

A. H. Merzljak
V. B. Polonszkij
M. SZ. Jakir

ALGEBRA

Tankönyv

az általános oktatási rendszerű tanintézetek

8. osztálya számára

Ajánlotta Ukrajna Oktatási és Tudományos Minisztériuma

ЛЬВІВ
Оріяна-Нова
2008

УДК 373:512
ББК 22.141я721
М52

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
(Лист № 1.4/18-1127 від 12.05.2008 р.)

Перекладено з видання:
А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Алгебра: Підруч. для 8
кл. загальноосвітніх навчальних закладів. – Х.: Гімназія, 2008, 256 с.

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Переклад угорською мовою
Ю. І. Кулін

ISBN 978-966-2128-13-0 (угор.)
ISBN 978-966-8319-57-0 (укр.)

- © А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський,
М. С. Якір, 2008
- © С. Е. Кулинич, художнє
оформлення, 2008
- © ТОВ ТО «Гімназія», оригінал-
макет, 2008
- © Ю. І. Кулін, переклад угорською
мовою, 2008

A szerzőktől

KEDVES NYOLCADIKOSOK!

Ebben a tanévben tovább folytatjátok az algebra tanulását. Reméljük, hogy a múlt tanévben megszerettétek ezt a fontos és szép tantárgyat, és ezért fokozott érdeklődéssel fogtok hozzá az új ismeretek elsajátításához. Bízunk benne, hogy a kezetekben tartott tankönyv segítségetekre lesz ebben.

Ismerkedjétek meg a tankönyv felépítésével!

A tankönyv három paragrafusból áll, amelyek pontokra tagozódnak. Itt ismerkedhettek meg a tananyag elméleti részével. Fordítsatok különös figyelmet a **félkövér betűkkel** szedett szövegrészekre. Jól jegyezzétek meg a *dőlt* betűkkel kiemelt szavakat is.

A hagyományoknak megfelelően az elméleti anyagot gyakorló példák és feladatok követik. Ezeket a feladatmegoldás egyik lehetséges változatának tekinthetitek. Minden pontban önálló munkára kijelölt feladatok vannak, amelyek megoldásához csak az elméleti rész elsajátítása után fogjatok hozzá. A gyakorlatok között vannak könnyűek, közepesek és nehezek (különösen a *-gal jelöltek). Tudásotokat az „Ellenőriztétek magatokat!” című rubrikában található tesztfeladatok megoldásával ellenőrizhetitek. Minden pont egy különleges rubrikával fejeződik be, amelynek a „Nem hagyományos módszerek használata” címet adtuk. Ezekben olyan feladatok szerepelnek, amelyek megoldásához legtöbbször nem matematikai tudásra van szükség, hanem csak a józan eszeteket, találmányosságotokat, felfogóképességeket kell használni. E feladatokkal problémamegoldó gondolkodás fejlesztését tűztük ki célul, hogy ne csak a matematikai feladatok elvégzésekor kerüljétek a szokványos megoldásokat, hanem az élet minden területén.

Ha a házi feladat megoldása után még marad szabad időtök, és szeretnétek többet tudni, akkor ismerkedjétek meg „Többletfeladatok” című rubrikában leírt feladatokkal. Az ebben közölt tananyag nem tartozik az egyszerűek közé, de itt aztán igazán kipróbálhatjátok képességeiteket.

Sok sikert és kitartást kívánunk!

TISZTELT KOLLÉGÁK!

Őszintén reméljük, hogy e tankönyv megbízható segítségül szolgál egy nemes cél érdekében végzett áldozatos munkájukhoz. Szeretnénk, ha a könyv elnyerné tetszésüket.

A tankönyv széles körű és változatos didaktikai anyagot tartalmaz. Egy tanév alatt a tankönyvben található valamennyi feladatot lehetetlen megoldani, de erre nincs is szükség. Sokkal kényelmesebb úgy dolgozni, hogy bőségesen válogathatunk a feladatokból. Ez az individuális módszerek alkalmazását teszi lehetővé az oktatásban.

A **piros** számozású példákat házi feladatra, a **kék** számozásúakat pedig szóbeli feladatként ajánljuk.

A „**TöbblETFeladatok**”-ban olyan példák találhatók, amelyeket matematikai körökre, illetve fakultatív foglalkozásokra javasunk.

Az alkotó munkához erőt, kedvet és sok sikert kívánunk!

EGYEZMÉNYES JELEK:

- n° alacsony és közepes felkészültségű tanulók részére ajánlott feladatok;
- $n^{\bullet}$ megfelelő felkészültségű tanulók részére ajánlott feladatok;
- n^{**} kiváló felkészültségű tanulók részére ajánlott feladatok;
- n^{*} matematikai körök részére és fakultatív foglalkozásokra ajánlott feladatok;
- ⊙ tételek bizonyítása megfelelő felkészültségű tanulók részére;
- ⊗ tételek bizonyítása kiváló felkészültségű tanulók részére;
- ▲ vége a tétel bizonyításának.

1. §. RACIONÁLIS KIFEJEZÉSEK

- Ebben a paragrafusban olyan törtekkel ismerkedünk meg, amelyek nevezőiben és számlálóiban változókat tartalmazó kifejezések vannak; megtanuljuk összeadni, kivonni, megszorozni és elosztani az ilyen törteket; megismerkedünk az ilyen törtekből álló egyenletekkel.
- Megismerkedünk azokkal a szabályokkal, amelyek segítségével az adott egyenlet egyszerűbb alakra hozható;
- Bővítjük a „hatvány” fogalmát. Megtanuljuk a számokat negatív egész kitevőjű hatványra emelni.
- Megtanuljuk a folyamatok matematikai modellezését, amelyekben az egyik mennyiség néhányszoros növelése (csökkenése) egy másik mennyiség néhányszoros csökkenését (növekedését) vonja maga után.

1. Racionális törtek

Mielőtt hozzáfognátok e pont tanulásához, ismételjétek át a 224. oldalon található 1-es, és a 227. oldalon lévő 6-os pontokat.

A 7. osztályos tananyagban egész kifejezések átalakításával foglalkoztunk. Ezalatt olyan kifejezéseket értettünk, amelyekben számok és változók összeadása, kivonása, szorzása és nullától különböző számmal való osztása szerepel.

Egész kifejezések például: $x - y$, $\frac{a+b}{5}$, $m^2 + 2m + n^2$, $\frac{1}{3}x - 4$, $\frac{c}{4} + \frac{d}{7}$, $x : 5$, y , 7 .

A 8. osztályban a **törtkifejezésekkel** fogunk megismerkedni. A törtkifejezések abban különböznek az egész kifejezésektől, hogy bennük *változót tartalmazó kifejezéssel való osztás is előfordul*.

Törtkifejezések például:

$$2x + \frac{a}{b}; (x - y) : (x + y); \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}; \frac{5}{x}.$$

1. §. RACIONÁLIS KIFEJEZÉSEK

Az egész és törtkifejezéseket együtt **racionális kifejezéseknek** nevezzük.

Ha a racionális kifejezésekben a változókat számokra cseréljük, akkor számkifejezést kapunk. A cserét csak akkor szabad elvégezni, ha az nem vezet nullával való osztáshoz. Például a $2 + \frac{a+2}{a-1}$ kifejezésnek nincs értelme, ha $a = 1$, azaz a kifejezésnek nincs számértéke. Az a összes többi értékénél a kifejezés értelmezve van.

M e g h a t á r o z á s: A változók azon értékeit, amelyekkel a racionális kifejezés értelmezve van, a v á l t o z ó k m e g e n g e d e t t é r t t é k e i n e k nevezzük.

A fenti kifejezésben például az a változó megengedett értéke az 1 kivételével valamennyi szám.

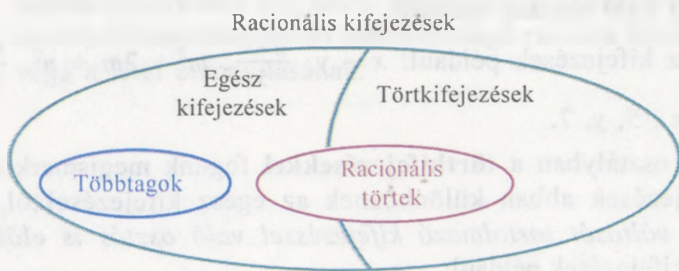
Az egész kifejezésekben szereplő változók megengedett értéke az összes szám.

A racionális kifejezések részesete a **racionális tört**, amelyekben a számláló és nevező is többtag¹. Például:

$$\frac{x}{7}, \frac{x^2 - 2xy}{x + y}, \frac{12}{a}, \frac{a+b}{5}.$$

Megjegyezzük, hogy a racionális tört lehet mind egész, mind törtkifejezés.

A racionális tört nevezője nem lehet olyan többtag, amely azonosan egyenlő nullával.



1. ábra

¹ Emlékeztetünk rá, hogy a számok és az egytagok a többtagok köréhez tartoznak (lásd 227. oldal 6. pont).

1. Racionális törtek

A racionális törtekben a változók megengedett értékei azok, amelyekkel a nevező nem egyenlő nullával.

Az 1. ábrán látható vázlatrajz ebben a pontban megtalálható fogalmak közötti kapcsolatot szemlélteti.

PÉLDA:

Határozzátok meg a változó megengedett értékeit az $\frac{1}{x} + \frac{3}{x-5}$ kifejezésben!

Megoldás

Az $\frac{1}{x}$ tört nincs értelmezve, ha $x = 0$. Az összes többi szám esetén értelmezve van. A $\frac{3}{x-5}$ tört az $x = 5$ értékén kívül az összes számra értelmezve van.

Tehát az a megengedett értékei a 0 és 5 kivételével valamennyi szám. Vagy másképpen fogalmazva: a kifejezés nincs értelmezve, ha $x = 0$ vagy $x = 5$.



1. Miben különböznek a törtkifejezések az egész kifejezésektől?
2. Hogyan nevezzük az egész és törtkifejezéseket alkotó halmazokat?
3. A változók mely értékeit nevezzük megengedett értéknek?
4. Milyen törteket nevezünk racionálisaknak?
5. Milyen kifejezések részesete a racionális tört?
6. Milyen többtag nem lehet egy racionális tört nevezője?

1.° A $\frac{3a^2}{4b^3}$, $\frac{5x^2}{4} + \frac{x}{7}$, $\frac{8}{6n+1}$, $3a - \frac{b^2}{c^4}$, $\frac{t^2 - 6t + 15}{2t}$, $\frac{x-2}{x+2}$, $\frac{1}{6}m^3n^5$,

$(y-4)^3 + \frac{1}{y}$, $\frac{m^2 - 3mn}{18}$ kifejezések közül melyek:

1) egész kifejezések; 2) törtkifejezések; 3) racionális törtek?

2.° Mivel egyenlő a $\frac{c^2 - 4c}{2c+1}$ tört értéke, ha:

1) $c = -3$;

2) $c = 0$?

3.° Határozzátok meg a $\frac{2m-n}{3m+2n}$ kifejezés értékét, ha:

1) $m = -1$, $n = 1$;

2) $m = 4$, $n = -5$.

4.° Határozzátok meg a kifejezés értékét:

1) $\frac{a^2 - 1}{a - 5}$ ha $a = -4$;

2) $\frac{x+3}{y} - \frac{y}{x+2}$ ha $x = -5$, $y = 6$!

1. §. RACIONÁLIS KIFEJEZÉSEK

5.° Határozzátok meg a kifejezésben szereplő változó megengedett értékeit:

1) $2x - 5$;

5) $\frac{2+y}{1+y}$;

9) $\frac{2}{x-2} + \frac{3x}{x+1}$;

2) $\frac{18}{m}$;

6) $\frac{1}{x^2+4}$;

10) $\frac{x+4}{x(x-6)}$;

3) $\frac{9}{x-5}$;

7) $\frac{5}{x^2-4}$;

11) $\frac{x}{|x|+1}$;

4) $\frac{x-5}{9}$;

8) $\frac{5}{|x|}-4$;

12) $\frac{x^2}{(x-3)(x+5)}$!

6.° A változó mely értékénél nincs értelmezve a

1) $\frac{9}{y}$;

3) $\frac{m-1}{m^2-9}$;

5) $\frac{4}{x-8} + \frac{1}{x-1}$;

2) $\frac{x+7}{x+9}$;

4) $\frac{x}{|x|-3}$;

6) $\frac{2x-3}{(x+2)(x-10)}$?

kifejezés?

7.° Írjatok fel olyan változót tartalmazó racionális törtet, amely

1) $x = 7$;

2) $x = -1$;

3) $x = 0$ és $x = 4$.

értékeinél nincs értelmezve!

8.° Írjatok fel olyan változót tartalmazó törtet, amelynek megengedett értékei:

1) 5 kivételével valamennyi szám;

2) -2 és 0 kivételével valamennyi szám;

3) 3 , -3 és 6 kivételével valamennyi szám;

4) valamennyi szám!

9.° Egy gépkocsi 75 km/h sebességgel a km-t tett meg műúton, és 40 km/h sebességgel b kilométert földúton. Mennyi idő alatt tette meg a teljes utat a gépkocsi? Állítsatok fel kifejezést, majd határozzátok meg az értéket, ha $a = 150$, $b = 20$!

10.° Egy tanuló m hrivnyáért 60 kopijkás, n hrivnyáért pedig 90 kopijkás füzeteket vásárolt. Hány füzetet vásárolt a tanuló? Állítsatok fel kifejezést, majd határozzátok meg értékét, ha $m = 2,4$; $n = 4,5$!

11.° Bizonyítsátok be, hogy az x valamennyi megengedett értékénél a tört értéke:

1) $\frac{1}{x^2}$ pozitív;

2) $\frac{x^2+1}{6x-9-x^2}$ negatív!

12.* Bizonyítsátok be, hogy az x valamennyi megengedett értékénél a tört értéke:

1) $\frac{-x^2}{x^2+5}$ nem pozitív;

2) $\frac{x^2+4x+4}{x^2-2x+1}$ nem negatív!

13.* Ismert, hogy $5x - 15y = 1$. Határozzátok meg az alábbi kifejezések értékét:

1) $x - 3y$;

3) $\frac{18y-6x}{9}$;

2) $\frac{8}{2x-6y}$;

4) $\frac{1}{x^2-6xy+9y^2}$!

14.* Ismert, hogy $4a + 8b = 10$. Határozzátok meg a kifejezés értékét:

1) $2b + a$;

2) $\frac{5}{a+2b}$;

3) $\frac{a^2+4ab+4b^2}{2a+4b}$!

15.** Határozzátok meg a függvény értelmezési tartományát:

1) $y = \frac{1}{4 - \frac{4}{x}}$;

2) $y = \frac{1}{x - \frac{1}{x}}$!

16.** A változó mely értékeinél van értelmezve a kifejezés:

1) $\frac{x}{x - \frac{9}{x}}$;

2) $\frac{10}{2 + \frac{6}{x}}$?

FELKÉSZÜLÉS AZ ÚJ TÉMÁHOZ

17. Egyszerűsítsetek a törteket:

1) $\frac{5}{15}$;

2) $\frac{12}{18}$;

3) $\frac{27}{45}$;

4) $\frac{30}{48}$!

18. Legyen:

1) a $\frac{3}{7}$ tört nevezője 14;

2) a $\frac{8}{15}$ tört nevezője 60!

19. Adjátok meg hatványkifejezés alakjában:

1) $a^5 a^3$;

3) $a^5 : a^3$;

2) $(a^5)^3$;

4) $(a^8)^4 : (a^2)^8$!

20. Bontsátok tényezőkre:

1) $6a - 15b$;

5) $a^6 + a^2$;

2) $2a + ab$;

6) $12m^2n - 4mn$;

3) $7am + 7bn$;

7) $2x^2 - 4x^3 + 10x^4$;

4) $4x^2 - 12xy$;

8) $10a^3b^2 - 15a^2b + 25ab^2$!

