és ugyanabban az irányban?

1093. A b_1, b_2, b_3, b_4 mértani sorozat. Mértani sorozatok-e a következők:

a) $5b_1, 5b_2, 5b_3, 5b_4, \ldots$; b) $b_1 + 5, b_2 + 5, b_3 + 5, b_4 + 5, \ldots$;

c) $b_1^5, b_2^5, b_3^5, b_4^5, \ldots$; d) $\frac{5}{b_1}, \frac{5}{b_2}, \frac{5}{b_3}, \frac{5}{b_4}, \ldots$?

1094. Határozzátok meg a végtelen mértani sorozatok összegét:

a) $b_1 = 27, q = \frac{1}{3}$; b) $b_1 = 2, q = -\frac{1}{2}$;

c) $b_1 = \frac{2}{3}, q = \frac{2}{3}$; d) $b_1 = -\frac{1}{2}, q = -\frac{1}{2}$!

1095. Ellenőrizzétek, hogy az adott mértani sorozat q kvóciense (hányadosa) kielégíti-e a $|q| < 1$ feltételt, és határozzátok meg a sorozat összegét:

a) $1, \frac{2}{3}, \ldots$; b) $0{,}1, -0{,}01, \ldots$; c) $1{,}8; 0{,}36, \ldots$!

1096. Határozzátok meg a végtelen mértani sorozatok összegét:

a) $7 + \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \ldots$; b) $30 - \frac{3}{10} + \frac{3}{1000} - \ldots$!

1097. ***Fermat feladata.*** Ha S a végtelenül fogyó (a_n) mértani sorozat összege, akkor:

$$\frac{S}{S - a_1} = \frac{a_1}{a_2}.$$

1098. A végtelen mértani sorozat összege 4, tagjai köbeinek összege pedig 192. Határozzátok meg a sorozat első tagját és hányadosát!

1099. A végtelen mértani sorozat összege egyenlő első hat tagja összegének a $\frac{8}{7}$-ével. Határozzátok meg a sorozat hányadosát!

1100. Határozzátok meg azt az összeget, amelynek összeadandói a következő mértani sorozatok tagjai ($|b| < 1$):

a) $b + b^2 + b^3 + \ldots$; b) $b - b^2 + b^3 - \ldots$;

c) $b^2 + b^4 + b^6 + \ldots$; d) $b - b^3 + b^5 - \ldots$!

EMELT SZINTŰ FELADATOK ÉS GYAKORLATOK

1101. Melyik a nagyobb: $\sqrt{14} + \sqrt{6}$ vagy $2\sqrt{3} + \sqrt{7}$?

1102. Bizonyítsátok be az egyenlőtlenséget: $4 < \sqrt{9+4\sqrt{5}} + \sqrt{9-4\sqrt{5}} < 5$!

1103. Bizonyítsátok be, hogy a, b, c bármely értéke mellett:

a) $2a^2 + b^2 + c^2 \geq 2a(b + c)$;

b) $a^2 + b^2 + c^2 \geq 2(a + 2b + 3c - 7)$! ·

1104. Bizonyítsátok be, hogy x, y bármely értéke mellett:

a) $x^4 + y^4 \geq x^3y + xy^3$;

b) $2x^2 + 5y^2 - 4xy - 2x - 4xy + 5 > 0$!

1105. Bizonyítsátok be, hogy a bármely értéke mellett:

a) $a^4 - 2a^3 - a^2 + 2a + 1 \geq 0$;

b) $a^4 - 3a^2 - 2a + 5 > 0$!

1106. Bizonyítsátok be, hogy a, b, c, d bármely értéke mellett:

a) $(a^2 + b^2)(c^2 + a^2) \geq 4abcd$;

b) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq (a + b)(c + d)$!

1107. Bizonyítsátok be, hogy: a) $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}$, ha $x + y = 1$;

b) $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{5}$, ha $x + 2y = 1$!

Oldjátok meg az egyenlőtlenséget (**1108–1110**)!

1108. a) $\frac{x^2+4}{x-4} < x$; b) $\frac{x^2+x+1}{3x^2+4x-4} < 1$.

1109. a) $\frac{4x}{3-x} < x - 1$; b) $\frac{x+4}{x+1} > 2 - x$.

1110. a) $(x + 3)^3 (x + 5)(x - 2) < 0$;

b) $(8 - x)^5 (x + 8)^2 (x + 4) \leq 0$.

1111. Bizonyítsátok be, hogy a $\sqrt{x-6} + \sqrt{x-1} > 1$ és $\sqrt{x-6} + \sqrt{x-1} > 2$ egyenlőtlenségeknek ugyanolyan megoldáshalmazaik vannak!

Ábrázoljátok a függvények görbéit (**1112–1113**)!

1112. a) $y = 3 - |x|$; b) $y = \frac{1}{|x|}$; c) $y = x^2 + 2|x| - 3$.

1113. a) $y = \frac{x}{|x|}$; b) $y = x|x|$; c) $y = \frac{|x|}{|x| - 3}$.

1114. Ábrázoljátok az egyenletek görbéit:

a) $x^2 + xy = 0$; b) $(x + 1)(y - 3) = 0$;

c) $(xy - 6)(y - 3) = 0$; d) $(x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 4) = 0$!

1115. Írjátok fel egyszerűbb képlettel a függvényt:

$y = \sqrt{x^2 + 2\sqrt{2x} + 2} + \sqrt{x^2 - 2\sqrt{2x} + 2}$!

Ábrázoljátok a grafikonját!

Ábrázoljátok a függvények görbéit (**1116–1118**)!

1116. a) $y = |2x - 3|$; b) $y = 2|x| - 3$.

1117. a) $y = 2|x^2 - 3|$; b) $y = |x^2 - 6x + 5|$.

1118. a) $y = |2x^2 - 6|x| + 5|$; b) $y = |x^2 - 6x| + 5$.

1119. Hány megoldása van a $|x^2 - 6x + 5| = a$ egyenletnek, ha a egyenlő -2, 0, 2, 4, 6-tal?

1120. Oldjátok meg az egyenlőtlenségeket:

a) $|x - 1| + |x - 5| \geq 6$; b) $|x - 1| + |x - 5| < 3$!

1121. ***Ógörög feladat.*** Bizonyítsátok be, hogy a páros számú tagokból álló számtani sorozat egyik felét kitevő tagok összege ezen összeg négyzetének osztójával nagyobb a maradék tagok összegénél!

1122. ***Ókori feladat.*** A katona a következő jutalmazást kapta: az első sebesülésért 1 garast, a másodikért 2 garast, a harmadikért 4 garast stb., összesen 655 ezüstöt és 35 garast (100 garas = 1 ezüst). Hány sebesülése volt a harcosnak?

1123. ***Ókori kínai feladat.*** Egy ügető ló és egy kivénhedt gebe Csanjan városból a 3000 li távolságra lévő Csi hercegségbe fut. Az első napon az ügető ló 193 li távolságot tesz meg, és minden következő napon az előző napi távolságnál 13 livel többet tesz meg. A gebe az első napon 97 li távot futott le, s minden következő napon fele livel kevesebbet tett meg, mint a megelőző napon. Az ügető ló Csibe érve visszafordult. Hány nap múlva találkozott a gebével?



1124. Egy számotokra ismeretlen utcán a 46. számú házat keresitek, de a 38-as házat látjátok. Melyik irányba kell mennetek?

1125. A derékszögű háromszög oldalhosszai egy számtani sorozat egymás utáni tagjai. Határozzátok meg a háromszög befogóinak arányát!

1126. Határozzátok az x, y és z számokat úgy, hogy 2, x, y, z, 9 számtani sorozatot alkosson!

1127. Határozzátok meg az 1000-nél kisebb azon természetes számok összegét, melyek:

a) oszthatók 7-tel; b) 7 relatív prímjei;

c) 3-mal oszthatóak, de 6-tal nem!

1128. Az $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ egy mértani sorozat első n tagjai q hányadossal. Határozzátok meg az

$$a_1^n + a_2^n + a_3^n + \ldots + a_n^n \text{ összeget!}$$

1129. A q, q^2, q^3, q^4 ... végtelen mértani sorozat. Számítsátok ki a $q + 2q^2 + 3q^3 + 4q^4 + \ldots$ összeget!

1130. Határozzátok meg azt a végtelen mértani sorozatot, amelynek összege 4, a tagok köbeinek összege pedig 192!

1131. A számtani sorozat második, első és harmadik tagja egy mértani sorozat egymást követő tagjai. Határozzátok meg a mértani sorozat hányadosát!

1132. Az a, b, c egy számtani sorozat egymást követő tagjai. Bizonyítsátok be, hogy az $a^2 + ab + b^2$, $a^2 + ac + c^2$, $b^2 + bc + c^2$ számok szintén egy számtani sorozat egymást követő tagjai!

1133. Adjátok meg a következő sorozatok n-edik tagjának képletét:

a) 1, 2, 1, 2, 1, 2, ...; b) $-1, 2, -3, 4, -5, \ldots$!

1134. Határozzátok meg az összeget:

a) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1)$;

b) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 8 + \ldots + n(3n-1)$!

1135. Határozzátok meg azt a természetes számot, amely az összes előző természetes szám összegével egyenlő!

1136. Melyik az a számtani sorozat, amelyben az első n tag összege $2n^2 + n$?

1137. ***Newton feladata.*** Egy kereskedő évente harmadával növelte a tőkéjét, a családjára költött 100 fonttal csökkentve. Négy év múlva megduplázódott a tőkéje. Mennyi pénze volt eredetileg?

1138. A 7 és 35 közé helyezzetek el 6 olyan számot, hogy mind a 8 szám számtani sorozatot képezzen!

1139. Írjátok fel az n-edik tagját a 3, 6, 11, 18, ... sorozatnak, amelyben a szomszédos tagok egymást követő különbségei számtani sorozatot képeznek!

1140. Oldjátok meg az egyenletet:

$$\frac{x-1}{x} + \frac{x-2}{x} + \ldots + \frac{2}{x} + \frac{1}{x} = 3,$$

amelynek bal oldalán az összeadandók számtani sorozatot képeznek!

1141. Határozzátok meg a következő számtani sorozatok közös tagjait:

1, 4, 7, ... és 6, 11, 16 ... !

Igaz-e, hogy a közös tagok sorozata számtani sorozat?

1142. Bizonyítsátok be, hogy minden természetes n esetében teljesül az egyenlőség:

a) $2^3 + 4^3 + 6^3 + \ldots + (2n)^3 = 2n^2 (n+1)^2$;

b) $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3 = n^2 (2n^2 - 1)$!

1143. ***Al-Kashi feladata.*** Bizonyítsátok be, hogy n bármely természetes értéke esetén igaz az egyenlőség:

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4 = \frac{1}{30} \cdot (6n^5 + 15n^4 + 10n^2 - n)!$$

1144. ***Fermat feladata.*** Bizonyítsátok be, hogy $5 \cdot (1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4) =$

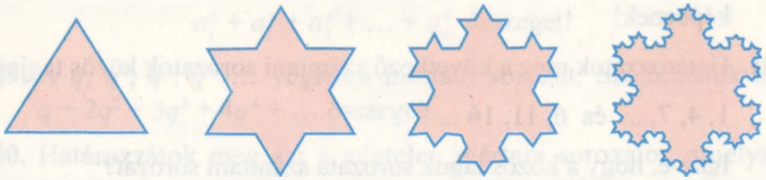
$$= (4n+2)\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2)!$$

1145. Határozzátok meg az összeget:

$$\frac{1}{5\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 17}+\frac{1}{17\cdot 23}+\ldots+\frac{1}{(6n-1)(6n+5)};$$

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}!$$

1146. Az egyenlő oldalú háromszög kerülete $3a$-val egyenlő (147. *a* ábra). Az oldalait három egyenlő szakaszra osztjuk, és minden középső szakaszt két ugyanolyan, egymással 60°-os szöget bezáró, törött szakasszal cseréljük ki, ahogy a 147. *b* ábrán látható. A csillag alakú sokszög minden oldalát három egyenlő szakaszra osztjuk és minden középső szakaszt ugyanolyan törött szakaszokkal cseréljük le, mint előzőleg, és így tovább. Az így kapott alakzatot *Koch-féle hópehelynek* nevezzük. Az egyenlő oldalú háromszöget a Koch-hópelyhekből álló sorozat első tagjának tekintve, írjátok fel: a) a hópehelyoldalak számainak sorozatát; b) a hópelyhek oldalhosszainak sorozatát; c) a hópelyhek kerületeinek sorozatát! A sorozatok melyike számtani vagy mértani sorozat?



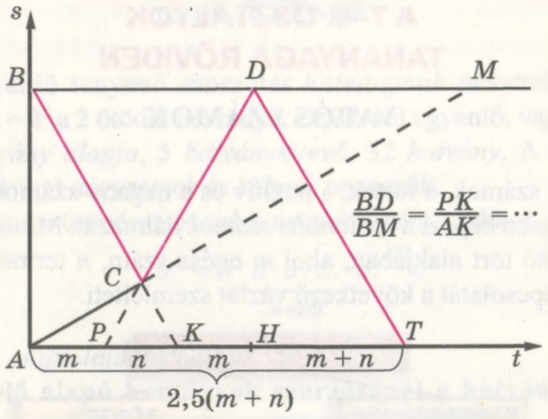
a *b* *c* *d*

147. ábra

1147. Határozzátok meg a harmadik Koch-féle hópehely oldalhosszát, kerületét és területét (147. *c* ábra), ha a Koch-alakzat kialakítása egy 3 cm oldalhosszúságú, egyenlő oldalú háromszögből kezdődött! Létezik-e olyan Koch-hópehely, amelynek a kerülete kétszer (háromszor) nagyobb a létrehozására szolgáló szabályos háromszög kerületénél?

Grafikai modellek felhasználásával oldjátok meg a feladatokat (**1148–1149**)!

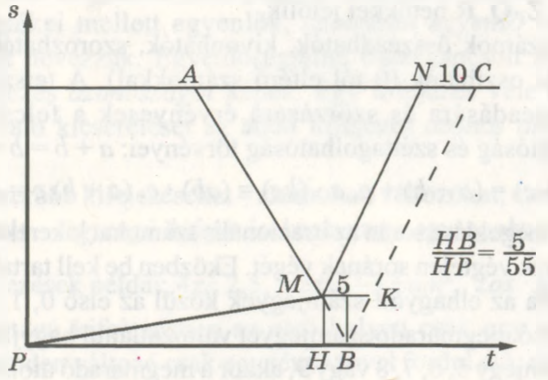
1148. Egy gyalogos A városból B faluba indult, miközben vele egy időben B-ből egy motorkerékpáros indult el A-ba. Amikor találkoztak, a motorkerékpáros felvette a gyalogost és B-be



148. ábra

szállította, majd miután letette, azonnal elindult a városba. Ennek folytán a motorkerékpáros az eredetileg tervezettnél 2,5-szer több időt fordított az útra. Mennyivel kevesebb időt töltött az úton a gyalogos a motorkerékpárosnak köszönhetően (148. ábra)?

1149. Egy üzletemberért a hivatalából minden reggel autó ment a lakásához és 8 órakor a munkahelyére szállította. Egyszer az üzletember úgy döntött, hogy 1 órával korábban gyalog indul el a munkahelyére. Az autó a szokásos időben indult el az üzletemberért, és mikor találkoztak, felvette és a megszokott időpontnál 10 perccel korábban szállította a hivatalba. Hányszor nagyobb a gépkocsi sebessége, mint a gyalogosé (149. ábra)?