21. Adjátok meg szorzat alakjában a kifejezést:

1) $ab - ac + bd - cd$;

2) $3m + 3n - mx - nx$;

1. §. RACIONÁLIS KIFEJEZÉSEK

- 3) $a^5 + a^3 + 2a^2 + 2$; 4) $8a^2b - 2a^2 - 4b^2 + b!$
22. Adjátok meg a háromtagokat kéttagok négyzeteinek alakjában:
- 1) $a^2 - 8a + 16$; 3) $40xy + 16x^2 + 25y^2$;
2) $9x^2 + 6x + 1$; 4) $a^8 - 4a^4b + 4b^2!$
23. Bontsátok tényezőkre:
- 1) $x^2 - 9$; 4) $a^2b^2 - 81$; 7) $c^3 - d^3$;
2) $25 - 4y^2$; 5) $100m^6 - 1$; 8) $a^3 + 8$;
3) $36m^2 - 49n^2$; 6) $a^{10} - b^6$; 9) $27m^6 - n^9!$
24. Bontsátok tényezőkre:
- 1) $7a^2 - 7$; 4) $-8a^5 + 8a^3 - 2a$;
2) $3b^3 - 3b$; 5) $x - 4y + x^2 - 16y^2$;
3) $2x^3 - 2xy^2$; 6) $ab^6 - ab^4 - b^6 + b^4!$
25. Melyik azonosság az alábbi egyenlőségek közül:
- 1) $3x^2 - 36xy + 108y^2 = 3(x - 6y)^2$;
2) $4m^3 - 500n^6 = 4(m - 5n)(m - 5mn + 25n^2)?$
- Frissítsétek fel a 2. pontban tanultakat (224. oldal)!

▶ NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREK HASZNÁLATA

26. $a = \underbrace{44\dots4}_m$, $b = \underbrace{33\dots3}_n$. Megválaszthatók-e úgy az m és az n értékei, hogy:
- 1) az a szám osztható legyen b -vel;
2) a b szám osztható legyen a -val?

2. A racionális törtek alaptulajdonsága

A $3a - 1 + 2a + 5 = 5a + 4$ egyenlőség azonosság, mivel az a valamennyi értékénél teljesül.

A $\frac{3a-1+2a+5}{a+1} = \frac{5a+4}{a+1}$ egyenlőség első ránézésre ugyancsak azonosságnak tűnik, de az egyenlőség az $a = -1$ értéknél nem teljesül. $a = -1$ esetén kapott racionális tört nincs értelmezve. Vagyis a 7. osztályban bevezetett azonosan egyenlő kifejezések és azonosság meghatározásait pontosítani kell.

M e g h a t á r o z á s: Két kifejezést azonosan egyenlőnek nevezünk, ha a változók minden megengedett értékénél megfelelő helyettesítési értékeik egyenlők.

M e g h a t á r o z á s: Azonosságnak nevezzük az olyan egyenlőséget, amely a változó minden megengedett értékénél igaz.

Például az $\frac{a-2}{a-2}=1$ egyenlőség azonosság, mivel az $a=2$ kivételével a változó valamennyi értékénél igaz.

A 7. osztályban tanultuk az egész kifejezések azonos átalakításait. Most pedig a törtkifejezések azonos átalakításával fogunk foglalkozni.

Az arány alaptulajdonsága szerint az $\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}$ egyenlőség teljesül a , b és m bármely értékeivel, ahol $b \neq 0$ és $m \neq 0$.

A racionális törtek az arány alaptulajdonságához hasonló tulajdonsággal rendelkeznek:

ha a racionális tört számlálóját és nevezőjét megszorozzuk egy és ugyanazzal a nullától eltérő többitaggal, akkor az adottal azonosan egyenlő törtet kapunk.

A fenti tulajdonságot a **racionális tört alaptulajdonságának** nevezzük.

$\frac{A}{B}=\frac{A \cdot C}{B \cdot C}$, ahol A , B és C többitagok, s emellett B és C nem egyenlő nullával.

A fenti tulajdonság felhasználásával a $\frac{A \cdot C}{B \cdot C}$ kifejezést helyettesíthetjük a vele azonosan egyenlő $\frac{A}{B}$ törttel. Az ilyen azonos átalakításokat a törtnek C tényezővel való **egyszerűsítésének** nevezzük.

1. PÉLDA.

Egyszerűsítsük a 1) $\frac{6a^3b^2}{24a^2b^4}$; 2) $\frac{3x+15y}{3x}$; 3) $\frac{y^2+4y+4}{y^2+2y}$ törtet!

Megoldás

1) A $6a^3b^2$ és $24a^2b^4$ egytagoknak van közös $6a^2b^2$ tényezőjük.
Ezért:

1. §. RACIONÁLIS KIFEJEZÉSEK

$$\frac{6a^3b^2}{24a^2b^4} = \frac{a \cdot 6a^2b^2}{4b^2 \cdot 6a^2b^2} = \frac{a}{4b^2}.$$

2) A tört számlálóját tényezőkre bontjuk:

$$\frac{3x+15y}{3x} = \frac{3(x+5y)}{3x}.$$

A kapott törtet a közös 3 tényezővel egyszerűsítjük:

$$\frac{3x+15y}{3x} = \frac{3(x+5y)}{3x} = \frac{x+5y}{x}.$$

3) A tört számlálóját és nevezőjét tényezőkre bontjuk, majd a kapott törtet a közös $y+2$ tényezővel egyszerűsítjük:

$$\frac{y^2+4y+4}{y^2+2y} = \frac{(y+2)^2}{y(y+2)} = \frac{y+2}{y}.$$

A tört alaptulajdonságából következik, hogy

$$\frac{A}{B} = \frac{-A}{-B} \text{ és } \frac{-A}{B} = \frac{A}{-B}.$$

A $\frac{-A}{B}$ és $\frac{A}{-B}$ törtek mindegyikét felírhatjuk $-\frac{A}{B}$ alakban, vagyis

$$\frac{-A}{B} = \frac{A}{-B} = -\frac{A}{B}.$$

2. PÉLDA

Egyszerűsítsük a $\frac{4a-20}{5a-a^2}$ törtet!

Megoldás

$$\frac{4a-20}{5a-a^2} = \frac{4(a-5)}{a(5-a)} = \frac{4(a-5)}{-a(a-5)} = -\frac{4}{a}.$$

3. PÉLDA

Alakítsuk át:

- 1) az $\frac{a^2}{5bc^3}$ törtet úgy, hogy nevezője $15ab^3c^5$ legyen;
- 2) az $\frac{a}{a+2b}$ törtet úgy, hogy nevezője $a^2 - 4b^2$ legyen;
- 3) az $\frac{a-b}{2a-3b}$ törtet úgy, hogy nevezője $3b - 2a$ legyen!

Megoldás

1) Mivel $15ab^3c^5 = 5bc^3 \cdot 3ab^2c^2$, ezért az új nevező a $3ab^2c^2$ tényezővel különbözik az adott tört nevezőjétől. Tehát az adott tört számlálóját és nevezőjét a $3ab^2c$ **pótszorzóval** kell megszoroznunk:

$$\frac{a^2}{5bc^3} = \frac{a^2 \cdot 3ab^2c^2}{5bc^3 \cdot 3ab^2c^2} = \frac{3a^3b^2c^2}{15ab^3c^5}.$$

$$2) \frac{a}{a+2b} = \frac{a(a-2b)}{(a+2b)(a-2b)} = \frac{a^2-2ab}{a^2-4b^2}.$$

3) Az adott tört számlálóját és nevezőjét -1 -gyel szorozzuk:

$$\frac{a-b}{2a-3b} = \frac{(a-b) \cdot (-1)}{(2a-3b) \cdot (-1)} = \frac{b-a}{3b-2a}.$$

4. PÉLDA

Hozzuk közös nevezőre a törteket:

$$1) \frac{2m}{9a^2b^6} \text{ és } \frac{5n^2}{6a^4b^3}; \quad 2) \frac{1}{a+b} \text{ és } \frac{1}{a-b}; \quad 3) \frac{4a^2}{a^2-36} \text{ és } \frac{6}{a^2+6a}!$$

Megoldás

1) Az adott tört nevezőinek szorzata $9a^2b^6 \cdot 6a^4b^3 = 54a^6b^9$ egyúttal közös nevezőjük is. Azonban célszerűbb közös nevezőnek a $18a^4b^6$ egytagot választani, amelynek együtthatója (18) az adott nevezők együtthatóinak (9 és 6) legkisebb közös többszöröse; mindegyik változót (a és b) a törtek nevezőiben szereplő legnagyobb kitevőkkel vesszük.

Mivel $18a^4b^6 = 9a^2b^6 \cdot 2a^2$, ezért a $\frac{2m}{9a^2b^6}$ tört pótszorzója a $2a^2$ egytag lesz. Figyelembe véve, hogy $18a^4b^6 = 6a^4b^3 \cdot 3b^3$, ezért

az $\frac{5n^2}{6a^4b^3}$ tört pótszorzója a $3b^3$ egytag.

$$\text{Tehát } \frac{2m}{9a^2b^6} = \frac{2m \cdot 2a^2}{9a^2b^6 \cdot 2a^2} = \frac{4a^2m}{18a^4b^6};$$

$$\frac{5n^2}{6a^4b^3} = \frac{5n^2 \cdot 3b^3}{6a^4b^3 \cdot 3b^3} = \frac{15b^3n^2}{18a^4b^6}.$$

2) Az adott törtek közös nevezője egyenlő nevezőik szorzatával.
Így:

1. §. RACIONÁLIS KIFEJEZÉSEK

$$\frac{1}{a+b} = \frac{a-b}{(a+b)(a-b)} = \frac{a-b}{a^2-b^2},$$

$$\frac{1}{a-b} = \frac{a+b}{(a-b)(a+b)} = \frac{a+b}{a^2-b^2}.$$

3) A racionális törtök közös nevezőjének meghatározásánál hasznos lehet nevezőinek tényezőkre bontása:

$$a^2 - 36 = (a + 6)(a - 6), \quad a^2 + 6a = a(a + 6).$$

Tehát az adott törtök közös nevezőjévé az $a(a + 6)(a - 6)$ kifejezést választhatjuk.

$$\text{Ekkor } \frac{4a^2}{a^2-36} = \frac{\overset{a}{\cancel{4}}a^{\cancel{2}}}{(a+6)\cancel{(a-6)}} = \frac{4a^3}{a(a+6)\cancel{(a-6)}} = \frac{4a^3}{a^3-36a};$$

$$\frac{6}{a^2+6a} = \frac{\overset{a-6}{\cancel{6}}}{a(a+6)} = \frac{6a-36}{a(a+6)\cancel{(a-6)}} = \frac{6a-36}{a^3-36a}.$$

5. PÉLDA

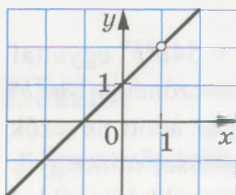
Ábrázoljuk az $y = \frac{x^2-1}{x-1}$ függvény grafikonját!

Megoldás

Az adott függvény értelmezési tartománya az $x = 1$ kivételével valamennyi szám. Így:

$$y = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1, \quad x \neq 1.$$

Tehát az adott függvény grafikonja az 1 abszcisszájú pont kivételével az $y = x + 1$ egyenes (2. ábra).



2. ábra

6. PÉLDA

Oldjuk meg a $(a^2 - 9)x = a + 3$ egyenletet!

Megoldás

Felírjuk az adott egyenletet $(a + 3)(a - 3)x = a + 3$ alakban, és megvizsgálunk három esetet.

1) $a = 3$.

Ebben az esetben a $0x = 6$ egyenletet kapjuk, amelynek nincs megoldása.

2) $a = -3$.

Az így kapott $0x = 0$ egyenletnek számtalan megoldása van.

3) $a \neq 3$ i $a \neq -3$.

2. A racionális törtek alaptulajdonsága

Ekkor $x = \frac{a+3}{(a+3)(a-3)} = \frac{1}{a-3}$.

F e l e l e t: ha $a = 3$, akkor az egyenletnek nincs gyöke; ha $a = -3$, akkor az egyenletnek számtalan gyöke van; ha $a \neq 3$ és $a \neq -3$, akkor $x = \frac{1}{a-3}$.



1. Milyen kifejezéseket nevezünk azonosan egyenlőknek?
2. Mit nevezünk azonosságnak?
3. Fogalmazzátok meg a racionális törtek alaptulajdonságát!

27.° Az alábbi kifejezések közül melyikkel azonosan egyenlő a $\frac{6a^2}{24a}$ tört:

1) $\frac{a^2}{4}$; 2) $\frac{a}{4}$; 3) $\frac{12a^3}{48a}$; 4) $\frac{3a^4}{12a^2}$?

28.° Azonosságok-e az alábbi egyenlőségek:

1) $\frac{3m^2}{7m} = \frac{3m}{7}$; 3) $\frac{2b}{5c^3} = \frac{8b}{20c^5}$;
2) $\frac{4x^8}{16x^4} = \frac{x^2}{4}$; 4) $\frac{8m^2}{9n} = \frac{8m^5}{9nm^3}$?

29.° Egyszerűsítsétek a törteket:

1) $\frac{14a^3}{21a}$; 3) $\frac{5x}{20x}$; 5) $\frac{4abc}{16ab^4}$; 7) $\frac{-10n^{10}}{5n^4}$;
2) $\frac{8b^3c^2}{12bc^3}$; 4) $\frac{24x^2y^2}{32xy}$; 6) $\frac{56m^5n^7}{42m^5n^{10}}$; 8) $\frac{3p^4q^6}{-9p^8q^7}$!

30.° Adjátok meg a hányadost tört alakban, majd egyszerűsítsétek azokat:

1) $6a : (18a^5)$; 3) $35a^8b^6 : (-49a^6b^8)$!
2) $16b^7 : (48b^4)$;

31.° Egyszerűsítsétek a törteket:

1) $\frac{3x}{21y}$; 3) $\frac{5c^4}{10c^5}$; 5) $\frac{16ab^4}{40ab^2}$; 7) $\frac{12a^8}{-42a^2}$;
2) $\frac{5x^2}{6x}$; 4) $\frac{2m^4}{m^3}$; 6) $\frac{63x^5y^4}{42x^4y^5}$; 8) $\frac{-13a^5b^5}{26a^4b^3}$!

32.° Egyszerűsítsétek a törteket:

1) $\frac{-a}{-b}$; 2) $-\frac{-a}{b}$; 3) $-\frac{a}{-b}$; 4) $-\frac{-a}{-b}$!

33.° Pótoljátok a hiányzó kifejezéseket az egyenlőségben:

1) $\frac{a}{3} = \frac{\quad}{6a} = \frac{\quad}{9a^3} = \frac{\quad}{15b} = \frac{4a^2c^3}{\quad}$;

$$2) \frac{m}{n} = \frac{4m}{2n^2} = \frac{3m^4 n^3}{mnp} !$$

34.° Alakítsátok át:

- 1) az $\frac{a}{b^3}$ kifejezést b^5 nevezőjű törtté;
- 2) az $\frac{m}{9n}$ kifejezést $27n^4$ nevezőjű törtté;
- 3) a $\frac{6}{7x^2y}$ kifejezést $35x^3y^2$ nevezőjű törtté;
- 4) az $\frac{5k}{6p^5}$ kifejezést $24p^9c$ nevezőjű törtté!

35.° Alakítsátok át:

- 1) az $\frac{x}{y^2}$ alakú törtet y^3 nevezőjűvé;
- 2) az $\frac{a}{3b}$ alakú törtet $6b^3$ nevezőjűvé;
- 3) a $\frac{9}{4m^2n}$ alakú törtet $12m^3n^2$ nevezőjűvé;
- 4) a $\frac{11c}{15a^6}$ alakú törtet $30bd^7$ nevezőjűvé!