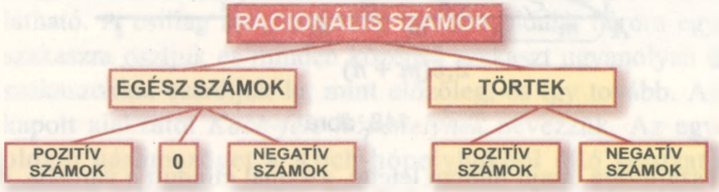


149. ábra

A 7–8. OSZTÁLYOK TANANYAGA RÖVIDEN

VALÓS SZÁMOK

Az egész számok, a törtek, a pozitív és a negatív számok, valamint a nulla együttesen képezi a *racionális számok* halmazát. Minden racionális szám felírható tört alakjában, ahol m egész szám, n természetes szám. E számok kapcsolatát a következő vázlat szemlélteti.



Minden racionális szám megadható végtelen szakaszos (periodikus) tizedes tört alakjában. Minden végtelen szakaszos tizedes tört bizonyos racionális számot ábrázol.

Példák. $\frac{2}{3} = 0{,}6666\ldots$, $-\frac{13}{11} = -1{,}181818\ldots$.

A végtelen nem szakaszos (periodikus) tizedes törtek által ábrázolt számokat *irracionális* számoknak nevezzük.

Példák irracionális számokra: $\sqrt{2} = 1{,}4142136\ldots$, $\pi = 3{,}1415926\ldots$.

Az irracionális és a racionális számok együttesen alkotják a *valós számok* halmazát. A természetes, az egész, a racionális és a valós számok halmazát **N**, **Z**, **Q**, **R** betűkkel jelölik.

A valós számok összeadhatók, kivonhatók, szorozhatók, hatványra emelhetők és oszthatók (0-tól eltérő számokkal). A tetszőleges valós számok összeadására és szorzására érvényesek a felcserélhetőség, csoportosíthatóság és széttagolhatóság törvényei: $a + b = b + a$, $ab = ba$,

$$a + (b + c) = (a + b) + c,\ a \cdot (bc) = (ab) \cdot c,\ (a + b)\, c = ac + bc.$$

A példák megoldása során az irracionális számokat kikerekítik, elhagyva a tizedesjegyek végtelen sorának végét. Eközben be kell tartani a *kerekítés szabályait*. Ha az elhagyott számjegyek közül az első 0, 1, 2, 3 vagy 4, akkor az utolsó megmaradó számjegyet változatlanul hagyják. Ha az első elhagyott számjegy 5, 6, 7, 8 vagy 9, akkor a megmaradó utolsó számjegyet 1-gyel növelik.

KIFEJEZÉSEK

Több egyenlő tényező szorzatát *hatványnak* nevezzük. Például $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$ a 2 ötödik hatványa. Ez 32-vel egyenlő, vagyis $2^5 = 32$. Itt a 2 a *hatvány alapja*, 5 *hatványkitevő*, 32 *hatvány*. A második és harmadik hatványt *négyzetnek* és *köbnek* nevezzük.

$a^1 = a$. Ha az n természetes szám nagyobb mint 1, akkor

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-szer}}.$$

A hatvány alaptulajdonsága: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

Az egyenlő alapú hatványok szorzásánál a hatványkitevőket összeadják, az alapot pedig változatlanul hagyják.

A hatványok egyéb tulajdonságai:

$$(a^n)^m = a^{nm}; \quad (ab)^n = a^n \cdot b^n.$$

A számokat, a változókat és a számokból vagy változókból és műveleti jelekből álló különböző lejegyzéseket *kifejezéseknek* nevezzük. A kifejezések lehetnek *számkifejezések* (például $3 - 0{,}5 : 6$) és *változós kifejezések* (például $3x$, $2ab$, $c^2 - 3$). Azt a kifejezést, amely összeadáson, kivonáson, szorzáson, pozitív kitevőjű hatványozáson és osztáson kívül más műveletet nem tartalmaz, *racionális kifejezésnek* nevezzük. A változóval való osztási műveletet nem tartalmazó racionális kifejezést *egész kifejezésnek* nevezzük. Egész kifejezések példái:

$32{,}5$; a; $\frac{2}{5}x + y$; $0{,}3(x - z^2)$.

Az olyan két kifejezést, amelyeknek megfelelő értékei a változók bármilyen értékei mellett egyenlők, *azonosan egyenlő* vagy *azonos kifejezéseknek* nevezzük. Egyenlőségjellel összekapcsolt két azonosan egyenlő kifejezés *azonosságot* képez. Egy kifejezés vele azonos más kifejezéssel való kicserélését az adott kifejezés *azonos átalakításának* nevezzük.

A legegyszerűbb kifejezéseket – számokat, változókat, ezek hatványait vagy szorzatait – *egytagú kifejezéseknek* vagy *egytagoknak* nevezzük.

Egytagú kifejezések példái: $4x$, $2{,}5$, $-3x^2$, $-3\frac{1}{2}am^3$, $2ax \cdot 3ax^2$.

Ha az egytagú kifejezésben az első helyen csak egy számtényező szerepel és minden változó csak egy tényezővel fordul elő, akkor az ilyen egytagú kifejezést *normál alakúnak* nevezzük. A normál alakban felírt

egytagú kifejezés számtényezőjét az adott kifejezés *együtthatójának* nevezzük. Az 1 együtthatót nem tüntetjük fel, a –1 együttható helyett pedig csak „–" jelet írunk. Például a $7ax$, acx^2, $-xz^3$ egytagú kifejezések együtthatói rendre 7, 1, –1.

Két egytagú kifejezés szorzásánál szorzásjelet tesznek közéjük és a kapott szorzatot normál alakú egytagú kifejezéssé alakítják. Az egytagú kifejezést úgy emelik hatványra, hogy minden tényezőjét ugyanarra a hatványra emelik és a kapott hatványokat összeszorozzák. Például

$$2ax \cdot (-3x^2) = 2 \cdot (-3) \cdot a \cdot x \cdot x^2 = -6ax^3;$$

$$(0{,}3nc^3)^2 = 0{,}3^2 \cdot n^2 \cdot (c^3)^2 = 0{,}09n^2c^6.$$

Több egytagú kifejezés összege vagy különbsége csak egyes esetekben írható fel egytagú kifejezésként.

Több egytagú kifejezés összegét *többtagú kifejezésnek* nevezzük. Célszerűségi megfontolásból minden egytagú kifejezést többtagúnak tekintenek.

Az említett kifejezések közötti kapcsolatokat a következő vázlat



szemlélteti.

Egynemű két vagy több algebrai kifejezés, ha csak az együtthatójuk különbözik.

A többtagú kifejezés normál alakban van felírva, ha valamennyi tagja normál alakú egytagú kifejezés és nincs közöttük hasonló többtagú kifejezés.

A többtagú kifejezések összeadásakor a zárójelek felbontásának szabályát alkalmazzák: ha a zárójel előtt „+" jel áll, akkor a zárójeleket elhagyják. Például

$$(2a + 3) + (a^2 - 2a - 4) = 2a + 3 + a^2 - 2a - 4 = a^2 - 1.$$

A többtagú kifejezések kivonásakor a zárójelek felbontásának következő szabályát alkalmazzák: ha a zárójel előtt „–" jel van, akkor a zárójelek elhagyhatók, ha ellenkezőjére változtatjuk a köztük lévő valamennyi összeadandó előjelét. Például

$$4x^2 + 5 - (x^2 - 2x + 5) = 4x^2 + 5 - x^2 + 2x - 5 = 3x^2 + 2x.$$

A többtagú kifejezés szorzása egytagú kifejezéssel: a többtagú kifejezés minden tagját külön-külön megszorozzuk az egytagú kifejezéssel és az eredményeket összeadjuk. Például

$$(3a^2 + a - 8) \cdot 2ax = 3a^2 \cdot 2ax + a \cdot 2ax - 8 \cdot 2ax =$$
$$= 6a^3x + 2a^2x - 16ax.$$

Többtagú kifejezések szorzása: az egyik kifejezés minden tagját megszorozzuk a másik kifejezés minden tagjával, majd a kapott többtagú kifejezésben az egyneműeket összevonjuk. Például

$$(x + 2z - 3) \cdot (4x - 7) =$$
$$= x \cdot 4x + 2z \cdot 4x - 3 \cdot 4x - x \cdot 7 - 2z \cdot 7 + 3 \cdot 7 =$$
$$= 4x^2 + 8xz - 19x - 14z + 21.$$

A rövidített szorzás képletei

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ – kéttag négyzete,
$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ – kéttag köbe,
$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ – négyzetek különbsége,
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ – köbök különbsége,
$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ – köbök összege.

A többtagú kifejezés tényezőkre bontása azt jelenti, hogy felcseréljük az adott többtagot egy vele azonosan egyenlő néhány többtagú kifejezés szorzatával. A többtagú kifejezés tényezőkre bontásának legegyszerűbb módszerei: közös tényező kiemelése a zárójel elé, csoportosítás, a rövidített szorzás képleteinek alkalmazása.

Példák.

$$6a^3x - 9abx = 3ax(2a^2 - 3b);$$
$$ax + bx - ay - by = x(a + b) - y(a + b) = (a + b)(x - y);$$
$$9m^2 - 4 = (3m - 2)(3m + 2).$$

Az A kifejezés B kifejezéssel történő osztásával kapott hányados felírható $\frac{A}{B}$ *tört* alakjában. A törtnek csak akkor van értelme, amikor a nevezője nem egyenlő nullával. *Algebrai törtkifejezésnek* nevezzük azt a törtet, amelynek a számlálója és nevezője többtagú kifejezés. Bármilyen érték esetén a, b és $c \neq 0$ $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ (a *tört alaptulajdonsága*). Ennek a tulajdonságnak az alapján a törtek egyszerűsíthetők vagy közös nevezőre hozhatók. Például

$$\frac{3a - 6x}{a^2 - 4x^2} = \frac{3(a - 2x)}{(a - 2x)(a + 2x)} = \frac{3}{a + 2x}.$$

Bármely törttel végzett művelet a közönséges törtekkel végzett művelethez hasonlóan hajtható végre. Ha a nevezők nem egyenlők 0-val, akkor

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c},\ \frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c},\ \frac{a}{c}\cdot\frac{b}{d}=\frac{ab}{cd},\ \frac{a}{c}:\frac{b}{d}=\frac{ad}{cb}.$$

Példák.

1) $\frac{a^2}{2a-4}-\frac{4}{2a-4}=\frac{a^2-4}{2(a-2)}=\frac{(a-2)(a+2)}{2(a-2)}=\frac{1}{2}(a+2);$

2) $\frac{a}{ab-b^2}+\frac{b}{ab-a^2}=\frac{a}{b(a-b)}-\frac{b}{a(a-b)}=\frac{a^2-b^2}{ab(a-b)}=\frac{a+b}{ab};$

3) $\frac{x^2-4}{x^2}:\frac{3x-6}{x}=\frac{(x-2)(x+2)}{x^2}\cdot\frac{x}{3(x-2)}=\frac{x+2}{3x}.$

Az $\frac{1}{a^n}$ törtkifejezés a^{-n} alakban is felírható.

Egész kitevőjű hatvány

$$a^n=\begin{cases}a, & \text{ha } n=1\\ \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots a}_{n\text{-szer}}, & \text{ha } n\in N, n\geq 2,\\ 1, & \text{ha } n=0,\ a=0,\\ \frac{1}{a^{-n}}, & \text{ha } n<0.\end{cases}$$

Az egész kitevőjű hatványok tulajdonságai megegyeznek a természetes kitevőjű hatványok tulajdonságaival. Ha m és n egész számok, a és b eltér 0-tól, akkor:

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n};\ (ab)^n=a^n\cdot b^n;$$

$$a^m:a^n=a^{m-n};\ (a^m)^n=a^{mn};\ \left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}.$$

A a szám *négyzetgyökének* nevezzük azt a számot, amelynek a négyzete a-val egyenlő. Például a 16-nak két négyzetgyöke van: 4 és –4. Az a szám négyzetgyökének nem negatív értékét a *gyök számtani értékének* nevezik és $\sqrt{a}$ jellel jelölik.

A négyzetgyökök tulajdonságai. Ha $a > 0$ és $b > 0$, akkor

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}; \quad \left(\sqrt{a}\right)^2 = a;$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}; \quad \sqrt{a^{2k}} = a^k.$$

Bármely valós a esetén $\sqrt{a^2} = |a|$.

A négyzetgyökös kifejezések átalakításának példái:

$$(\sqrt{8} - 1)^2 + 4\sqrt{2} = 8 - 2\sqrt{8} + 1 + 4\sqrt{2} = 9 - 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 9;$$

$$\frac{x}{4 - \sqrt{15}} = \frac{x(4 + \sqrt{15})}{(4 - \sqrt{15})(4 + \sqrt{15})} = \frac{x(4 + \sqrt{15})}{4^2 - 15} = (4 + \sqrt{15})x.$$

EGYENLETEK

Az *egyenlet* betűkkel jelölt ismeretlen számokat tartalmazó egyenlőség.

Az ismeretlen számokat *változóknak* vagy ismeretlennek nevezzük, amelyeket általában x, y, z betűkkel jelölnek, de más betűk is használhatók. Azt a számot, amely kielégíti az egyenletet, az egyenlet *gyökének* vagy *megoldásának* nevezzük.

Megoldani az egyenletet azt jelenti, hogy meghatározzák mindegyik gyökét vagy bebizonyítják, hogy nincs megoldása.

Két egyenletet *ekvivalensnek* nevezzük, ha mindkettőnek ugyanaz a megoldása. Azokat az egyenleteket, amelyeknek nincs megoldásuk, ugyancsak ekvivalenseknek tekintik.

Az egyenletek alaptulajdonságai

1. Az egyenlet bármely oldalán össze lehet vonni az egynemű összeadandókat vagy fel lehet bontani a zárójeleket.

2. Az egyenlet bármely tagját át lehet vinni a másik oldalra, de az előjelét eközben az ellenkezőjére kell változtatni.

3. Az egyenlet mindkét oldalát meg lehet szorozni, vagy el lehet osztani egy és ugyanazon, nullától különböző számmal.

Az $ax = b$ egyenletet, ahol a és b tetszőleges számok, x változós *lineáris egyenletnek* nevezzük. Ha $a \neq 0$, akkor az $ax = b$ egyenletet *elsőfokú egyismeretlenes egyenletnek* nevezzük. Minden $ax = b$ elsőfokú egyenletnek egy $x = \frac{b}{a}$ gyöke van. A lineáris egyenletnek lehet egy vagy számtalan gyöke, vagy egyetlen megoldással sem rendelkezhet.

Például a következő egyenletek esetében:

$12x = 6$ egy gyöke van,

$0x = 0$ számtalan gyöke van,

$0x = 5$ nincs egyetlen gyöke sem.

Az egyenletek fő tulajdonságainak felhasználásával sok egyenlet alakítható könnyen megoldható lineáris egyenletté.

Példa. Oldjátok meg a $6 \cdot (0{,}5x - 2) + x = 3 - 2x$ egyenletet!

Megoldás. $3x - 12 + x = 3 - 2x$,

$6x = 15$, $x = 15 : 6$, $x = 2{,}5$.

Felelet. $x = 2{,}5$.

Az $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenlet, ahol x változó, a, b, c adott számok, miközben $a \neq 0$. A $D = b^2 - 4ac$ kifejezés a másodfokú egyenlet diszkriminánsa. Ha $D > 0$, akkor az adott egyenletnek két gyöke van:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \; x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

Ha $D = 0$, akkor a gyökök egyenlők. $D < 0$ esetén a másodfokú egyenletnek nincsenek valós gyökei.