36.° Egyszerűsítsétek a törteteket:

- | | | |
|--------------------------------------|------------------------------|--------------------------------|
| 1) $\frac{a(x+2)}{b(x+2)}$; | 5) $\frac{7x-21y}{5x-15y}$; | 9) $\frac{y^2-25}{10+2y}$; |
| 2) $\frac{4(a-6)^2}{(a-6)^3}$; | 6) $\frac{4a-20b}{12ab}$; | 10) $\frac{a^2+4a+4}{9a+18}$; |
| 3) $\frac{c^3(c-4)^5}{c^6(c-4)^3}$; | 7) $\frac{6x+12}{6x}$; | 11) $\frac{c^2-6c+9}{c^2-9}$; |
| 4) $\frac{2a+2b}{7(a+b)}$; | 8) $\frac{a-5b}{a^2-5ab}$; | 12) $\frac{m^3+1}{m^2-m+1}$! |

37.° Egyszerűsítsétek a törteteket:

- | | | |
|----------------------------|------------------------------------|----------------------------------|
| 1) $\frac{a-b}{2(b-a)}$; | 3) $\frac{m^2-5mn}{15n-3m}$; | 5) $\frac{x^2-25}{5x^2-x^3}$; |
| 2) $\frac{3x-6y}{4y-2x}$; | 4) $\frac{7a^4-a^3b}{b^4-7ab^3}$; | 6) $\frac{y^2-12y+36}{36-y^2}$! |

38.° Egyszerűsítsétek a törteteket:

- | | | |
|---------------------------------|-----------------------------|---------------------------------|
| 1) $\frac{3m-3n}{7m-7n}$; | 3) $\frac{4x-16y}{16y}$; | 5) $\frac{12a^2-6a}{3-6a}$; |
| 2) $\frac{5a+25b}{2a^2+10ab}$; | 4) $\frac{x^2-49}{6x+42}$; | 6) $\frac{9b^2-1}{9b^2+6b+1}$; |

2. A racionális törtek alaptulajdonsága

7) $\frac{b^5 - b^4}{b^5 - b^6}$;

8) $\frac{7m^2 + 7m + 7}{m^3 - 1}$;

9) $\frac{64 - x^2}{3x^2 - 24x}$!

39.° Alakítsátok át:

1) az $\frac{a}{a+2}$ törtet $4a + 8$ nevezőjű törtté;

2) az $\frac{m}{m-3n}$ törtet $m^2 - 9n^2$ nevezőjű törtté;

3) az $\frac{x}{2x-y}$ törtet $7y - 14x$ nevezőjű törtté;

4) az $\frac{5b}{2a+3b}$ törtet $4a^2 + 12ab + 9b^2$ nevezőjű törtté;

5) az $\frac{x+1}{x^2+x+1}$ törtet $x^3 - 1$ nevezőjű törtté!

40.° Alakítsátok át az $x - 5y$ kifejezést:

1) 2; 2) x ; 3) $4y^3$; 4) $x^2 - 25y^2$ nevezőjű törtté!

41.° Alakítsátok át a $\frac{6}{b-4}$ törtet:

1) $5b - 20$; 2) $12 - 3b$; 3) $b^2 - 4b$; 4) $b^2 - 16$ nevezőjű törtté!

42.° Alakítsátok át az alábbi törtpárokat azonos nevezőjű törtekké:

1) $\frac{1}{8ab}$ és $\frac{1}{2a^3}$;

5) $\frac{x}{2x+1}$ és $\frac{x}{3x-2}$;

2) $\frac{3x}{7m^3n^3}$ és $\frac{4y}{3m^2n^4}$;

6) $\frac{a-b}{3a+3b}$ és $\frac{a}{a^2-b^2}$;

3) $\frac{a+b}{a-b}$ és $\frac{2}{a^2-b^2}$;

7) $\frac{3a}{4a-4}$ és $\frac{2a}{5-5a}$;

4) $\frac{3d}{m-n}$ és $\frac{8p}{(m-n)^2}$;

8) $\frac{7a}{b-3}$ és $\frac{c}{9-b^2}$!

43.° Hozzátok közös nevezőre a törteket:

1) $\frac{4}{15x^2y^2}$ és $\frac{1}{10x^3y}$;

5) $\frac{x+1}{x^2-xy}$ és $\frac{y-1}{xy-y^2}$;

2) $\frac{c}{6a^4b^5}$ és $\frac{d}{9ab^2}$;

6) $\frac{6a}{a-2b}$ és $\frac{3a}{a+b}$;

3) $\frac{x}{y-5}$ és $\frac{z}{y^2-25}$;

7) $\frac{1+c^2}{c^2-16}$ és $\frac{c}{4-c}$;

4) $\frac{m+n}{m^2-mn}$ és $\frac{2m-3n}{m^2-n^2}$;

8) $\frac{2m+9}{m^2+5m+25}$ és $\frac{m}{m-5}$!

44.° Egyszerűsítsetek a törteket:

1) $\frac{(3a+3b)^2}{a+b}$;

2) $\frac{(6x-18y)^2}{x^2-9y^2}$;

1. §. RACIONÁLIS KIFEJEZÉSEK

$$3) \frac{xy+x-5y-5}{4y+4};$$

$$4) \frac{a^2-ab+2b-2a}{a^2-4a+4}!$$

45.* Egyszerűsítsétek a törteket:

$$1) \frac{2m^2-72n^2}{(4m+24n)^2};$$

$$2) \frac{a^3-8}{ab-a-2b+2};$$

$$3) \frac{a^3+2a^2b+ab^2}{a^3-ab^2}!$$

46.* Egyszerűsítsétek, majd határozzátok meg a tört helyettesítési értékét:

$$1) \frac{15a^2+10ab}{3ab+2b^2}, \text{ ha } a = -2; b = 0,4;$$

$$2) \frac{9b^2-4c^2}{12b^2c-8bc^2}, \text{ ha } b = \frac{1}{3}; c = -6;$$

$$3) \frac{36x^2-12xy+y^2}{y^2-36x^2}, \text{ ha } x = 1,2; y = -3;$$

$$4) \frac{a^8-a^6}{a^6+a^8}, \text{ ha } a = -0,1!$$

47.* Határozzátok meg a kifejezés értékét:

$$1) \frac{16x^2-4y^2}{6x-3y}, \text{ ha } x = 2,5; y = -2;$$

$$2) \frac{49c^2-9}{49c^2+42c+9}, \text{ ha } c = -4!$$

48.* Hozzátok közös nevezőre a törteket:

$$1) \frac{2p}{5p-15} \text{ és } \frac{1}{p^3-27};$$

$$2) \frac{3a+1}{9a^2-6a+1} \text{ és } \frac{a-2}{9a^2-1};$$

$$3) \frac{a}{a^2-7a} \text{ és } \frac{a+3}{a^2-14a+49};$$

$$4) \frac{2x}{x^2-1}, \frac{3x}{x^2-2x+1} \text{ és } \frac{4}{x^2+2x+1};$$

$$5) \frac{a^2}{a^2-ab-ac+bc}, \frac{b}{2a-2b} \text{ és } \frac{ab}{4a-4c}!$$

49.* Írjátok fel a törtkifejezéseket azonos nevezőjű törtek alakjában:

$$1) \frac{3a}{3a-2}, \frac{a}{9a+6} \text{ és } \frac{a^2}{9a^2b-4b};$$

$$2) \frac{1}{a-5b}, \frac{1}{a^2+7ac} \text{ és } \frac{1}{a^2+7ac-5ab-35bc}!$$

50.** Határozzátok meg a $\frac{2xy-y^2}{3xy+x^2}$ kifejezés helyettesítési értékét, ha

$$\frac{x}{y} = 2!$$

51.** Határozzátok meg a $\frac{4a^2-ab}{ab+14b^2}$ kifejezés helyettesítési értékét, ha $\frac{a}{b}=5$!

52.** Határozzátok meg a kifejezés helyettesítési értékét, ha tudjuk, hogy $2a - 6b = 1$:

1) $\frac{8}{a-3b}$;

2) $\frac{a^2-9b^2}{0,5a+1,5b}$!

53.** Határozzátok meg a $\frac{2m-1,5n}{32m^2-18n^2}$ kifejezés helyettesítési értékét, ha $4m + 3n = 8$!

54.** Létezik-e az a -nak olyan értéke, amelynél az $\frac{a^3-a^2-a+1}{a^3+a^2+a+1}$ tört negatív lesz?

55.** Ábrázoljátok az alábbi függvényeket grafikusan:

1) $y = \frac{x^2-4}{x+2}$;

3) $y = \frac{x^2-10x+25}{x-5} - \frac{2x^2-4x}{x}$;

2) $y = \frac{x-3}{3-x}$;

4) $y = \frac{2}{x+4} - \frac{2}{x+4}$!

56.** Ábrázoljátok az alábbi függvényeket grafikusan:

1) $y = \frac{x^2-8x+16}{x-4}$;

3) $y = \frac{x^2-3x}{x} - \frac{2x^2-2}{x^2-1}$!

2) $y = x - \frac{x}{x}$;

57.** Ábrázoljátok az alábbi függvényeket grafikusan:

1) $y = \frac{|x|}{x}$;

2) $y = \frac{x^2-1}{|x|-1}$!

58.** Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $\frac{x+1}{x+1}=1$;

2) $\frac{x^2-25}{x-5}=10$;

3) $\frac{x+6}{|x|-6}=0$!

59.** Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $\frac{x^2-16}{x+4}=-8$;

2) $\frac{|x|-7}{x-7}=0$!

60.* Az a valamennyi értékére oldjátok meg az egyenletet:

1) $ax = 1$;

3) $(a-6)x = a^2-12a+36$;

2) $ax = a$;

4) $(a^2-4)x = a-2$!

61.* Az a valamennyi értékére oldjátok meg az egyenletet:

1) $(a+3)x = 3$;

2) $(a^2-9a)x = a^2-18a+81$!

ISMÉTLŐ FELADATOK

62. Hozzátok egyszerűbb alakra a kifejezést:

1) $(x+2)(x-9) - 3x(3-2x)$;

1. §. RACIONÁLIS KIFEJEZÉSEK

- 2) $(a + 5)(a - 2) + (a + 4)(a - 5)$;
3) $(y - 8)(2y + 1) - (3y + 1)(y - 6)$;
4) $(2x - 3y)(2x + 3y) + (3x + 2y)(3x - 2y)$;
5) $(x + 1)^2 - (x - 3)(x + 3)$;
6) $(y - 4)(y + 3) - (y - 6)^2$!
63. Ábrázoljátok grafikusan a függvényt:
1) $y = 2$; 2) $y = 2x$; 3) $y = 2x - 1$!
64. Milyen a és b értékeknél lesz az $(a - 2)(a + 2) + 4b(b - a)$ kifejezés értéke a legkisebb? Mennyi ez a legkisebb érték?
65. Meggyes faluhoz a vasútállomás 14 kilométerrel közelebb van, mint Almáshoz. Autóbusszal Meggyestől az állomásig 45 percig tart az út. Személygépkocsival az út Almásról az állomásra 5 perccel tovább tartott. A személygépkocsi sebessége 12 km/h-val nagyobb az autóbusz sebességénél. Határozzátok meg mind egyik gépjármű sebességét!

FELKÉSZÜLÉS AZ ÚJ TÉMÁHOZ

66. Végezzétek el a műveleteket:

1) $\frac{7}{18} + \frac{5}{18}$; 2) $\frac{9}{16} + \frac{7}{16}$; 3) $\frac{23}{32} - \frac{15}{32}$; 4) $4 - 1\frac{3}{11}$!

NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREK HASZNÁLATA

67. A négyzet oldalaihoz 4 természetes számot írtak. A négyzet mindegyik csúcsában pedig olyan szám szerepel, amely egyenlő a csúcsot alkotó oldalakra írt számok szorzatával. A csúcsokban szereplő számok összege 55. Határozzátok meg az oldalakhoz írt számok összegét!

3. Egyenlő nevezőjű racionális törtek összeadása és kivonása

Már tudtok egyenlő nevezőjű közönséges törteket összeadni és kivonni. Az ide vonatkozó szabályok rövid matematikai felírása:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}, \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}.$$

E szabály szerint adjuk össze, illetve vonjuk ki egymásból az egyenlő nevezőjű racionális törteket is.

Egyenlő nevezőjű törteket úgy adunk össze, hogy számlálóikat összeadjuk, a nevezőt pedig változatlanul hagyjuk.

Egyenlő nevezőjű törteket úgy vonunk ki, hogy az első tört számlálójából kivonjuk a második tört számlálóját, a nevezőt pedig változatlanul hagyjuk.

1. PÉLDA

Végezzétek el a kivonást:

$$1) \frac{7x-5}{8x^2} - \frac{3x-5}{8x^2}; \quad 2) \frac{y^2+2y}{y^2-25} - \frac{12y-25}{y^2-25}; \quad 3) \frac{4}{2a-1} - \frac{2a-3}{1-2a}!$$

Megoldás

$$1) \frac{7x-5}{8x^2} - \frac{3x-5}{8x^2} = \frac{7x-5-(3x-5)}{8x^2} = \frac{7x-5-3x+5}{8x^2} = \frac{4x}{8x^2} = \frac{1}{2x}.$$

$$2) \frac{y^2+2y}{y^2-25} - \frac{12y-25}{y^2-25} = \frac{y^2+2y-(12y-25)}{y^2-25} = \frac{y^2+2y-12y+25}{y^2-25} = \\ = \frac{y^2-10y+25}{y^2-25} = \frac{(y-5)^2}{(y+5)(y-5)} = \frac{y-5}{y+5}.$$

$$3) \frac{4}{2a-1} - \frac{2a-3}{1-2a} = \frac{4}{2a-1} - \frac{2a-3}{-(2a-1)} = \frac{4}{2a-1} + \frac{2a-3}{2a-1} = \\ = \frac{4+2a-3}{2a-1} = \frac{2a+1}{2a-1}!$$

2. PÉLDA

Határozzuk meg a $\frac{2m+n}{m}$ kifejezés értékét, ha tudjuk, hogy $\frac{m}{n} = -3$!

1. §. RACIONÁLIS KIFEJEZÉSEK

Megoldás

Felírjuk a törtet egész része és törtresze összegeként:

$$\frac{2m+n}{m} = \frac{2m}{m} + \frac{n}{m} = 2 + \frac{n}{m}.$$

Ha $\frac{m}{n} = -3$, akkor $\frac{n}{m} = -\frac{1}{3}$. Tehát

$$\frac{2m+n}{m} = 2 + \frac{n}{m} = 2 - \frac{1}{3} = 1\frac{2}{3}.$$

3. PÉLDA

Határozzuk meg az n összes olyan természetes értékét, amely mellett a $\frac{2n^2+3n-15}{n}$ kifejezés értéke egész szám lesz!

Megoldás

Felírjuk a törtet egész és tört részének különbségeként:

$$\frac{2n^2+3n-15}{n} = \frac{2n^2}{n} + \frac{3n}{n} - \frac{15}{n} = 2n + 3 - \frac{15}{n}.$$

A $2n + 3$ kifejezés bármilyen természetes n szám esetén természetes értéket vesz fel. A $2n + 3 - \frac{15}{n}$ kifejezés akkor vesz fel egész értéket, ha a $\frac{15}{n}$ kifejezés értéke egész szám lesz. Ez csak a következő n értékek esetén lehet: 1, 3, 5, 15.

F e l l e t: $n = 1$ vagy $n = 3$ vagy $n = 5$ vagy $n = 15$.



1. Hogyan adunk össze egyenlő nevezőjű racionális törteteket?
2. Hogyan vonunk ki egymásból egyenlő nevezőjű racionális törteteket?

68.° Végezzétek el a műveleteket:

1) $\frac{x}{6} + \frac{y}{6};$

5) $\frac{m+n}{6} - \frac{m-2n}{6};$

2) $\frac{a}{3} - \frac{b}{3};$

6) $\frac{2a-3b}{6ab} + \frac{9b-2a}{6ab};$

3) $\frac{m}{n} + \frac{4m}{n};$

7) $-\frac{5c+4d}{cd} + \frac{4d+9c}{cd};$

4) $\frac{6c}{d} - \frac{2c}{d};$

8) $\frac{8m+3}{10m^2} - \frac{2m+3}{10m^2};$

69.° Írjátok fel tört alakban a kifejezést:

1) $\frac{7k}{18p} - \frac{4k}{18p};$

2) $\frac{a-b}{2b} - \frac{a}{2b};$

3. Egyenlő nevezőjű racionális törtek összeadása és kivonása

$$3) -\frac{a-12b}{27a} + \frac{a+15b}{27a};$$

$$5) \frac{10a+6b}{11a^3} - \frac{6b-a}{11a^3};$$

$$4) \frac{x-7y}{xy} - \frac{x-4y}{xy};$$

$$6) \frac{x^2-xy}{x^2y} + \frac{2xy-3x^2}{x^2y}!$$

70.° Hozzátok egyszerűbb alakra a kifejezést:

$$1) \frac{a^2}{a+3} - \frac{9}{a+3};$$

$$4) \frac{5x+9}{x^2-1} - \frac{4x+8}{x^2-1};$$

$$2) \frac{t}{t^2-16} - \frac{4}{t^2-16};$$

$$5) \frac{b^2}{b+10} + \frac{20b+100}{b+10};$$

$$3) \frac{m^2}{(m-5)^2} - \frac{25}{(m-5)^2};$$

$$6) \frac{c^2}{c-7} - \frac{14c-49}{c-7}!$$

71.° Egyszerűsítetek a kifejezést:

$$1) \frac{c^2}{c-9} - \frac{81}{c-9};$$

$$3) \frac{3x+5}{x^2-4} - \frac{2x+7}{x^2-4};$$

$$2) \frac{a^2}{(a-6)^2} - \frac{36}{(a-6)^2};$$

$$4) \frac{y^2}{y-2} - \frac{4y-4}{y-2}!$$

72.° Végezzétek el a műveleteket:

$$1) \frac{a+b}{c-7} + \frac{a}{7-c};$$

$$4) \frac{81b^2}{9b-a} + \frac{a^2}{a-9b};$$

$$2) \frac{5m}{m-n} + \frac{5n}{n-m};$$

$$5) \frac{t^2}{3t-6} + \frac{4}{6-3t};$$

$$3) \frac{2x-4y}{x-3y} - \frac{4x-14y}{3y-x};$$

$$6) \frac{y^2}{y-1} - \frac{1-2y}{1-y}!$$

73.° Egyszerűsítetek a kifejezést:

$$1) \frac{x}{y-1} + \frac{2}{1-y};$$

$$3) \frac{3m+2n}{2m-3n} - \frac{m-8n}{3n-2m};$$

$$2) \frac{3c}{c-d} + \frac{3d}{d-c};$$

$$4) \frac{b^2}{2b-14} + \frac{49}{14-2b}!$$

74.° Határozzátok meg a kifejezés értékét:

$$1) \frac{a^2-48}{a-8} - \frac{16}{a-8}, \text{ ha } a = 32;$$

$$2) \frac{c^2+3c+7}{c^3-8} + \frac{c+3}{8-c^3}, \text{ ha } c = -3!$$

75.° Határozzátok meg a kifejezés értékét:

$$1) \frac{5x+3}{x^2-16} + \frac{6x-1}{16-x^2}, \text{ ha } x = -4,1;$$

$$2) \frac{a^2+a}{a^2-9} - \frac{7a-9}{a^2-9}, \text{ ha } a = 7!$$

76.° Egyszerűsítsétek a kifejezést:

$$1) \frac{5n-1}{20n} - \frac{7n-8}{20n} - \frac{8n+7}{20n}; \quad 3) \frac{3k}{k^3-1} + \frac{4k+1}{1-k^3} + \frac{k^2}{1-k^3}!$$

$$2) \frac{9m+2}{m^2-4} - \frac{m-9}{4-m^2} + \frac{1-7m}{m^2-4};$$

77.° Egyszerűsítsétek a kifejezést:

$$1) \frac{6a-1}{16a-8} + \frac{4a-7}{16a-8} + \frac{-2a-2}{8-16a};$$

$$2) \frac{2a^2+12a}{a^2-25} + \frac{8a-9}{25-a^2} - \frac{a^2+14a-16}{a^2-25}!$$

78.° Adjátok meg tört alakban a kifejezést:

$$1) \frac{15-8a}{(a-1)^2} - \frac{14-7a}{(1-a)^2}; \quad 3) \frac{m^2-8n}{(m-2)(n-5)} - \frac{2m-8n}{(2-m)(5-n)}!$$

$$2) \frac{3b^2+12}{(b-2)^3} + \frac{12b}{(2-b)^3};$$

79.° Egyszerűsítsétek a kifejezést:

$$1) \frac{x^2-16x}{(x-7)^4} + \frac{2x+49}{(7-x)^4}; \quad 2) \frac{y^2+y}{(y-6)(y+2)} + \frac{y+36}{(6-y)(2+y)}!$$

80.° Bizonyítsátok be az azonosságot:

$$1) \frac{(a+b)^2}{4ab} - \frac{(a-b)^2}{4ab} = 1; \quad 2) \frac{(a+b)^2}{a^2+b^2} + \frac{(a-b)^2}{a^2+b^2} = 2!$$

81.° Bizonyítsátok be, hogy az x változó minden megengedett értékénél

a $\frac{12x-25}{20x-15} + \frac{8x+10}{20x-15}$ kifejezés helyettesítési értéke nem függ az x értékétől!

82.° Bizonyítsátok be, hogy az y változó minden megengedett értékénél

a $\frac{17y+5}{21y-3} - \frac{9-11y}{21y-3}$ kifejezés helyettesítési értéke nem függ az y értékétől!

83.° Bizonyítsátok be, hogy a változó minden megengedett értékénél

az $\frac{a^2-6}{(a-2)^4} - \frac{7a-4}{(a-2)^4} + \frac{3a+6}{(a-2)^4}$ kifejezés helyettesítési értéke pozitív!

84.° Bizonyítsátok be, hogy a változó minden megengedett értékénél

a $\frac{2-b^2}{(b-5)^6} - \frac{7-3b}{(b-5)^6} + \frac{7b-20}{(b-5)^6}$ kifejezés helyettesítési értéke negatív!

3. Egyenlő nevezőjű racionális törtek összeadása és kivonása

85.** Adjátok meg az adott törtet egész és törtrészükk összegeként vagy különbségeként:

1) $\frac{x+3}{x}$;

2) $\frac{a^2-2a-5}{a-2}$!

86.** Adjátok meg az adott törtet egész és törtrészükk összegeként vagy különbségeként:

1) $\frac{4a-b}{a}$;

2) $\frac{b^2+7b+3}{b+7}$!

87.** Határozzátok meg a kifejezés értékét, ha $\frac{x}{y}=4$:

1) $\frac{y}{x}$;

2) $\frac{2x-3y}{y}$;

3) $\frac{x^2+y^2}{xy}$!

88.** Határozzátok meg a kifejezés értékét, ha $\frac{a}{b}=-2$:

1) $\frac{a-b}{a}$;

2) $\frac{4a+5b}{b}$;

3) $\frac{a^2-2ab+b^2}{ab}$!

89.** Határozzátok meg az n összes olyan értékét, amelynél az alábbi kifejezés helyettesítési értéke pozitív szám:

1) $\frac{n+6}{n}$;

2) $\frac{3n^2-4n-14}{n}$;

3) $\frac{4n+7}{2n-3}$!

90.** Határozzátok meg az n összes olyan értékét, amelynél az alábbi kifejezés helyettesítési értéke pozitív szám:

1) $\frac{8n-9}{n}$;

2) $\frac{n^2+2n-8}{n}$;

3) $\frac{9n-4}{3n-5}$!

ISMÉTLŐ FELADATOK

91. Az egymástól 9 km távolságra lévő két faluból egyszerre, egymással szemben két kerékpáros indult el. 20 perc múlva találkoztak. Ha a kerékpárosok azonos irányba haladnának, akkor az egyik a másikat 3 óra múlva érné utól. Határozzátok meg a kerékpárosok sebességét!

92. Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $1 - 4(x + 1) = 1,8 - 1,6x$;

2) $3(0,5x - 4) + 8,5x = 10x - 11$!

93. Bizonyítsátok be, hogy az a változó minden megengedett értékénél az $(a+4)(a-8) + 4(2a+9)$ kifejezés helyettesítési értéke nem negatív!

FELKÉSZÜLÉS AZ ÚJ TÉMÁHOZ

94. A csillagot helyettesítsétek olyan egytagú kifejezéssel, hogy az egyenlőség igaz legyen:

1) $a^2b \cdot * = a^2b^2$; 2) $5xy^3 \cdot * = 10x^4y^6$; 3) $6x^5 \cdot * = 12x^{10}$!

95. A csillagot helyettesítsétek olyan többtagú kifejezéssel, hogy az egyenlőség igaz legyen:

1) $* \cdot (a - b) = (a + b)(a - b)^2$;

2) $(a + 10b) \cdot * = a^3 - 100ab^2$!

96. Hozzátok közös nevezőre a törteket:

1) $\frac{1}{3a}$ és $\frac{2}{3b}$;

4) $\frac{6x}{x-2y}$ és $\frac{y}{x+y}$;

2) $\frac{4m}{p^3q^2}$ és $\frac{3n}{p^2q^3}$;

5) $\frac{y}{6y-36}$ és $\frac{1}{y^2-6y}$;

3) $\frac{5}{m-n}$ és $\frac{6}{m+n}$;

6) $\frac{1}{a^2-1}$ és $\frac{1}{a^2+a}$!

NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREK HASZNÁLATA

97. Előfordulhat-e, hogy egy páros számnak több páratlan osztója legyen, mint páros?

4. Különböző nevezőjű racionális törtek összeadása és kivonása

A különböző nevezőjű törtek összeadása és kivonása a törtek alaptulajdonságának felhasználásával egyenlő nevezőjű törtek összeadására és kivonására vezethető vissza.

Adjuk össze $\frac{A}{B}$ és $\frac{C}{D}$ racionális törteket!

Felírhatjuk, hogy: $\frac{A}{B} = \frac{A \cdot D}{B \cdot D}$; $\frac{C}{D} = \frac{C \cdot B}{D \cdot B}$.

Akkor $\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{A \cdot D}{B \cdot D} + \frac{C \cdot B}{D \cdot B} = \frac{A \cdot D + C \cdot B}{B \cdot D}$.

Közös nevezőül a törtek nevezőinek szorzatát választottuk.

4. Különböző nevezőjű racionális törtek összeadása és kivonása

Megjegyezzük, hogy a nevezők szorzata nem mindig a legal-
kalmasabb közös nevező.

A közönséges törték közös nevezőjének meghatározásakor először a nevezőket tényezőkre bontottuk, majd megkerestük legkisebb közös többszörösüket. Hasonlóképpen járunk el a racionális törték közös nevezőjének meghatározásakor is.

Nyilvánvaló, hogy két racionális tört összege, illetve különbsége szintén racionális tört lesz.

1. PÉLDA

Hozzuk egyszerűbb alakra a kifejezéseket:

$$1) \frac{b+1}{abc} + \frac{1-a}{a^2c};$$

4) $\frac{2a}{25-10a+a^2} - \frac{1}{3a-15}$;

$$2) \frac{m}{7m+7n} - \frac{n}{7m-7n};$$

5) $\frac{x}{x-4} - \frac{x+2}{x-2}$!

3) $\frac{10n+14}{n^2-49} + \frac{6}{7-n}$;

Megoldás

1) A törtek közös nevezője az a^2bc egytagú kifejezés.

Vagyis

$$\frac{\overset{a}{\cancel{a}}b+1}{abc} + \frac{\overset{b}{\cancel{b}}1-a}{a^2c} = \frac{ab+a+b-ab}{a^2bc} = \frac{a+b}{a^2bc}$$

2) A törtek nevezőit először tényezőkre bontjuk, majd azt kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} \frac{m}{7m+7n} - \frac{n}{7m-7n} &= \frac{\cancel{m-n}}{7(\cancel{m}+n)} - \frac{\cancel{m+n}}{7(\cancel{m}-n)} = \frac{m(m-n)-n(m+n)}{7(m+n)(m-n)} = \\ &= \frac{m^2 - mn - mn - n^2}{7(m^2 - n^2)} = \frac{m^2 - 2mn - n^2}{7(m^2 - n^2)}. \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned} \frac{10n+14}{n^2-49} + \frac{6}{7-n} &= \frac{10n+14}{(n-7)(n+7)} - \frac{n+7}{n-7} = \frac{10n+14-6(n+7)}{(n-7)(n+7)} \\ &= \frac{10n+14-6n-42}{(n-7)(n+7)} = \frac{4n-28}{(n-7)(n+7)} = \frac{4(n-7)}{(n-7)(n+7)} = \frac{4}{n+7}. \end{aligned}$$

$$4) \quad \frac{2a}{25-10a+a^2} - \frac{1}{3a-15} = \frac{2a}{(5-a)^2} - \frac{1}{3(a-5)} = \frac{2a}{(a-5)^2} - \frac{1}{3(a-5)} = \frac{6a-a+5}{3(a-5)^2} = \frac{5a+5}{3(a-5)^2}.$$

1. §. RACIONÁLIS KIFEJEZÉSEK

- 5) Ebben az esetben a közös nevező a törték nevezőinek szorzata lesz. Ekkor

$$\frac{\overset{x-2}{x}}{x-4} - \frac{\overset{x-4}{x+2}}{x-2} = \frac{x(x-2) - (x+2)(x-4)}{(x-4)(x-2)} =$$

$$= \frac{x^2 - 2x - x^2 + 4x - 2x + 8}{(x-4)(x-2)} = \frac{8}{(x-4)(x-2)}.$$

2. PÉLDA

Adjuk meg tört alakban a $\frac{21c^2}{7c-2} - 3c$ kifejezést!

Megoldás

A $3c$ kifejezést 1 nevezőjű tört alakban megadva, azt kapjuk, hogy:

$$\frac{21c^2}{7c-2} - 3c = \frac{21c^2}{7c-2} - \frac{\overset{7c-2}{3c}}{1} = \frac{21c^2 - 21c^2 + 6c}{7c-2} = \frac{6c}{7c-2}.$$



1. Hogyan adunk össze, illetve vonunk ki egymásból különböző nevezőjű törtet?
2. Milyen kifejezés lesz két racionális tört összege, illetve különbsége?