Ha például a $2x^2 + 9x - 5 = 0$ másodfokú egyenletet kell megoldani, akkor meghatározzuk a diszkriminánsát: $D = 9^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5) = 121$. Ezért az egyenlet gyökei:

$$x_1 = \frac{-9+11}{4} = 0{,}5, \; x_2 = \frac{-9-11}{4} = -5.$$

A másodfokú egyenlet nem teljes, ha együtthatói közül, az elsőt leszámítva, akár egy is 0-val egyenlő. Az $ax^2 = 0$ egyenletnek egy gyöke van: $x = 0$,

az $ax^2 + bx = 0$ egyenletnek két gyöke van: $x_1 = 0, x_2 = -\frac{b}{a}$,

az $ax^2 + c = 0$ egyenletnek $x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}, x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$, két gyöke van:

ha $\frac{c}{a} < 0$ és egyetlen gyöke sincs $\frac{c}{a} > 0$ esetén.

A másodfokú egyenletet *redukáltnak* nevezzük, ha első együtthatója 1-gyel egyenlő. Ha az $x^2 + px + q = 0$ egyenletnek két gyöke van, akkor

$$x_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \; x_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Viete tétele. Ha az $x^2 + px + q = 0$ redukált másodfokú egyenletnek két gyöke van, akkor az összegük $-p$-vel, a szorzatuk pedig q-val egyenlő.

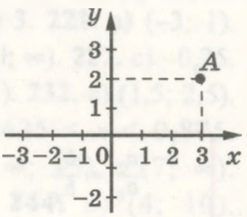
A *Viete-tétel megfordítása.* Ha az m és n számok összege és szorzata rendre $-p$-vel és q-val egyenlők, akkor m és n az $x^2 + px + q = 0$ egyenlet gyökei.

A törteket tartalmazó egyenletek abból kiindulva oldhatók meg, hogy a tört értéke akkor nulla, amikor számlálója nullával egyenlő, a nevezője pedig különbözik nullától. De eljárhatunk úgy is, hogy először megszorozzuk az egyenlet mindkét oldalát a törtek közös nevezőjével, majd megoldjuk a kapott egyenletet. Az egyenlet megoldásaiból ki kell zárni azokat, amelyek nullára változtatják a közös nevezőt.

FÜGGVÉNYEK

Ha az x változó minden értékének az y változó egyetlen értéke felel meg, akkor az y változót x *függvényének* nevezzük. Ebben az esetben az x változót a függvény *független változójának* vagy *argumentumának* nevezzük. Például az S négyzet területe a oldalhosszának függvénye.

A függvény képlettel, táblázattal, görbével (grafikonnal) adható meg. A függvények görbéi a *Descartes-féle koordináta-rendszerben* ábrázolhatók. Az ilyen koordináta-rendszer egymásra merőleges két koordinátatengelyből, a vízszintes x vagy *abszcisszatengelyből* és a függőleges y vagy *ordinátatengelyből* áll (150. ábra). A koordináta-rendszer síkját *koordinátasíknak* nevezzük. A koordinátasík minden egyes pontjának egyetlen számpár felel meg. Például a 150. ábrán az A pontnak a (3; 2) számpár felel meg. Ezt így írhatjuk fel: $A(3; 2)$. Itt 3 az A pont abszcisszája, 2 az A pont ordinátája.



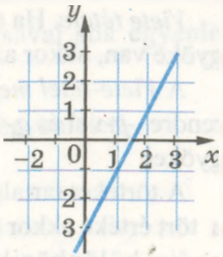
150. ábra

EGYENLETRENDSZEREK

Az $ax + by = c$ alakú egyenletet, ahol a, b, c adott számok, x *és* y *kétváltozós lineáris egyenletnek* nevezzük. Ha $a \neq 0$ *és* $b \neq 0$, akkor az egyenletet *kétváltozós elsőfokú egyenletnek* nevezzük.

A kétváltozós egyenletet kielégítő minden számpárt az adott egyenlet *megoldásának* nevezzük. Például a (3; −2) számpár az $5x + 3y = 9$ egyenlet

megoldása. Minden kétváltozós elsőfokú egyenletnek számtalan megoldása van. A Descartes-féle koordináta-rendszerben minden kétváltozós elsőfokú egyenletnek egy egyenes – az adott egyenlet grafikonja – felel meg. A 151. ábrán a $2x - y = 3$ görbéje látható. A görbe minden pontjának koordinátái kielégítik az adott egyenletet. Bármely más pont koordinátái nem elégítik ki az egyenletet.



151. ábra

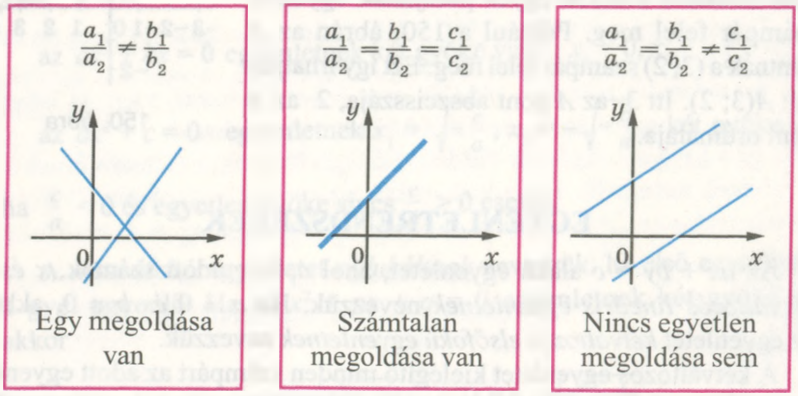
Ha két vagy több egyenlet közös megoldásait kell meghatározni, akkor azt mondják, hogy ezek az egyenletek *egyenletrendszert* képeznek. Az *egyenletrendszer megoldásának* valamennyi egyenletének közös megoldását nevezik.

Minden két kétváltozós elsőfokú egyenletből álló egyenletrendszernek egy-egy egyenes felel meg a Descartes-féle koordináta-rendszerben. Mivel két egyenes vagy metszi egymást, vagy egybeesik vagy párhuzamos egymással, ezért a megfelelő egyenletrendszernek lehet egy megoldása, számtalan megoldása vagy egyetlen megoldása sem lehet.

A kétváltozós egyenletrendszer behelyettesítési, egyenlő együtthatók vagy grafikus módszerrel oldható meg.

Lineáris egyenletrendszerek

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$



FELELETEK ÉS ÚTMUTATÓ A FELADATMEGOLDÁSHOZ

10. a) $y < x$. **19.** c) $y(-8) > y(0)$. **34.** $x = 1{,}5$. **37.** 2. **39.** a) $b > a$. **40.** a) $x > y$. **44.** b) $a = b$. **45.** a) 186,5. **46.** e) 10. **47.** d) 12. **49.** b) 0. **50.** e) 2. **51.** f) –0,25. **55.** 20 %. **71.** c) $5 + x < 6 + z$. **75.** b) $x^2 > xy$. **76.** c) $\sqrt{-x} > \sqrt{-y}$. **78.** $\frac{1}{b}, \frac{1}{d}, \frac{1}{c}, \frac{1}{a}$. **88.** b) $(3x + 1)(2x - 1)$.

103. a) $6 < x - y < 8$. **108.** c) $3{,}58 \cdot 10^6 < V < 3{,}66 \cdot 10^6$. **113.** d) 1. **122.** a) $-1 < x < 2$. **123.** 12 órakor. **136.** c) $x \geq 5$. **137.** b) $x > 1$. **141.** b) $x \geq -2{,}6$. **143.** a) $x > 8$. **146.** a) $x < 4$. **147.** c) $x > -2$. **149.** a) 4. **153.** c) $x \geq 2$. **154.** a) $x > -2$. **155.** c) $z \geq 0{,}65$. **157.** a) $x > 5$. **158.** a) $c > 2$. **160.** d) Nincs megoldása. **161.** b) $x < 0$. **162.** [0; 4). **165.** Nem több mint $25\frac{2}{3}$ km. **166.** a) $x < -0{,}5$; b) $x \geq -1$. **167.** c) $1 < x \leq 4$. **170.** c) $-0{,}2 \leq x \leq 0{,}6$. **171.** c) Ha $a < 0{,}5$, akkor $x > 2a - 1$; ha $a = 0{,}5$, akkor nincsenek megoldásai; ha $a > 0{,}5$, akkor $x < 2a - 1$. **173.** e) $1{,}5 \cdot 10^3$. **175.** 50%-kal. **188.** a) [2; 5]; {3}. **190.** a) $a > c$. **191.** a) (3; ∞). **192.** a) (–∞; 0,2]. **198.** a) $x \leq a < y$.

201. a) $-1 \leq x \leq 1$. **203.** a) (–∞; ∞). **204.** b) $x \geq 4$. **206.** b) R; [–13; 1). **209.** f) (–∞; 1) ∪ (4; ∞). **210.** a) R. **219.** b) 2 és 3. **221.** a) (–3; 1). **222.** a) Nincs megoldása. **224.** a) (6; 8). **226.** b) (10; ∞). **227.** c) –0,25. **228.** a) (2; 16]. **229.** a) {3, 4, 5, 6}. **230.** b) (–3; –1). **232.** a) (1,5; 2,5). **234.** b) (–∞; –0,4). **235.** a) [3;5]. **236.** a) $0{,}625 < x < 0{,}875$. **238.** a) (–2;7). **239.** c) (–5; ∞). **240.** a) (–∞; –3) ∪ (7; ∞). **241.**d) (–∞; –9) ∪ (–2; ∞). **242.** (–1; 1). **244.** a) (4; 10). **247.** a) Igen; b) igen. **248.** a) (–1; 3). **249.** a) (–4; 1); b) [–2,5; 4,5]. **250.** a) (–∞; 4,5) ∪ (5,5; ∞). **251.** a) (2; 3). **267.** a) $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0{,}5(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2bc) = 0{,}5((a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2) \geq 0$. **284.** 1633,4 t. **298.** a) 8.

316. (2; 2). **321.** a) (–6; 0); (0; 3). **325.** $m = 7$; igen. **329.** a) $(-\infty; -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}; \infty)$. **332.** $p = 5$ hrivnya. egys.; $Q_S = Q_D = 4$ millió darab évente; 8%-kal csökken. **346.** a) R. **347.** d) [0; ∞); (–∞; 1]. **359.** c) Kettő. **363.** a) [–5; 4]. **370.** c) $x > -4$. **374.** a) (–∞; 0). **375.** a) (–∞; ∞). **394.** Igen. **399.** a) (–∞; –c).

414. a) $y = (x - 2)^2 + 3$. **429.** a) 0,5. **430.** a) 200 kg. **442.** a) (0; 4); c) (2; –4). **447.** $m = -6$, $n = 14$. **450.** Nem. **452.** a) $x = 3$. **464.** a) $y = 3$. **469.** $b = -6$. **471.** Útmutatás. Szerkesszetek x oldalú négyzetet és két egymással érintkező oldalához szerkesszetek x és 3 oldalú téglalapokat! **475.** a) Kettő. **481.** a) (0; 4). **482.** a) $(-\infty; 3) \cup (3; \infty)$. **483.** a) [1; 2]. **484.** a) $(-\infty; 0{,}5] \cup [1; \infty)$. **485.** b) $(-\infty; 6) \cup (6; \infty)$. **486.** a) (1; 2). **487.** a) $(-\infty; -7) \cup [1; \infty)$. **490.** a) $(-\infty; -2] \cup [2; \infty)$. **491.** c) –1; 0; 1; 2. **492.** a) [1; 4]. **493.** a) (1,5; 2). **494.** a) (–2; 3). **495.** a) $(-3; \infty)$. **496.** a) $(-\infty; -7] \cup [-5; \infty)$. **497.** a) (0,5; 3). **498.** a) $[-7; 1] \cup [2; \infty)$. **499.** a) [–2; 3].

500. a) $\{-1\} \cup [1; 2{,}5]$. **501.** b) $(-\infty; 0{,}25) \cup [6; \infty)$. **502.** a) (–0,2; 0,2). **504.** a) [–1; 8]. **505.** a) $b \in [-1; 1]$. **506.** a) $m \in (-4; 4)$. **507.** a) [3; 4). **508.** a) $(-\infty; -1) \cup (3; 4] \cup [7; \infty)$. **509.** a) $(-1; 0) \cup (5; 6)$. **511.** Három. **512.** 10. **525.** a) (3; 0), (0; –3). **526.** c) (2; –1), (1; –2). **527.** b) (12; 16), (4; 0). **528.** a) (13; 3). **529.** a) (–5; –4), (–4; –5), (5; 4), (4; 5). **530.** a) (2; 8), (8; 2). **531.** a) (8; 6), (–5; –7). **532.** a) (–15; 25), (8; 2). **534.** a) (2; 1), (3; 2). **535.** a) (5; 1), (8; 2). **536.** a) (4; 4), (–4; 4). **537.** a) (–0,7; 4,1), (1,2; –1,6). **538.** a) $(4 + \sqrt{10}; 4 - \sqrt{10})$, $(4 - \sqrt{10}; 4 + \sqrt{10})$. **539.** a) (3; 5). **540.** a) (1; –1), (1; 1). **541.** a) (0; 10), (8; 2). **542.** a) (9; 3), (–6; 18). **543.** a) (–5; –1), (5; 1). **544.** a) (–2; –2), (1; 1). **545.** a) $(0; 3\sqrt{10})$, $(0; -3\sqrt{10})$, (9; 3), (–9; –3); c) (2; 4), (4; 2), $(3 + 3\sqrt{2}; 3 - 3\sqrt{2})$ és $(3 - 3\sqrt{2}; 3 + 3\sqrt{2})$. **546.** a) (–3; 4), (4; –3). **547.** a) (6; 2), (–6; –2); c) (1; 2), (2; 1). **548.** a) (2; 4), (4; 2); b) (7; 5), (–5; –7). **549.** a) $a = \frac{2}{3}$ és $b = \frac{3}{2}$ vagy $a = 2$ és $b = \frac{1}{2}$. **550.** $17\sqrt{2}$ egység. **551.** $\sqrt{2}$ egység. **559.** –10 és –0,9 vagy 0,9 és 10. **561.** a) 23 és 21. **562.** a) 12 dm és 5 dm. **563.** 6 m és 8 m. **564.** 35 cm és 12 cm. **565.** 8 cm és $4\sqrt{2}$ cm. **566.** 15 cm és 10 cm. **567.** 3, 5 és 8 cm. **568.** 84 h és 60 h. **571.** 180 alkatrész. **572.** 15 nap. **573.** 49 munkapadot. **574.** 32 m^3. **575.** 36 perc és 72 perc. **576.** 39 m, 52 m és 65 m. **577.** 300 km vagy 360 km. **578.** 48 km/h. **579.** 12 km/h, 18 km/h, 24 km. **580.** 18 km/h, 2 km/h. **583.** 10 km/h. **584.** 72 km/h. **585.** 60 km/h vagy 93 km/h. **586.** 12 perc és 19,8 perc.