98.° Adjátok meg tört alakban a kifejezést:

- | | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|---------------------------------------|
| 1) $\frac{x}{4} + \frac{2x}{3};$ | 4) $\frac{4}{x} - \frac{3}{y};$ | 7) $\frac{a}{b^2} + \frac{1}{ab^4};$ |
| 2) $\frac{5b}{14} - \frac{b}{7};$ | 5) $\frac{m}{4n} + \frac{m}{6n};$ | 8) $\frac{11}{5a} - \frac{2c}{15ab};$ |
| 3) $\frac{m}{8} - \frac{n}{6};$ | 6) $\frac{c}{b} - \frac{d}{3b};$ | 9) $\frac{m}{abc} + \frac{c}{abm};$ |

99.° Adjátok meg tört alakban a kifejezést:

- | | | |
|----------------------------------|-------------------------------------|---|
| 1) $\frac{x}{8} - \frac{y}{12};$ | 3) $\frac{m}{n} - \frac{n}{m};$ | 5) $\frac{7}{cd} + \frac{k}{cp};$ |
| 2) $\frac{4a}{7} + \frac{a}{4};$ | 4) $\frac{x^2}{2y} + \frac{y}{8x};$ | 6) $\frac{6a}{35c^5} - \frac{9b}{14c^2};$ |

100.° Hozzátok egyszerűbb alakra a kifejezést:

- | | |
|--|--|
| 1) $\frac{a+7}{12} + \frac{a-4}{9};$ | 4) $\frac{6p+1}{p} - \frac{2p+8}{3p};$ |
| 2) $\frac{2b-7c}{6} - \frac{3b+2c}{15};$ | 5) $\frac{5m-n}{14m} - \frac{m-6n}{7m};$ |
| 3) $\frac{3x-2}{x} - \frac{3y-1}{y};$ | 6) $\frac{x+4}{11x} - \frac{y-3}{11y};$ |

4. Különböző nevezőjű racionális törték összeadása és kivonása

$$7) \frac{a+b}{ab} + \frac{a-c}{ac};$$

$$10) \frac{x-y}{x^3} - \frac{y-x^2}{x^2y};$$

$$8) \frac{2}{p^2} + \frac{p-1}{p};$$

$$11) \frac{2m-3n}{m^2n} + \frac{7m-2n}{mn^2};$$

$$9) \frac{k+4}{k} - \frac{3k-4}{k^2};$$

$$12) \frac{c+d}{cd^4} - \frac{c^2-8d}{c^3d^3};$$

101.° Végezzétek el a törték összeadását és kivonását:

$$1) \frac{9-5b}{b} - \frac{7-5c}{c};$$

$$5) \frac{6a+2}{ab} - \frac{2a+4}{a^2b};$$

$$2) \frac{4d+7}{7d} - \frac{d-6}{6d};$$

$$6) \frac{c^2-16}{c^6} - \frac{c-9}{c^5};$$

$$3) \frac{5-k}{5p} - \frac{p+10}{5k};$$

$$7) \frac{1}{x^3} - \frac{1+x^2}{x^5};$$

$$4) \frac{m-n}{mn} - \frac{p-n}{np};$$

$$8) \frac{1-ab}{abc} - \frac{1-ad}{acd};$$

102.° Végezzétek el a műveleteket:

$$1) \frac{2}{x} + \frac{3x-2}{x+1};$$

$$3) \frac{a}{a-3} - \frac{3}{a+3};$$

$$5) \frac{x}{2y+1} - \frac{x}{3y-2};$$

$$2) \frac{m}{n} - \frac{m}{m+n};$$

$$4) \frac{c}{3c-1} - \frac{c}{3c+1};$$

$$6) \frac{a-b}{b} - \frac{a-b}{a+b};$$

103.° Alakítsátok át a kifejezéseket törtékké:

$$1) \frac{a}{a-b} + \frac{a}{b};$$

$$2) \frac{4}{x} - \frac{5x+4}{x+2};$$

$$3) \frac{b}{b-2} - \frac{2}{b+2};$$

104.° Egyszerűsítsétek a kifejezéseket:

$$1) \frac{1}{b(a-b)} - \frac{1}{a(a-b)};$$

$$4) \frac{y}{2(y+3)} - \frac{y}{5(y+3)};$$

$$2) \frac{5}{a} + \frac{30}{a(a-6)};$$

$$5) \frac{5m+3}{2(m+1)} - \frac{7m+4}{3(m+1)};$$

$$3) \frac{3}{x-2} - \frac{2x+2}{x(x-2)};$$

$$6) \frac{c-a}{a(a+b)} + \frac{c+b}{b(a+b)};$$

105.° Végezzétek el a műveleteket:

$$1) \frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{b(a+b)};$$

$$3) \frac{x}{5(x+7)} - \frac{x}{6(x+7)};$$

$$2) \frac{4}{b} - \frac{8}{b(b+2)};$$

$$4) \frac{4n+2}{3(n-1)} - \frac{5n+3}{4(n-1)};$$

106.° Végezzétek el a törték összeadását vagy kivonását:

$$1) \frac{a}{a-2} - \frac{3a+1}{3a-6};$$

$$3) \frac{2}{c+1} - \frac{c-1}{c^2+c};$$

$$2) \frac{18}{b^2+3b} - \frac{6}{b};$$

$$4) \frac{d-1}{2d-8} + \frac{d}{d-4};$$

1. §. RACIONÁLIS KIFEJEZÉSEK

$$5) \frac{m+1}{3m-15} - \frac{m-1}{2m-10};$$

$$7) \frac{a^2+2}{a^2+2a} - \frac{a+4}{2a+4};$$

$$6) \frac{m-2n}{6m+6n} - \frac{m-3n}{4m+4n};$$

$$8) \frac{3x-4y}{x^2-2xy} - \frac{3y-x}{xy-2y^2}!$$

107.° Egyszerűsítsék a kifejezéseket:

$$1) \frac{b}{b-5} - \frac{4b-1}{4b-20};$$

$$4) \frac{a^2+b^2}{2a^2+2ab} + \frac{b}{a+b};$$

$$2) \frac{2}{m} - \frac{16}{m^2+8m};$$

$$5) \frac{b+4}{ab-b^2} - \frac{a+4}{a^2-ab};$$

$$3) \frac{a-2}{2a-6} - \frac{a-1}{3a-9};$$

$$6) \frac{c-4}{4c+24} + \frac{4c+9}{c^2+6c}!$$

108.° Végezzék el a műveleteket:

$$1) \frac{3}{x+3} + \frac{x+4}{x^2-9};$$

$$4) \frac{3a+b}{a^2-b^2} + \frac{1}{a+b};$$

$$2) \frac{a^2}{a^2-64} - \frac{a}{a-8};$$

$$5) \frac{m}{m+5} - \frac{m^2}{m^2+10m+25};$$

$$3) \frac{6b}{9b^2-4} - \frac{1}{3b-2};$$

$$6) \frac{b}{a+b} - \frac{b^2}{a^2+b^2+2ab}!$$

109.° Egyszerűsítsék a kifejezéseket:

$$1) \frac{4x-y}{x^2-y^2} + \frac{1}{x-y};$$

$$3) \frac{10a}{25a^2-9} - \frac{1}{5a+3};$$

$$2) \frac{y^2}{y^2-81} - \frac{y}{y+9};$$

$$4) \frac{n}{n-7} - \frac{n^2}{n^2-14n+49}!$$

110.° Adjátok meg tört alakban a kifejezést:

$$1) \frac{a}{b} + 1;$$

$$5) 2 - \frac{3b+2a}{a};$$

$$2) \frac{x}{y} - x;$$

$$6) \frac{3b+4}{b-2} - 3;$$

$$3) \frac{m}{n} + \frac{n}{m} + 2;$$

$$7) 6m - \frac{12m^2+1}{2m};$$

$$4) \frac{9}{p^2} - \frac{4}{p} + 3;$$

$$8) \frac{20b^2+5}{2b-1} - 10b!$$

111.° Végezzék el a műveleteket:

$$1) a - \frac{4}{a};$$

$$4) \frac{2k^2}{k-5} - k;$$

$$2) \frac{1}{x} + x - 2;$$

$$5) 3n - \frac{9n^2-2}{3n};$$

$$3) \frac{m}{n^3} - \frac{1}{n} + m;$$

$$6) 5 - \frac{4y-12}{y-2}!$$

112.* Egyszerűsítsétek a kifejezéseket:

$$1) \frac{a^2+1}{a^2-2a+1} + \frac{a+1}{a-1};$$

$$5) \frac{a}{a^2-4a+4} - \frac{a+4}{a^2-4};$$

$$2) \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} - \frac{a-b}{a+b};$$

$$6) \frac{2p}{p-5} - \frac{5}{p+5} + \frac{2p^2}{25-p^2};$$

$$3) \frac{c+7}{c-7} + \frac{28c}{49-c^2};$$

$$7) \frac{1}{y} - \frac{y+8}{16-y^2} - \frac{2}{y-4};$$

$$4) \frac{5a+3}{2a^2+6a} + \frac{6-3a}{a^2-9};$$

$$8) \frac{2b-1}{4b+2} + \frac{4b}{4b^2-1} + \frac{2b+1}{3-6b}!$$

113.* Egyszerűsítsétek a kifejezéseket:

$$1) \frac{m+n}{m-n} - \frac{m^2+n^2}{m^2-n^2};$$

$$4) \frac{b-2}{b^2+6b+9} - \frac{b}{b^2-9};$$

$$2) \frac{x-y}{x+y} + \frac{y^2}{2xy+x^2+y^2};$$

$$5) \frac{x-6}{x^2+3x} + \frac{x}{x+3} - \frac{x-3}{x};$$

$$3) \frac{2a}{4a^2-1} - \frac{a+4}{2a^2+a};$$

$$6) \frac{y+2}{y-2} - \frac{y-2}{y+2} - \frac{16}{y^2-4}!$$

114.* Bizonyítsátok be, hogy a változó minden megengedett értékénél az adott kifejezés helyettesítési értéke nem függ a változó értékétől:

$$1) \frac{2x+1}{2x-4} + \frac{2x-1}{6-3x} - \frac{x+7}{6x-12};$$

$$2) \frac{24-2a}{a^2-16} - \frac{a}{2a-8} + \frac{4}{a+4}!$$

115.* Adjátok meg tört alakban a kifejezést:

$$1) 1-a + \frac{a^2-2}{a+2};$$

$$3) \frac{c^2+9}{c-3} - c-3;$$

$$2) \frac{a^2-b^2}{3a+b} + 3a-b;$$

$$4) \frac{8m^2}{4m-3} - 2m-1!$$

116.* Egyszerűsítsétek a kifejezéseket:

$$1) b+7 - \frac{14b}{b+7};$$

$$2) 5c - \frac{10-29c+10c^2}{2c-5} + 2!$$

117.* Egyszerűsítsétek a kifejezéseket, majd határozzátok meg az értékét:

$$1) \frac{7}{2a-4} - \frac{12}{a^2-4} - \frac{3}{a+2}, \text{ ha } a = 5;$$

$$2) \frac{2c+3}{2c^2-3c} + \frac{2c-3}{2c^2+3c} - \frac{16c}{4c^2-9}, \text{ ha } c = -0,8;$$

$$3) \frac{m^2+16n^2}{m^2-16n^2} - \frac{m+4n}{2m-8n}, \text{ ha } m = 3, n = 0,5!$$

118.* Határozzátok meg a kifejezés értékét:

$$1) \frac{6}{5x-20} - \frac{x-5}{x^2-8x+16}, \text{ ha } x = 5;$$

$$2) \frac{2y-1}{2y} - \frac{2y}{2y-1} - \frac{1}{2y-4y^2}, \text{ ha } y = -2\frac{3}{7}!$$

119.* Bizonyítsátok be az azonosságot:

$$1) \frac{a+b}{a} - \frac{a}{a-b} + \frac{b^2}{a^2-ab} = 0; \quad 3) \frac{2a^2+4}{a^2-1} - \frac{a-2}{a+1} - \frac{a+1}{a-1} = \frac{1}{a-1}!$$

$$2) \frac{a+3}{a+1} - \frac{a+1}{a-1} + \frac{6}{a^2-1} = \frac{2}{a^2-1};$$

120.* Bizonyítsátok be az azonosságot:

$$1) \frac{1}{6a-4b} - \frac{1}{6a+4b} - \frac{3a}{4b^2-9a^2} = \frac{1}{3a-2b};$$

$$2) \frac{c+2}{c^2+3c} - \frac{1}{3c+9} - \frac{2}{3c} = 0!$$

121.* Határozzátok meg a törtek különbségét:

$$1) \frac{a+1}{a^3-1} - \frac{1}{a^2+a+1}; \quad 2) \frac{1}{b+3} - \frac{b^2-6b}{b^3+27}!$$

122.* Hozzátok egyszerűbb alakra a kifejezést:

$$1) \frac{9m^2-3mn+n^2}{3m-n} - \frac{9m^2+3mn+n^2}{3m+n};$$

$$2) 1 - \frac{2b-1}{4b^2-2b+1} - \frac{2b}{2b+1}!$$

123.* Bizonyítsátok be az azonosságot:

$$\frac{3a^2+24}{a^3+8} - \frac{6}{a^2-2a+4} - \frac{1}{a+2} = \frac{2}{a+2}!$$

124.** Egyszerűsítsétek a kifejezéseket:

$$1) \frac{4b}{a^2-b^2} + \frac{a-b}{a^2+ab} - \frac{a+b}{b^2-ab};$$

$$2) \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} - \frac{x}{x^2-4} + \frac{x^2+4}{8x-2x^3};$$

$$3) \frac{1}{(a-5b)^2} - \frac{2}{a^2-25b^2} + \frac{1}{(a+5b)^2};$$

$$4) \frac{x^2+9x+18}{xy+3y-2x-6} - \frac{x+5}{y-2}!$$

125.** Bizonyítsátok be az azonosságot:

$$1) \frac{a+3}{a^2-3a} + \frac{a-3}{3a+9} + \frac{12}{9-a^2} = \frac{a-3}{3a};$$

$$2) \frac{b-4}{2a-1} - \frac{b^2-2b-24}{2ab-4-b+8a} = \frac{2}{2a-1}!$$

4. Különböző nevezőjű racionális törtek összeadása és kivonása

126.** Bizonyítsátok be az azonosságot:

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)} - \frac{1}{(a-b)(b-c)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)} = 0!$$

127.** Bizonyítsátok be az azonosságot:

$$\frac{bc}{(a-b)(a-c)} + \frac{ac}{(b-a)(b-c)} + \frac{ab}{(c-a)(c-b)} = 1!$$

128* Egyszerűsítétek a kifejezést:

$$\frac{1}{(a-1)(a-2)} + \frac{1}{(a-2)(a-3)} + \frac{1}{(a-3)(a-4)}!$$

129.* Egyszerűsítétek a kifejezést:

$$\frac{1}{(a-1)(a-3)} + \frac{1}{(a-3)(a-5)} + \frac{1}{(a-5)(a-7)}!$$

130.* Bizonyítsátok be az azonosságot:

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1+a} + \frac{2}{1+a^2} + \frac{4}{1+a^4} + \frac{8}{1+a^8} + \frac{16}{1+a^{16}} = \frac{32}{1-a^{32}}!$$

131.* Bizonyítsátok be az azonosságot:

$$\frac{3}{1-a^2} + \frac{3}{1+a^2} + \frac{6}{1+a^4} + \frac{12}{1+a^8} + \frac{24}{1+a^{16}} = \frac{48}{1-a^{32}}!$$

132.* Bizonyítsátok be, ha $\frac{a-c}{b+c} + \frac{b-a}{a+c} + \frac{c-b}{a+b} = 1$, akkor

$$\frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{a+c} + \frac{a+c}{a+b} = 4!$$

ISMÉTLŐ FELADATOK :

133. Határozzátok meg az egyenlet gyökét:

$$1) \frac{x}{3} + \frac{x-1}{2} = 4;$$

$$2) \frac{x-4}{2} - \frac{x-1}{5} = 3!$$

134. Oldjátok meg az egyenletrendszert:

$$1) \begin{cases} x+y=8, \\ 3x-2y=9; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2x+5y=13, \\ 3x-5y=-13! \end{cases}$$

135. A háromnapos kerékpárverseny első napján a versenyzők a teljes út $\frac{4}{15}$ részét, a másodikon $-\frac{2}{5}$ részét, a harmadikon pedig a hátralévő 90 km-t tették meg. Mekkora távolságot tettek meg a kerékpárosok 3 nap alatt?

136. (Bolgár népi feladat.) Öt testvér úgy akart elosztani egymás között 20 bárányt, hogy mindegyiküknek páratlan számú állat jusson. Lehetséges-e így osztozkodni?

1. §. RACIONÁLIS KIFEJEZÉSEK

137. Igaz-e az alábbi állítás: az n bármely természetes értékénél az $(5n + 7)^2 - (n - 1)^2$ kifejezés maradék nélkül osztható 48-cal?

FELKÉSZÜLÉS AZ ÚJ TÉMÁHOZ

138. Adjátok meg a szám reciprokl értékét:

1) $\frac{5}{8}$; 2) 7; 3) $-3\frac{5}{6}$; 4) $\frac{1}{14}$; 5) 0,12!

139. Határozzátok meg a szorzatot:

1) $\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{20}$; 2) $6 \cdot \frac{7}{18}$; 3) $\frac{3}{8} \cdot (-2\frac{2}{3})!$

140. Végezzétek el az osztást:

1) $\frac{5}{18} : (-\frac{25}{27})$; 2) $8 : \frac{4}{17}$; 3) $-\frac{8}{15} : (-24)$; 4) $1\frac{3}{5} : 5\frac{1}{3}!$

141. Határozzátok meg a hatvány értékét:

1) $(\frac{1}{3})^5$; 2) $(\frac{2}{5})^3$; 3) $(-2\frac{2}{3})^2$; 4) $(-3\frac{1}{3})^3!$

NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREK HASZNÁLATA

142. Egy folyó szemközti partjaitól a vízfolyásra merőlegesen két komp indult el egymással szemben különböző, de állandó sebességgel. A kompok 720 méterre az egyik parttól találkoztak, majd partot érés után megfordultak, és ellenkező irányba folytatták útjukat. Ezúttal 400 méterre találkoztak a másik parttól. Mekkora a folyó szélessége?

ELLENŐRIZZÉTEK MAGATOKAT! 1. SZ. TESZTFELADAT

1. Melyik egész kifejezés az alábbiak közül?

A) $\frac{m+n}{m}$; B) $\frac{m+n}{7}$; C) $\frac{m+n}{7m}$; D) $m + \frac{n}{7m}$.

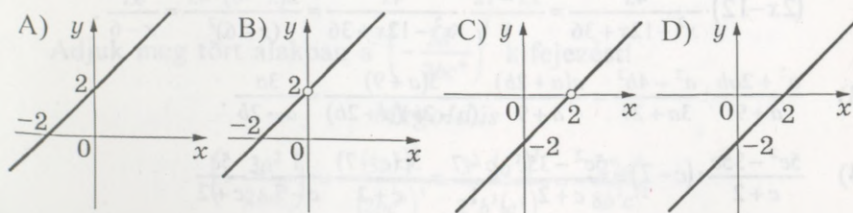
2. A változó mely értékei esetén nincs értelmezve a $\frac{3a}{2a-10}$ kifejezés?

A) 0; B) 10; C) 5; D) 0; 5.

3. A változó mely értékei esetén nincs értelmezve az $y = \frac{x+2}{x^2-1}$ függvény?

A) -1; 1; B) 1; C) -2; -1; 1; D) -2; 1.

4. Egyszerűsítsék a $\frac{21a^6}{14a^3}$ törtet!
- A) $\frac{3a^3}{2}$; B) $\frac{3a^2}{2}$; C) $\frac{3}{2a^3}$; D) $\frac{3}{2a^2}$.
5. Melyik alábbi törttel azonosan egyenlő az $\frac{5b-15}{b^2-9}$ tört?
- A) $\frac{b-3}{5}$; B) $\frac{b+3}{5}$; C) $\frac{5}{b-3}$; D) $\frac{5}{b+3}$.
6. Egyszerűsítsék a $\frac{12c^2-4c}{3c-1}$ törtet!
- A) $4c$; B) $-4c$; C) $\frac{1}{4c}$; D) $-\frac{1}{4c}$.
7. Végezzék el a kivonást: $\frac{5x}{x-2} - \frac{10}{x-2}$!
- A) $\frac{x+2}{x-2}$; B) $\frac{5x+10}{x-2}$; C) 5 ; D) -5 .
8. Végezzék el az összeadást: $\frac{4-m}{m-3} + \frac{2m-5}{3-m}$!
- A) $\frac{m-1}{m-3}$; B) $\frac{1-3m}{m-3}$; C) 3 ; D) -3 .
9. Adjátok meg tört alakban a $\frac{3n^2}{n-6} - 3n$ kifejezést!
- A) $\frac{3n}{n-4}$; B) $\frac{3n}{4-n}$; C) $\frac{18n}{n-6}$; D) $\frac{18}{6-n}$.
10. Hozzátok egyszerűbb alakra a $\frac{2m+1}{3m-2} - \frac{3m^2+m-2}{9m^2-12m+4}$ kifejezést!
- A) $\frac{1}{(3m-2)^2}$; B) $\frac{1}{3m-2}$; C) $\frac{m}{(3m-2)^2}$; D) $\frac{m}{3m-2}$.
11. Egyszerűsítsék az $\frac{a-12}{a^2+4a} - \frac{a-4}{a} + \frac{a}{a+4}$ kifejezést!
- A) $\frac{4}{a}$; B) $\frac{1}{a}$; C) a ; D) $a+4$.
12. Melyik grafikonon ábrázolja az $y = \frac{x^2-4x+4}{x-2}$ függvényt?



5. Racionális törtek szorzása és osztása. Racionális törtek hatványozása

Már ismerjük a közönséges törtek szorzásának és osztásának szabályát, ami matematikai alakban így írható fel.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

Hasonló szabály szerint végezzük el a racionális törtek szorzását és osztását.

Két racionális tört szorzata olyan tört, amelynek számlálója egyenlő a törtek számlálóinak szorzatával, nevezője pedig a törtek nevezőinek szorzatával.

Két racionális tört hányadosa olyan tört, amelynek számlálója egyenlő az első tört számlálójának és a második tört nevezőjének szorzatával, nevezője pedig az első tört nevezőjének és a második tört számlálójának szorzatával.

4. PÉLDA

Végezzük el a műveleteket:

$$1) \frac{21c^6}{b^8} \cdot \frac{b^2}{14c^4};$$

$$3) \frac{a^2+2ab}{a+9} : \frac{a^2-4b^2}{3a+27};$$

$$2) (2x-12) \cdot \frac{4x}{x^2-12x+36};$$

$$4) \frac{5c^2-35c}{c+2} : (c-7)!$$

Megoldás

$$1) \frac{21c^6}{b^8} \cdot \frac{b^2}{14c^4} = \frac{21c^6 \cdot b^2}{b^8 \cdot 14c^4} = \frac{3c^2}{2b^6}.$$

2) Felírjuk a $2x-12$ többitagot, olyan tört alakban, amelynek nevezője 1. Akkor:

$$(2x-12) \cdot \frac{4x}{x^2-12x+36} = \frac{2x-12}{1} \cdot \frac{4x}{x^2-12x+36} = \frac{2(x-6) \cdot 4x}{(x-6)^2} = \frac{8x}{x-6}.$$

$$3) \frac{a^2+2ab}{a+9} : \frac{a^2-4b^2}{3a+27} = \frac{a(a+2b)}{a+9} \cdot \frac{3(a+9)}{(a-2b)(a+2b)} = \frac{3a}{a-2b}.$$

$$4) \frac{5c^2-35c}{c+2} : (c-7) = \frac{5c^2-35c}{c+2} : \frac{c-7}{1} = \frac{5c(c-7)}{c+2} \cdot \frac{1}{c-7} = \frac{5c}{c+2}.$$

Két racionális tört szorzásának szabálya kiterjeszthető három vagy több racionális törtből álló szorzatra is. Három tört esetén például:

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} \cdot \frac{P}{Q} = \frac{A \cdot C \cdot P}{B \cdot D \cdot Q} = \frac{A \cdot C \cdot P}{B \cdot D \cdot Q}.$$

2. PÉLDA

Egyszerűsítsük a $\frac{2a^5}{15b^3} \cdot \frac{10b^2}{7c^4} \cdot \frac{4a^2}{9bc^3}$ kifejezést!

Megoldás

$$\begin{aligned} \frac{2a^5}{15b^3} \cdot \frac{10b^2}{7c^4} \cdot \frac{4a^2}{9bc^3} &= \frac{2a^5}{15b^3} \cdot \frac{10b^2}{7c^4} \cdot \frac{4a^2}{9bc^3} = \frac{2a^5 \cdot 10b^2 \cdot 4a^2}{15b^3 \cdot 7c^4 \cdot 9bc^3} = \\ &= \frac{2 \cdot 10 \cdot 4 \cdot a^5 b^2 a^2}{15 \cdot 7 \cdot 9 \cdot b^3 c^4 b c^3} = \frac{80a^7 b^3 c^7}{945b^4 c^7} = \frac{8a^7}{117b} \end{aligned}$$

A törték szorzási szabályának alkalmazásával meghatározható a racionális törték hatványozásának szabálya. Ha n természetes szám, és $n > 1$, akkor:

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n = \underbrace{\frac{A}{B} \cdot \frac{A}{B} \cdot \dots \cdot \frac{A}{B}}_{n \text{ tényező}} = \frac{\overbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}^{n \text{ tényező}}}{\underbrace{B \cdot B \cdot \dots \cdot B}_{n \text{ tényező}}} = \frac{A^n}{B^n}.$$

Megállapodás szerint $n = 1$ esetén $\left(\frac{A}{B}\right)^1 = \frac{A}{B}$.

Tehát

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A^n}{B^n}, \text{ ahol } n \text{ természetes szám.}$$

Racionális törtet hatványra úgy emelünk, hogy az adott hatványra emeljük mind a számlálót, mind a nevezőt, majd az első eredményt számlálónak, a másikat pedig nevezőként írjuk fel.

3. PÉLDA

Adjuk meg tört alakban a $\left(-\frac{3a^2}{2bc^4}\right)^3$ kifejezést!

Megoldás

$$\left(-\frac{3a^2}{2bc^4}\right)^3 = -\frac{(3a^2)^3}{(2bc^4)^3} = -\frac{3^3 \cdot (a^2)^3}{2^3 b^3 (c^4)^3} = -\frac{27a^6}{8b^3 c^{12}}.$$

1. §. RACIONÁLIS KIFEJEZÉSEK



1. Mit nevezünk két racionális tört szorzatának?
2. Mit nevezünk két racionális tört hányadosának?
3. Hogyan emelünk racionális törtet hatványra?

143.° Az alábbi kifejezések közül melyikkel egyenlő az $\frac{a^3}{c^3} \cdot \frac{c^4}{a^3}$ szorzat?

- 1) $\frac{1}{c^2}$; 2) $\frac{a}{c^2}$; 3) $\frac{1}{c^4}$; 4) $\frac{a}{c^4}$.

144.° Végezzétek el a szorzást:

- 1) $\frac{3a^2}{c} \cdot \frac{a^2}{c}$; 4) $\frac{3m}{16n^2} \cdot 8n^6$; 7) $\frac{48ab}{17c^4} \cdot \frac{51bc^5}{40a^4}$;
 2) $\frac{2a}{b} \cdot \frac{b}{8a}$; 5) $14m^9 \cdot \frac{n^2}{7m^3}$; 8) $\frac{21c^3}{13p^2} \cdot \frac{39p}{28c^2}$!
 3) $\frac{x}{yz} \cdot \frac{y^4}{5x}$; 6) $\frac{15a^4}{b^{12}} \cdot \frac{b^6}{10a^2}$;

145.° Hozzátok egyszerűbb alakra a kifejezést:

- 1) $\frac{a^2}{b^6} \cdot \frac{b^2}{a^2}$; 3) $\frac{a}{2b} \cdot 2a$; 5) $\frac{11x^3}{y^8} \cdot \frac{y^5}{33x^7}$;
 2) $\frac{4m^2}{k^5} \cdot \frac{mk^5}{12}$; 4) $15x^{12} \cdot \frac{y^2}{5x^4}$; 6) $\frac{7k^8}{9mp} \cdot \frac{27m^3}{56k^6p^2}$!

146.° Hozzátok egyszerűbb alakra a kifejezést:

- 1) $\frac{a-b}{3b} \cdot \frac{3}{a-b}$; 6) $\frac{m-2}{m^2-49} \cdot \frac{m+7}{m-2}$;
 2) $\frac{2mn+n^2}{6m} \cdot \frac{2m}{n}$; 7) $(a+4) \cdot \frac{a}{2a+8}$;
 3) $\frac{7a+7b}{b^6} \cdot \frac{b^3}{a+b}$; 8) $\frac{x-9}{4x+8} \cdot \frac{x^2+2x}{x-9}$;
 4) $\frac{32a}{a^2-9} \cdot \frac{a-3}{8a}$; 9) $\frac{4a^2-4a+1}{3a+3} \cdot \frac{a+1}{2a-1}$;
 5) $\frac{c-1}{c+6} \cdot \frac{c+6}{c^2-2c+1}$; 10) $\frac{a^2-25}{4a} \cdot \frac{4a^2}{a^2-5a}$!

147.° Végezzétek el a szorzást:

- 1) $\frac{3a+b}{4c} \cdot \frac{c}{3a+b}$; 4) $\frac{18b}{b^2-16} \cdot \frac{b+4}{3b}$;
 2) $\frac{ab-b^2}{8} \cdot \frac{4a}{b^4}$; 5) $\frac{6}{m^2-9n^2} \cdot (m-3n)$;
 3) $\frac{5x-5y}{x^6} \cdot \frac{x^3}{x-y}$; 6) $\frac{3c-9}{9c^2+6c+1} \cdot \frac{3c+1}{c-3}$!

148.° Az alábbi kifejezések melyikével egyenlő a $\frac{3}{c^3} : \frac{12}{c^9}$ hányados?

- 1) $\frac{c^3}{4}$; 2) $\frac{c^6}{4}$; 3) $4c^3$; 4) $4c^6$.

149.° Végezzétek el az osztást:

- 1) $\frac{8m}{n} : \frac{4m}{n}$; 5) $-\frac{9a}{b^5} : \frac{18a^4}{b^3}$;
 2) $\frac{3b}{8} : b$; 6) $a^2 : \frac{a}{b^3c}$;
 3) $\frac{7c^2}{d} : \frac{c}{d^3}$; 7) $24a^3 : \frac{12a^2}{h}$;
 4) $\frac{6a}{5b} : \frac{3a^2}{20b^2}$; 8) $\frac{36a}{c^3} : (4a^2c)!$

150.° Határozzátok meg a hányadost:

- 1) $\frac{7}{a^2} : \frac{28}{a^8}$; 4) $\frac{6x^{10}}{y^8} : (30x^5y^2)$;
 2) $\frac{b^9}{8} : \frac{b^3}{48}$; 5) $49m^4 : \frac{21m}{n^2}$;
 3) $\frac{27}{m^6} : \frac{36}{m^7n^2}$; 6) $\frac{16x^3y^8}{33z^5} : \left(-\frac{10x^2}{55z^6}\right)!$

151.° Hozzátok egyszerűbb alakra a kifejezést:

- 1) $\frac{a-b}{7a} : \frac{a-b}{7b}$; 5) $\frac{a^2-25}{a+7} : \frac{a-5}{a+7}$;
 2) $\frac{x^2-y^2}{x^2} : \frac{6x+6y}{x^5}$; 6) $\frac{a^2-4a+4}{a+2} : (a-2)$;
 3) $\frac{c-5}{c^2-4c} : \frac{c-5}{5c-20}$; 7) $(p^2-16k^2) : \frac{p+4k}{p}$;
 4) $\frac{x-y}{xy} : \frac{x^2-y^2}{3xy}$; 8) $\frac{a^2-ab}{a^2} : \frac{a^2-2ab+b^2}{ab}!$

152.° Végezzétek el az osztást:

- 1) $\frac{5m-2n}{10k} : \frac{5m-2n}{10k^2}$; 4) $\frac{a^2-16}{a-3} : \frac{a+4}{a-3}$;
 2) $\frac{p+3}{p^2-2p} : \frac{p+3}{4p-8}$; 5) $\frac{y-9}{y-8} : \frac{y^2-81}{y^2-16y+64}$;
 3) $\frac{a^2-b^2}{2ab} : \frac{a+b}{ab}$; 6) $(x^2-49y^2) : \frac{x-7y}{x}!$

153.° Végezzétek el a hatványozást:

- 1) $\left(\frac{a}{b}\right)^9$; 2) $\left(\frac{m}{n^2}\right)^8$; 3) $\left(\frac{c}{2d}\right)^5$;

$$4) \left(\frac{5a^6}{b^5}\right)^2; \quad 5) \left(-\frac{3m^4}{2n^3}\right)^3; \quad 6) \left(-\frac{6a^6}{b^7}\right)^2!$$