604. A felét. **606.** 10 év. **607.** 6 nap. **608.** 130 t és 65 t. **609.** 20 kg és 60 kg. **610.** 160 tojás. **611.** 14 fánk. **612.** 200 tankönyv. **613.** 24 nap alatt. **614.** Megoldani az $\frac{1}{x} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$ egyenletet! Ez a három adott feladat közös modellje. $x = 1\frac{7}{8}$ h. **615.** 12. **617.** 24. **619.** 7 személy. **621.** 11 csapat. **623.** 12 cm és 25 cm. **624.** 18 láb és 32 láb. **626.** 15 óra és 10 óra. **627.** 10 óra alatt. **628.** 60 g és 40 g. **629.** 60 g-mal. **630.** 20%-kal. **632.** 5 hrivnya; 635 millió darab évente; a kereslet csökken, a kínálat nő rendre 23 és 97 millió darabbal évente. **633.** 163 940 hrivnya, 109 850 hrivnya. **635.** 2 tanuló. **636.** 1 tanuló. **637.** 24 km/h és 16 km/h. **638.** 45 km/h és 50 km/h. **639.** 40 km/h és 50 km/h. **640.** 60 km/h és 120 km/h. **641.** 60 km/h és 50 km/h. **642.** 18 km/h és 24 km/h. **643.** 8 km-rel. **645.** Bálint — K, Gabi — T, Paula — P. **658.** a) 0,02; c) 2,16. **659.** a) 40%; b) 53%. **660.** 1. a) 147 hrivnya. **661.** b) 100. **663.** b) 16%. **664.** 1,9 kg. **665.** 2700 t. **667.** 200 kg, 300 kg és 500 kg. **668.** 182 cm. **671.** ≈ 95%. **674.** 108%-kal, 8%-kal. **681.** 375 hrivnya. **684.** 11. **688.** 1,25-szorosára nő. **689.** 9%-os. **696.** 300 g és 500 g.

729. a) 37,25; b) 0,026. **730.** d) $72 \leq 73 \leq 74$. **731.** 1,078, 0,0003; 1,08, 0,0017; 1,1, 0,0217; 1, 0,0783. **732.** 315 g; 5 g. **734.** a) Igen; b) nem. **748.** 124 km/h, 0,2 km/h. **752.** $x + y = 31{,}20$; $x - y = 12{,}54$; $xy = 210{,}1$; $x : y = 2{,}173$. **753.** a) 8,72. **763.** b) 0,25. **764.** 0,25. **766.** a) 0,064; b) 0,288; c) 0,432. **767.** a) 0,3; b) 0,2; c) 0,1. **769.** 0,8. **771.** 0,5. **772.** 0,5. **773.** 0,0061. **774.** 0,9. **775.** 0,3. **776.** 0,9. **777.** b) 0,2. **778.** a) 0,95; b) 0,05.**781.** a) 0,488; b) 0,096. **782.** 0,2. **784.** b) 0,68; c) 0,72. **785.** 35. **794.** a) 50; b) 15. **795.** 5,8. **796.** 7,5%, 12,5%, 10%, 5%, 15%, 25%, 15%, 25%, 15%, 7,5%, 2,5%. **798.** $(2 \cdot 10 + 3 \cdot 20 + 5 \cdot 20) : 50 = 3{,}6$. **799.** 50.

800. a) A módusz 6, a medián 6, az átlag 5,3; b) a módusz 13, a medián 13,5; az átlag 13,9. **830.** a) 67; c) 4. **831.** 5-tel. **832.** 10-szer. **833.** $b_6 = 64$; $b_8 = 256$; $b_{10} = 1024$. **835.** $a_n = 7n - 4$. **836.** 7, 9, 11, 13, 15,.... **839.** c) 15, 10, 5, 0, –5. **841.** $a_2 = -2$; $a_5 = 7$;

$a_{10} = 22$. **842.** a) $n = 17$; b) $n = 16$. **843.** a) $16 \le n \le 51$. **844.** a) 124. **845.** 14. **847.** $k = 4$, $p = 3$. **848.** $a_n = (4 - n)^2$. **849.** a) $a_n = 3n - 1$. **859.** a) $a_3 = 4$. **860.** a) $a_5 = -10$. **863.** 1000 és 1500 hrivnya. **865.** a) (5; 0), (1; 4). **870.** a) 7, 9, 11, 13, 15. **872.** a) $a_7 = -19$, $a_{20} = -71$. **873.** $d = 11$, $a_{10} = 102$, $a_{20} = 212$. **874.** $d = 5$, $a_{10} = 47$. **875.** a) $d = 15$; b) $d = -0{,}2$. **876.** a) $a_1 = 5$; b) $a_1 = 40$. **877.** $a_1 = 5$, $a_5 = 17$, $a_{11} = 35$, $a_{21} = 65$. **878.** $d = -9$, $a_1 = 86$, $a_5 = 50$, $a_{21} = -94$. **879.** $a_7 = 14$, $a_{20} = 7{,}5$. **880.** $a_{40} = 20$, $a_{41} = 20{,}5$. **883.** a) –125. **884.** a) $a_1 = -85$, $d = 20$; *b*) $d = 6$, $a_1 = -37$. **885.** a) 50. **886.** a) 2420. **887.** a) 1088. **888.** $a_{20} = 79$; $S_{20} = 820$. **889.** 1830. **891.** 5050. **892.** 10 000. **893.** 645 cm. **894.** 1680 ezüstöt. **895.** $a_9 = 16{,}1$, $a_n = 2n - 1{,}9$, $a_3p = 6p - 1{,}9$. **896.** c) 95. **897.** a) $a_1 = 1$, $d = 3$, $a_{21} = 61$, $a_{100} = 298$; d) $a_1 = 2{,}8$, $d = 1{,}2$, $a_{21} = 26{,}8$, $a_{100} = 121{,}6$.

901. a) 7. **902.** a) 13. **903.** b) 16 . **904.** 39. **905.** a) $c_1 = 2$, $d = 5$. **907.** $A_3B_3 = 7{,}5$ cm, $A_nB_n = 2{,}5n$ cm. **912.** 18 ló. **913.** a) 430; d) 300. **914.** 9900. **916.** a) 166 833. **917.** a) 2020. **918.** $a_7 = 8$. **919.** 75. **920.** $S_{27} = 54$. **921.** a) $S_{20} = 1090$. **922.** a) $a_5 = 3$. **923.** $S_9 = 63$. **924.** 90-szer. **925.** a) ≈314 m. **926.** Vizsgáljátok meg az $a - 2d$, $a - d$, a, $a + d$, $a + 2d$ sorozatot, amelyben a tagok összege $180(5 - 2)$. **927.** $3{,}5(a + b)$.

928. a) $\frac{3}{2x+1}$; c) $\frac{c+2}{c-1}$. **929.** a) (0; 8). **937.** b) $q = 0{,}1$, $b_5 = 0{,}00001$. **938.** $b_4 = -24$, $b_7 = -192$, $b_n = -3 \cdot 2^{n-1}$. **939.** a) $b_1 = 3$. **940.** d) $b_{12} = 64$. **941.** a) $b_7 = 48$; b) $b_7 = -24$. **942.** a) $b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$. **943.** a) $n = 5$. **944.** Igen. **945.** a) $S_6 = -1092$. **946.** a) 511. **947.** a) $S_6 = 5208\frac{1}{3}$. **948.** d) $S_{15} = 32\,767$. **950.** 4 294 967 295 vagy $(2^{32} - 1)$ garas . **951.** a) $b_1 = 1736\frac{1}{9}$, $q = \pm\frac{3}{5}$. **954. a)** 20. **955.** a) $b_1 = 1$, $q = 3$. **960.** 1. **961.** –2048. **962.** 3, 6, 12. **964.** ≈ 455 Hgmm. **965.** Igen. **968.** 27, 18, 12, 8. **969.** a) $n = 6$; b) $n = 10$. **970.** 3, 6, 12, 18 vagy 18,75, 11,25, 6,75, 4,05. **971.** –0,5, –1, –4, –16 vagy –0,5, 1, 4, 16. **972.** a) b_{12}. **973.** $P_n = b_1^n q^{0.5n(n-1)}$. **974.** Több mint 10 000 ezüst. **975.** $\approx 2^{72}$ baktérium. **976.** 2^{65}, ez sokkal több, mint a Föld lakossága. **977.** a) (0; 9). **979.** 8,8 és 7,8 g/cm^3. **984.** a) 3; d) $-\frac{16}{3}$.