154.° Adjátok meg tört alakban a kifejezést:

$$1) \left(\frac{a^6}{b^3}\right)^{10}; \quad 2) \left(-\frac{4m}{9n^3}\right)^2; \quad 3) \left(-\frac{10c^7}{3d^5}\right)^3; \quad 4) \left(\frac{2m^3n^2}{kp^8}\right)^6!$$

155.° Hozzátok egyszerűbb alakra a kifejezést:

$$\begin{aligned} 1) \frac{6a^4b^2}{35c^3} \cdot \frac{14b^2}{a^7c^5} \cdot \frac{5a^3c^8}{18b^4}; & \quad 4) \left(\frac{m^5n}{3p^3}\right)^3 : \frac{m^{10}n^5}{54p^8}; \\ 2) \frac{33m^8}{34n^8} \cdot \frac{88m^4}{51n^4} \cdot \frac{21m^6}{16n^2}; & \quad 5) \left(\frac{2a^5}{y^6}\right)^4 : \left(\frac{4a^6}{y^3}\right)^3; \\ 3) \frac{36x^6}{49y^5} \cdot \frac{24x^9}{25y^4} \cdot \frac{7x^2}{30y}; & \quad 6) \left(-\frac{27x^3}{16y^5}\right)^2 \cdot \left(\frac{8y^3}{9x^2}\right)^3! \end{aligned}$$

156.° Hozzátok egyszerűbb alakra a kifejezést:

$$\begin{aligned} 1) \frac{3a^4b^3}{10c^5} \cdot \frac{4b^4c^2}{27a^7} \cdot \frac{5b^7}{9a^3c^3}; & \quad 3) \left(\frac{5a^3}{b^4}\right)^4 \cdot \frac{b^{18}}{50a^{16}}; \\ 2) \frac{3a^2}{2b^2c^2} \cdot \frac{7c^8}{6b^3} \cdot \frac{9ab}{14c^{12}}; & \quad 4) \left(\frac{3x^7}{y^{10}}\right)^4 : \left(\frac{3x^6}{y^3}\right)^3! \end{aligned}$$

157.° Helyettesítsétek az x változót olyan kifejezéssel, hogy azonoságot kapjunk:

$$1) \left(\frac{4a^2}{b^3}\right)^2 \cdot x = \frac{6a}{b^2}; \quad 2) \left(\frac{2b^4}{3c}\right)^3 : x = \frac{b^6}{12}!$$

158.° Végezzétek el a törtek osztását és szorzását:

$$\begin{aligned} 1) \frac{4-a}{8a^3} \cdot \frac{12a^5}{a^2-16}; & \quad 6) \frac{x^2-9}{x+y} \cdot \frac{5x+5y}{x^2-3x}; \\ 2) \frac{4c-d}{c^2+cd} \cdot \frac{2c^2-2d^2}{4c^2-cd}; & \quad 7) \frac{m+2n}{2-3m} \cdot \frac{m^2+4mn+4n^2}{3m^2-2m}; \\ 3) \frac{b^2-6b+9}{b^2-3b+9} \cdot \frac{b^3+27}{5b-15}; & \quad 8) \frac{a^3+8}{16-a^4} \cdot \frac{a^2-2a+4}{a^2+4}; \\ 4) \frac{a^3-16a}{3a^2b} \cdot \frac{12ab^2}{4a+16}; & \quad 9) \frac{x^2-12x+36}{3x+21} \cdot \frac{x^2-49}{4x-24}; \\ 5) \frac{a^3+b^3}{a^2-b^2} \cdot \frac{7a-7b}{a^2-ab+b^2}; & \quad 10) \frac{3a+15b}{a^2-81b^2} \cdot \frac{4a+20b}{a^2-18ab+81b^2}! \end{aligned}$$

159.* Hozzátok egyszerűbb alakra a kifejezést:

$$1) \frac{7a^2}{a^2-25} \cdot \frac{5-a}{a};$$

$$5) \frac{5m^2-5n^2}{m^2+n^2} \cdot \frac{15n-15m}{4m^2+4n^2};$$

$$2) \frac{a^3+b^3}{a^3-b^3} \cdot \frac{b-a}{b+a};$$

$$6) \frac{mn^2-36m}{m^3-8} \cdot \frac{2n+12}{6m-12};$$

$$3) \frac{a^4-1}{a^3-a} \cdot \frac{a}{1+a^2};$$

$$7) \frac{a^4-1}{a^2-a+1} \cdot \frac{a-1}{a^3+1};$$

$$4) \frac{a^2-8ab}{12b} \cdot \frac{8b^2-ab}{24a};$$

$$8) \frac{4x^2-100}{6x} : (2x^2-20x+50)!$$

160.* Hozzátok egyszerűbb alakra a kifejezést, majd határozzátok meg helyettesítési értékét:

$$1) \frac{a^2-81}{a^2-8a} : \frac{a-9}{a^2-64}, \text{ ha } a = -4;$$

$$2) \frac{x}{4x^2-4y^2} : \frac{1}{6x+6y}, \text{ ha } x = 4,2, y = -2,8;$$

$$3) (3a^2-18a+27) : \frac{3a-9}{4a}, \text{ ha } a = 0,5;$$

$$4) \frac{a^6+a^5}{(3a-3)^2} : \frac{a^5+a^4}{9a^2-9a}, \text{ ha } a = 0,8!$$

161.* Határozzátok meg a kifejezés értékét:

$$1) \frac{1}{a^2-ab} : \frac{b}{b^2-a^2}, \text{ ha } a = 2\frac{1}{3}, b = -\frac{3}{7};$$

$$2) \frac{a^2+4ab+4b^2}{a^2-9b^2} : \frac{3a+6b}{2a-6b}, \text{ ha } a = 4, b = -5!$$

162.** Határozzátok meg az $x^2 + \frac{1}{x^2}$ kifejezés értékét, ha tudjuk, hogy $x - \frac{1}{x} = 9$!

163.** Határozzátok meg a $9x^2 + \frac{1}{x^2}$ kifejezés értékét, ha tudjuk, hogy $3x + \frac{1}{x} = -4$!

164.** Határozzátok meg az $x + \frac{4}{x}$ kifejezés értékét, ha tudjuk, hogy $x^2 + \frac{16}{x^2} = 41$!

165.** Határozzátok meg az $x - \frac{1}{x}$ kifejezés értékét, ha tudjuk, hogy $x^2 + \frac{1}{x^2} = 6$!

166.** Hozzátok egyszerűbb alakra a kifejezést:

$$1) \frac{a^2-36}{a^2+ab-6a-6b} : \frac{a^2+ab+6a+6b}{a^2+2ab+b^2};$$

$$2) \frac{a^2+a-ab-b}{a^2+a+ab+b} : \frac{a^2-a-ab+b}{a^2-a+ab-b}!$$

167.** Végezzétek el a műveleteket:

$$1) \frac{25-5a+5b-ab}{25+5a-5b-ab} \cdot \frac{ab-5a-5b+25}{ab+5a+5b+25},$$

$$2) \frac{a^2-2ab+b^2}{a^2-ab-4a+4b} : \frac{a^2-ab+4a-4b}{a^2-16} !$$

168.** Bizonyítsátok be az azonosságot:

$$\frac{8a^2}{a-3b} : \frac{6a^3}{a^2-9b^2} \cdot \frac{3a}{4a+12b} = 1 !$$

169.** Bizonyítsátok be az azonosságot:

$$\frac{a^3+a}{2a-12} \cdot \frac{6a+6}{2a+12} : \frac{9a^3+18a^2+9a}{a^2-36} = \frac{1}{6} !$$

ISMÉTLŐ FELADATOK

170. Oldjátok meg az egyenleteket:

$$1) (2x+3)^2 - 2x(5+2x) = 10;$$

$$2) (x-2)(x-3) - (x-6)(x+1) = 12!$$

171. Bizonyítsátok be, hogy a $\frac{2x+1}{3} - \frac{x-4}{2} = \frac{x+5}{6}$ egyenletnek nincsenek gyökei!

172. Az A és a B helységek közötti távolság 192 km. Az A -ból a B -be egy motorkerékpáros indult el 60 km/h sebességgel. 30 perccel később a B -ből az A -ba egy másik motorkerékpáros indult el 75 km/h sebességgel. Mennyi ideig motorozott a második motoros a találkozásig?

173. Két kannában összesen 80 l tej van. Ha az első kannából áttöltjük a tej 20%-át a másikba, akkor a két edényben azonos mennyiségű tej lesz. Hány liter tej volt a kannákban külön-külön?

174. (Magnyickij¹ *Aritmetika* című könyvéből.) 12 embernél 12 kenyér van. Minden férfinél 2 kenyér, nőnél fél kenyér, gyereknek pedig negyed kenyér van. Határozzátok meg a férfiak, nők és gyerekek számát!

¹ L. F. Magnyickij (1669–1739) orosz pedagógus, matematikus – szerzője a híres *Aritmetika* című tankönyvnek, amiből számos nemzedék sajátította el a matematikát.

NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREK HASZNÁLATA

175. Péter és László felváltva az $x^4 + *x^3 + *x^2 + *x + * = 0$ egyenletben a csillagokat számokra cserélik, mindig csak egyet. Az első lépést László teszi meg. Péter arra törekszik, hogy a kapott egyenletnek legyen gyöke. Megakadályozhatja-e ebben László?

6. Racionális kifejezések azonos átalakításai

A racionális törtekkel végzett műveletek segítségével bármely racionális kifejezés átalakítható racionális törtté.

Figyeljük meg példákon.

1. PÉLDA

Egyszerűsítések a

$$\left(\frac{3a}{a-2} - \frac{6a}{a^2-4a+4} \right) : \frac{a-4}{a^2-4} - \frac{2a^2+8a}{a-2}$$

kifejezést!

Megoldás

A többműveletes számkifejezésekhez hasonlóan a racionális kifejezéseket is lehet műveletenként egyszerűsíteni. A műveletek sorrendje is megegyezik: először a zárójelben lévő kivonást végezzük el, majd az osztást és a végén a második kivonást:

$$1) \frac{3a}{a-2} - \frac{6a}{a^2-4a+4} = \frac{\overset{a-2}{\cancel{3a}}}{a-2} - \frac{6a}{(a-2)^2} = \frac{3a^2-6a-6a}{(a-2)^2} = \frac{3a^2-12a}{(a-2)^2},$$

$$2) \frac{3a^2-12a}{(a-2)^2} : \frac{a-4}{a^2-4} = \frac{3a^2-12a}{(a-2)^2} \cdot \frac{a^2-4}{a-4} = \frac{3a(a-4)}{(a-2)^2} \cdot \frac{(a-2)(a+2)}{a-4} =$$

$$= \frac{3a(a+2)}{a-2} = \frac{3a^2+6a}{a-2};$$

$$3) \frac{3a^2+6a}{a-2} - \frac{2a^2+8a}{a-2} = \frac{3a^2+6a-2a^2-8a}{a-2} = \frac{a^2-2a}{a-2} = \frac{a(a-2)}{a-2} = a.$$

F e l e l e t: a .

1. §. RACIONÁLIS KIFEJEZÉSEK

A racionális kifejezést nem csak külön műveletekre bontva végezhetjük el, hanem úgynevezett „lánc” módszerrel. A következő példa ezt a módszert szemlélteti.

2. PÉLDA

Igazoljátok, hogy a $\frac{3a}{a-3} + \frac{a+5}{18-6a} \cdot \frac{54a}{5a+a^2}$ kifejezés értéke nem függ a változó megengedett értékétől!

Megoldás

$$\begin{aligned}\frac{3a}{a-3} + \frac{a+5}{18-6a} \cdot \frac{54a}{5a+a^2} &= \frac{3a}{a-3} + \frac{a+5}{6(3-a)} \cdot \frac{54a}{a(5+a)} = \frac{3a}{a-3} + \frac{9}{3-a} = \\ &= \frac{3a}{a-3} - \frac{9}{a-3} = \frac{3a-9}{a-3} = \frac{3(a-3)}{a-3} = 3.\end{aligned}$$

Tehát a változó bármely megengedett értékénél a kifejezés értéke 3.

3. PÉLDA

Igazoljátok az

$$\left(\frac{a-7}{3a-1} + \frac{a-7}{a+1} \right) \cdot \frac{3a-1}{a^2-7a} = \frac{4}{a+1}$$

azonosságot!

Megoldás

Ebben az esetben a bal oldal egyszerűsítését célszerűbb a zárójel felbontásával kezdeni, alkalmazzuk a szorzás széttagolási törvényét:

$$\begin{aligned}\left(\frac{a-7}{3a-1} + \frac{a-7}{a+1} \right) \cdot \frac{3a-1}{a^2-7a} &= \frac{a-7}{3a-1} \cdot \frac{3a-1}{a^2-7a} + \frac{a-7}{a+1} \cdot \frac{3a-1}{a^2-7a} = \\ &= \frac{a-7}{a} + \frac{3a-1}{a(a+1)} = \frac{a+1+3a-1}{a(a+1)} = \frac{4a}{a(a+1)} = \frac{4}{a+1}.\end{aligned}$$

Az azonosságot igazoltuk.

4. PÉLDA

Egyszerűsítsétek az $\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}{\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}}$ kifejezést!

Megoldás

Írjuk fel az adott kifejezést a számláló és a nevező hányadosaként:

6. Racionális kifejezések azonos átalakításai

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}{\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}} &= \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) : \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}\right) = \frac{bc+ac+ab}{abc} : \frac{c+a+b}{abc} = \\ &= \frac{bc+ac+ab}{abc} \cdot \frac{abc}{c+a+b} = \frac{bc+ac+ab}{c+a+b}.\end{aligned}$$

Az adott kifejezést másképpen is egyszerűsíthetjük. Alkalmazzuk a tört alaptulajdonságát, szorozzuk meg a számlálót és a nevezőt is az abc egytaggal:

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}{\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}} &= \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)abc}{\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}\right)abc} = \frac{\frac{1}{a} \cdot abc + \frac{1}{b} \cdot abc + \frac{1}{c} \cdot abc}{\frac{1}{ab} \cdot abc + \frac{1}{bc} \cdot abc + \frac{1}{ac} \cdot abc} = \\ &= \frac{bc+ac+ab}{c+a+b}.\end{aligned}$$

F e l e l e t: $\frac{bc+ac+ab}{c+a+b}$.

176.^o Egyszerűsítsétek az alábbi kifejezéseket:

- 1) $\left(\frac{a}{3} + \frac{a}{4}\right) \cdot \frac{6}{a^2}$;
- 2) $\frac{a^2b}{a-b} \cdot \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$;
- 3) $\left(1 + \frac{a}{b}\right) : \left(1 - \frac{a}{b}\right)$;
- 4) $\left(\frac{a^2}{b^2} - \frac{2a}{b} + 1\right) \cdot \frac{b}{a-b}$;
- 5) $\frac{a^2-ab}{b^2-1} \cdot \frac{b+1}{a-b-1}$;
- 6) $\left(\frac{5}{m-n} - \frac{4}{m+n}\right) \cdot \frac{m+9n}{m+n}$;
- 7) $\frac{x-2}{x+2} \cdot \left(x - \frac{x^2}{x-2}\right)$;
- 8) $\frac{x^2+x}{4} : \frac{x^2}{4} + \frac{x-1}{x}$;
- 9) $\frac{6c^2}{c^2-1} : \left(\frac{1}{c-1} + 1\right)$;
- 10) $\left(\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x-y}\right) \cdot \frac{x^2+xy}{x^2+y^2}$!