985. a) 1,5. **986.** $\frac{4}{3}$. **987.** a) $\frac{10}{3}$. **988.** b) $\frac{2}{3}$. **989.** a) $\frac{4}{9}$. **990.** 6 cm. **993.** a) $2+\sqrt{2}$; c) $\frac{1}{4-\pi}$. **994.** $6\sqrt{3}r$, $4\pi r$. **995.** c) $\frac{24}{99}$. **996.** c) $\frac{7}{6}$; **997.** b) $\frac{1}{1+x}$. **998.** $16+8\sqrt{2}$. **999.** 3, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{16}$, ...

1000. $b_4=\frac{4}{9}$. **1001.** 1 és $\frac{1}{3}$. **1002.** a) –50; b) –5050. **1003.** a) 40. **1006.** a) $x_1=\frac{2}{3}$, $x_2=\frac{1}{3}$.

1101. Emeljétek négyzetre a kifejezéseket! **1102.** Bizonyítsátok be, hogy $\sqrt{9\pm4\sqrt{5}}=\sqrt{5}\pm2$. **1103.** a) $2a^2+b^2+c^2-2ab-2ac=(a-b)^2+(a-c)^2$. **1104.** a) $x^4+y^4-x^3y-xy^3=(x-y)(x^3-y^3)$, az $x-y$ és x^3-y^3 számok egyforma előjelűek; b) $(x-1)^2+(x-2y)^2+(y-2)^2+1>0$. **1107.** $x^2+(1-x)^2-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(2x-1)^2$. **1111.** x legkisebb értéke, amely mellett a $\sqrt{x-6}$ kifejezésnek van értéke, 6-tal egyenlő. Mindegyik egyenlőtlenség megoldásainak a halmaza $(6;\infty)$. **1115.** $y=|x+\sqrt{2}|+|x-\sqrt{2}|$. **1119.** 0, 2, 4, 3, 2; szerkesszétek meg az $y=|x^2-6x+5|$ függvény görbéjét. **1120.** a) $(-\infty;0]\cup[6;\infty)$; b) nincs megoldása. **1123.** $\approx$ 16 nap. **1124.** Balra. **1125.** 3 : 4. **1126.** $x=3\frac{3}{4}$; $y=5\frac{1}{2}$; $z=7\frac{1}{4}$. **1127.** a) 71 071; b) 428 429. **1128.** $a_1^n(q^{n^2}-1):(q^n-1)$. **1129.** $q:(1-q)^2$. **1130.** 6, –3, $\frac{3}{2}$, $-\frac{3}{4}$, ... **1131.** 1 vagy –2. **1132.** Bizonyítsátok be, hogy $a+c=2b$ mellett a harmadik és a második háromtag különbsége a második és az első háromtag különbségével egyenlő! **1133.** a) $a^n=1{,}5+(-1)^n\cdot0{,}5$; b) $a^n=(-1)^n n$. **1134.** a) $\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$; b) $n^2(n+1)$. **1136.** 3, 7, 11, ... **1137.** 1480 font. **1138.** 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35. **1139.** $a^n=n^2+2$. **1140.** $x=7$. **1141.** Igen, ez a 16, 31, 46, ..., $15n+1$, ... számtani sorozat. **1146.** a) 3, 12, 48 ... . **1148.** 2-szer. **1149.** 11-szer.

TÁRGYMUTATÓ

Abszcisszatengely 279
Abszolút hiba 175
Algebrai törtkifejezés 278
Alkalmazott matematikai feladatok 149
Azonos kifejezések 273
Azonosság 273

Befektetési összeg 165

Diszkriminánс 278

Egész kitevőjű hatvány 276
Egyenes arányosság 70
Egyenlet 277
– ekvivalens 277
– lineáris 277
– másodfokú 278
Egyenletek megoldása 277
Egyenletrendszerek megoldása 122
Egyenlőtlenség-rendszerek megoldása 48
Egyenlőtlenségjel 8
Egyenlőtlenség 7
– ekvivalens 29
– ismeretlent tartalmazó 28
– kettős 22
– másodfokú 113
– változót tartalmazó 9
Egyenlőtlenségek bizonyítása 56
Egyenlőtlenségek megoldása 29
Egytagú kifejezés 273
Értékbecslés 23
Értékes számjegyek 176
Értékkészlet 69
Értelmezési tartomány 69
Ezrelék 166

Fogyó számsorozatok 213
Fordított arányosság 71
Függvény argumentuma 69
Függvény 69
– csökkenő 83
– lineáris 70
– másodfokú 103
– növekvő 83
– páratlan 81
– páros 81

Görbe
– egyenleté 280
– függvényé 69
Gyakorisági táblázat 194

Hatvány tulajdonsága 275
Hatvány 273, 276
Hiperbola 71
Hisztogram 193

Intervallumok 30, 38
Irracionális számok 272

Kamat 163
– egyszerű 165
– kamatos 165

Kamatos kamat összege 166
Kamatos kamat 166
Kerekítés 272
Kéttag köbe 275
Kéttag négyzete 275
Kifejezések átalakítása 277
Kifejezések 273
– egész 274
– racionális 273
– változót tartalmazó 273
Koefficiens (együttható) 274
Koordinátasík 279
Közelítő érték 175
– számítása 175

Másodfokú
egyenlet gyökei 278
Másodfokú
egyenlet képlete 278
Matematikai modellezés 149
Matematikai statisztika 193
Medián 194
Mértani középarányos 57
Mértani
sorozat hányadosa 231
Mértani sorozat 231
Minta átlaga 194
Minta 193
Modell 150
Módusz 194
Multiplikátor 166
Műveletek 183

Négyzetek különbsége 275
Négyzetgyök 276
Növekedő számsorozat 213

Ordinátatengely 279
Összegszámítás 242

Parabola 103, 106
Pont abszcisszája 279
Pont ordinátája 279
Próba 149

Racionális számok 272
Relatív hiba 176
Rövidített szorzás
képlete 275

Szám normálalakja 178
Számegyenlőtlenség 8, 16
Számsorozatok 211
Számtani középarányos 57
Számtani sorozat 221
Számtani sorozat
különbsége 221

Tizedesjegyek 176
Többtagú kifejezés 274
Tömegjelenségek 193
Tört alaptulajdonsága 275
Tulajdonságok
– egyenleteké 277
– függvényeké 80
– hatványoké 276
– számegyenlőtlenségeké 16

Valós számok 272
Valószínűség 186
Végtelen mértani sorozat
összege 243
Végtelen számtani sorozat
összege 222
Viete tétele 279

Adatok a tankönyv állapotáról

Sor-szám	A tanuló családi és utóneve	Tanév	Osztályzat		Értéke-lés
			a tanév elején	a tanév végén	
1.					
2.					
3.					
4.					
5.					

Навчальне видання

БЕВЗ Григорій Петрович, БЕВЗ Валентина Григорівна

АЛГЕБРА

Підручник для 9 класу
загальноосвітніх навчальних закладів
із навчанням угорською мовою

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Переклад з української:

Перекладач: *Адальберт Адальбертович Варга*

Угорською мовою

Зав. редакцією *А. А. Варга*
Редактор *Б. Б. Ковач*
Коректор *І. О. Петро*
Художнє оформлення *А. М. Віксенко*
Малюнок *В. Хайдурової*
Фото: *Ю. Бусленка, А. Віксенка, В. Соловйова*

Підп. до друку 09.09.09. Формат 60x90/16.
Папір офс. Гарнітура Таймс. Друк офс.
Умовн. друк.арк. 18,0. Обл.-вид. арк. 18,0. Тираж 1930 пр.
Вид. № 23. Зам. № 29.

Державне підприємство «Всеукраїнське спеціалізоване видавництво» «Світ»
79008 м. Львів, вул. Галицька, 21
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи: ДК № 2980 від 19.09.2007
www.dsv-svit.lviv.ua
e-mail:office@dsv-svit.lviv.ua

Друкарня ТОВ «Папірус-Ф»
88000 м. Ужгород, вул. Лермонтова, 25