177.^o Egyszerűsítsétek az alábbi kifejezéseket:

- 1) $\left(x + \frac{x}{y}\right) : \left(x - \frac{x}{y}\right)$;
- 2) $\left(\frac{a}{b} + \frac{a+b}{a-b}\right) \cdot \frac{ab^2}{a^2+b^2}$;
- 3) $\left(\frac{m}{m-1} - 1\right) : \frac{m}{mn-n}$;
- 4) $\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right) \cdot \frac{4ab}{a-b}$;
- 5) $\frac{a}{b} - \frac{a^2-b^2}{b^2} : \frac{a+b}{b}$;
- 6) $\frac{7x}{x+2} - \frac{x-8}{3x+6} \cdot \frac{84}{x^2-8x}$;
- 7) $\left(a - \frac{9a-9}{a+3}\right) : \frac{a^2-3a}{a+3}$;
- 8) $\left(\frac{a}{a+2} - \frac{8}{a+8}\right) \cdot \frac{a^2+8a}{a-4}$!

1. §. RACIONÁLIS KIFEJEZÉSEK

178.* Végezzétek el a kijelölt műveleteket:

$$1) \frac{a+2}{a^2-2a+1} : \frac{a^2-4}{3a-3} - \frac{3}{a-2};$$

$$2) \frac{b^2+3b}{b^3+9b} \cdot \left(\frac{b-3}{b+3} + \frac{b+3}{b-3} \right);$$

$$3) \left(\frac{3c+1}{3c-1} - \frac{3c-1}{3c+1} \right) : \frac{2c}{6c+2};$$

$$4) \left(\frac{1}{a^2-4ab+4b^2} - \frac{1}{4b^2-a^2} \right) : \frac{2a}{a^2-4b^2};$$

$$5) \left(\frac{a-8}{a^2-10a+25} - \frac{a}{a^2-25} \right) : \frac{a-20}{(a-5)^2};$$

$$6) \left(\frac{2x+1}{x^2+6x+9} - \frac{x-2}{x^2+3x} \right) : \frac{x^2+6}{x^3-9x}!$$

179.* Végezzétek el a kijelölt műveleteket:

$$1) \frac{b+4}{b^2-6b+9} : \frac{b^2-16}{2b-6} - \frac{2}{b-4};$$

$$2) \left(\frac{m-1}{m+1} - \frac{m+1}{m-1} \right) : \frac{4m}{m^2-1};$$

$$3) \frac{2x}{x^2-y^2} : \left(\frac{1}{x^2+2xy+y^2} - \frac{1}{y^2-x^2} \right);$$

$$4) \left(\frac{2a-3}{a^2-4a+4} - \frac{a-1}{a^2-2a} \right) : \frac{a^2-2}{a^3-4a}!$$

180.* Egyszerűsítétek az alábbi kifejezéseket:

$$1) \left(\frac{15}{x-7} - x - 7 \right) : \frac{7-x}{x^2-16x+64};$$

$$2) \left(a - \frac{5a-16}{a-3} \right) : \left(2a - \frac{2a}{a-3} \right);$$

$$3) \left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{a}{b^2} \right) : \frac{ab}{a^2-b^2} + \frac{2}{b-a};$$

$$4) \left(\frac{a}{a-1} - \frac{a}{a+1} - \frac{a^2+1}{1-a^2} \right) : \frac{a^2+a}{(a-1)^2};$$

$$5) \left(\frac{x+2y}{x-2y} - \frac{x-2y}{x+2y} - \frac{16y^2}{x^2-4y^2} \right) : \frac{4y}{x+2y};$$

$$6) \left(\frac{3a-8}{a^2-2a+4} + \frac{1}{a+2} - \frac{4a-28}{a^3+8} \right) : \frac{a^2-4}{4}!$$

181.* Egyszerűsítsék az alábbi kifejezéseket:

- 1) $\frac{x^2+14x+49}{x+6} : \left(\frac{13}{x+6} - x+6 \right);$
- 2) $\left(c - \frac{2c-9}{c+8} \right) : \frac{c^2+3c}{c^2-64} + \frac{24}{c};$
- 3) $\left(\frac{36}{x^2-9} - \frac{x-3}{x+3} - \frac{3+x}{3-x} \right) : \frac{6}{3-x};$
- 4) $\left(\frac{2y-1}{y^2+2y+4} + \frac{9y+6}{y^3-8} + \frac{1}{y-2} \right) : \frac{y^2-4}{18};$

182.* Igazoljátok az alábbi azonosságokat:

- 1) $\left(\frac{ab}{a^2-b^2} + \frac{b}{2b-2a} \right) : \frac{2b}{a^2-b^2} = \frac{a-b}{4};$
- 2) $\left(\frac{8a}{4-a^2} - \frac{a-2}{a+2} \right) : \frac{a+2}{a} + \frac{2}{a-2} = -1;$
- 3) $\left(\frac{3}{36-c^2} + \frac{1}{c^2-12c+36} \right) : \frac{(c-6)^2}{2} + \frac{3c}{c+6} = 2;$

183.* Igazoljátok az alábbi azonosságokat:

- 1) $\left(\frac{b}{a^2-ab} - \frac{2}{a-b} - \frac{a}{b^2-ab} \right) : \frac{a^2-b^2}{4ab} = \frac{4}{a+b};$
- 2) $\frac{(a-b)^2}{a} \cdot \left(\frac{a}{(a-b)^2} + \frac{a}{b^2-a^2} \right) + \frac{3a+b}{a+b} = 3;$

184.* Független-e az alábbi kifejezés értéke a változó megengedett értékétől:

- 1) $\left(\frac{a+3}{a^2-1} - \frac{1}{a^2+a} \right) : \frac{3a+3}{a^2-a};$
- 2) $\left(\frac{a}{a^2-49} - \frac{1}{a+7} \right) : \frac{7a}{a^2+14a+49} - \frac{2}{a-7}?$

185.* Igazoljátok, hogy a kifejezés értéke nem függ a változó értékétől:

- 1) $\frac{3x^2-27}{4x^2+2} \cdot \left(\frac{6x+1}{x-3} + \frac{6x-1}{x+3} \right);$
- 2) $\frac{3}{2a-3} - \frac{8a^3-18a}{4a^2+9} \cdot \left(\frac{2a}{4a^2-12a+9} - \frac{3}{4a^2-9} \right);$

186.* Egyszerűsítsék az alábbi kifejezéseket:

- 1) $\frac{a - \frac{a^2}{a+1}}{a - \frac{a}{a+1}};$
- 2) $\frac{a - \frac{6a-9}{a}}{1 - \frac{3}{a}};$

1. §. RACIONÁLIS KIFEJEZÉSEK

$$3) \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{a}}};$$

$$4) \frac{\frac{2a-b}{b} + 1}{\frac{2a+b}{b} - 1} + \frac{3 - \frac{b}{a}}{\frac{3a}{b} - 1}!$$

187.* Egyszerűsítsék az alábbi kifejezéseket:

$$1) \frac{\frac{a-b}{a+b} + \frac{b}{a}}{\frac{a}{a+b} - \frac{a-b}{a}};$$

$$2) \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{a+1}}};$$

188.** Egyszerűsítsék a következő kifejezéseket:

$$1) \left(\frac{a^2}{b^3 - ab^2} + \frac{a-b}{b^2} - \frac{1}{b} \right) : \left(\frac{a+b}{b-a} - \frac{b-a}{a+b} + \frac{6a^2}{a^2 - b^2} \right);$$

$$2) \left(\frac{a+2}{4a^3 - 4a^2 + a} - \frac{2-a}{1-8a^3} - \frac{4a^2+2a+1}{2a^2+a} \right) : \left(\frac{1}{1-2a} \right)^2 - \frac{8a-1}{2a^2+a}!$$

189.** Egyszerűsítsék a következő kifejezést:

$$\left(\frac{18y^2+3y}{27y^3-1} - \frac{3y+1}{9y^2+3y+1} \right) : \left(1 - \frac{3y-1}{y} - \frac{5-6y}{3y-1} \right)!$$

190.** Igazoljátok az alábbi azonosságokat:

$$1) \frac{16}{(a-2)^4} : \left(\frac{1}{(a-2)^2} - \frac{2}{a^2-4} + \frac{1}{(a+2)^2} \right) - \frac{8a}{(a-2)^2} = 1;$$

$$2) \frac{a+11}{a+9} - \left(\frac{a+5}{a^2-81} + \frac{a+7}{a^2-18a+81} \right) : \left(\frac{a+3}{a-9} \right)^2 = 1!$$

191.** Igazoljátok, hogy a $\frac{b^2+9}{3b^2-b^3} + \left(\frac{b+3}{b-3} \right)^2 \cdot \left(\frac{1}{b-3} + \frac{6}{9-b^2} - \frac{3}{b^2+3b} \right)$ kifejezés a változó bármely értékénél pozitív!

192.** Az x helyébe írva az adott kifejezést, végezzétek el az egyszerűsítést:

$$1) \frac{x-a}{x-b}, \text{ ha } x = \frac{ab}{a+b};$$

$$2) \frac{a-bx}{b+ax}, \text{ ha } x = \frac{a-b}{a+b}!$$

ISMÉTLŐ FELADATOK

193. Oldjátok meg az alábbi egyenleteket:

$$1) (3x-1)(4x+5) - (2x+3)(6x+1) = 4;$$

$$2) 8x(2x+7) - (4x+3)^2 = 15!$$

194. Bizonyítsátok be, hogy a $2^{14} - 2^{12} - 2^{10}$ kifejezés maradék nélkül osztható 11-gyel!

195. Bizonyítsátok be, hogy n bármely természetes értékénél a $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ kifejezés osztható 10-zel!
196. Az egyik raktárban 3-szor annyi burgonyát tároltak, mint a másikban. Miután az első raktárból elszállítottak 400 kg-ot, 2-szer kevesebb burgonya maradt, mint a másik raktárban. Mennyi burgonyát tároltak az első raktárban?
197. A dzseki 200 hrivnyával olcsóbb volt az öltönynél. Az őszi árleszállításkor a dzseki 10%-kal, az öltöny 20%-kal került kevesebbe. Így a dzsekit és az öltönyt együtt 1010 hrivnyáért lehetett megvásárolni. Mennyibe került a dzseki és az öltöny eredetileg?
198. Egy személygépkocsi az A helység és a B helység közötti utat 60 km/h sebességgel tette meg. Visszafelé másik útvonalat választott, mely 15 km-rel rövidebb volt, és mivel 70 km/órás sebességgel haladt, így 30 perccel rövidebb idő alatt ért vissza az A helységbe. Mennyi idő alatt ért el az A helységből a B helységbe?
199. Egy munkásnak napi 10 alkatrészt kellett előállítania. Mivel minden nap 12 alkatrészt készített el, így két nappal a határidő letelte előtt már csak 6 alkatrész legyártása maradt a számára. Mennyi alkatrészt kellett elkészítenie?
- 200.* (Ukrán népi feladat.) 30 pénzérméért 30 madarat vásároltak. Hány madarat vettek a különböző fajtákból, ha 3 veréb ára 1 érme volt, 2 galambért is 1 érmét kellett fizetni és egy pacsirtáért 2 érme járt? Minden madárfajból legalább egyet vettek.

FELKÉSZÜLÉS AZ ÚJ TÉMÁHOZ

201. Oldjátok meg az alábbi egyenleteket:

$$\begin{array}{lll} 1) \frac{2x+7}{4} = \frac{x+5}{3}; & 3) 0,21x - 0,7x = 0; & 5) 25x^2 - 36 = 0; \\ 2) x^2 + 6x = 0; & 4) x^2 - 16 = 0; & 6) x^2 + 4 = 0! \end{array}$$

202. A változó mely értékeinél nincs értelmezve az alábbi kifejezés:

$$1) \frac{6}{3x-9}; \quad 2) \frac{x^2+1}{x^2-1}; \quad 3) \frac{x+4}{3x^2+12x};$$

1. §. RACIONÁLIS KIFEJEZÉSEK

$$4) \frac{8}{x+7} + \frac{4}{x-2}; \quad 5) \frac{x}{x^2-10x+25}; \quad 6) \frac{x+2}{(x+10)(x-12)}?$$

203. Az alábbi kifejezések értéke a változó mely értékénél lesz nulla:

$$1) \frac{x-8}{9}; \quad 2) \frac{x-2}{x+2}; \quad 3) \frac{4}{x-5}?$$

Frissítsétek fel a 14., 15. pontokban tanultakat (229. és 230. oldal)!

NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREK HASZNÁLATA

204. A táblára az $x + 2$ és $2x + 1$ többtagú kifejezéseket írták fel. Felírható ezen többtagok összege, különbsége és szorzata. Lehetséges-e, hogy a táblán megjelenjen a $2x^3 + x + 5$ többtagú kifejezés?

ELLENŐRIZZÉTEK MAGATOKAT! 2. SZ. TESZTFELADAT

1. Adjátok meg a $\frac{12m^4}{n^{10}} \cdot \frac{n^5}{36m^8}$ szorzatot tört alakban!

$$A) \frac{1}{3m^2n^2}; \quad B) \frac{1}{3m^4n^5}; \quad C) \frac{3}{m^2n^2}; \quad D) \frac{3}{m^4n^5}.$$

2. Végezzétek el az $(a+5b) \cdot \frac{8}{a^2-25b^2}$ szorzást!

$$A) 8(a-5b); \quad B) 8(a+5b); \quad C) \frac{8}{a+5b}; \quad D) \frac{8}{a-5b}.$$

3. Egyszerűsítsétek a $\frac{b^2-6b+9}{b-7} \cdot \frac{b-7}{b-3}$ kifejezést!

$$A) b+3; \quad B) b-3; \quad C) \frac{1}{b-3}; \quad D) \frac{1}{b+3}.$$

4. Végezzétek el a kijelölt osztást: $\frac{5a^6}{b^8} : 10a^3b^2$!

$$A) \frac{2a^9}{b^6}; \quad B) \frac{b^6}{2a^9}; \quad C) \frac{2b^{10}}{a^3}; \quad D) \frac{a^3}{2b^{10}}.$$

5. Egyszerűsítsétek a $\frac{3x+9}{x^2-2x} : \frac{x+3}{4x-8}$ kifejezést!

$$A) \frac{12}{x}; \quad B) \frac{x}{12}; \quad C) 12; \quad D) x.$$

6. Adjátok meg az $\frac{n^2-3n}{64n^2-1} : \frac{n^4-27n}{64n^2+16n+1}$ kifejezést egyszerűsíthetetlen tört alakban!

A) $\frac{8n+1}{(8n-1)(n^2+3n+9)}$;

C) $\frac{8n-1}{(8n+1)(n^2+3n+9)}$;

B) $\frac{8n+1}{(8n-1)(n^2-3n+9)}$;

D) $\frac{8n-1}{(8n+1)(n^2-3n+9)}$.

7. Végezzék el a $\left(-\frac{2a^2}{b^3}\right)^4$ kifejezés hatványra emelését!

A) $\frac{8a^8}{b^{12}}$;

B) $-\frac{8a^8}{b^{12}}$;

C) $\frac{16a^8}{b^{12}}$;

D) $-\frac{16a^8}{b^{12}}$.

8. Egyszerűsítsék az $\left(\frac{1}{a-6} - \frac{1}{a+6}\right) : \frac{2}{a+6}$ kifejezést!

A) $\frac{6}{a+6}$;

B) $\frac{6}{a-6}$;

C) $6(a-6)$;

D) $6(a+6)$.

9. Mivel egyenlő a $\left(\frac{30a}{9a^2-25} + \frac{5}{5-3a}\right) : \left(\frac{3a-5}{3a+5} - 1\right)$ kifejezés értéke az a bármely megengedett értékére?

A) $\frac{1}{2}$;

B) 2;

C) $-\frac{1}{2}$;

D) -2.

10. Mivel egyenlő az $\frac{a^2-4ab}{b^2}$ kifejezés értéke, ha $3a-5b=0,2 \times (2a+b)$?

A) 4;

B) -4;

C) 3;

D) -3.

11. Ismeretes, hogy $x + \frac{1}{x} = 6$. Határozzátok meg az $x^2 + \frac{1}{x^2}$ kifejezés értékét!

A) 36;

B) 38;

C) 34;

D) 35.

12. Egyszerűsítsék az $\frac{\frac{1}{a} + \frac{a}{b^2}}{\frac{a}{b^2} - \frac{1}{a}}$ kifejezést!

A) $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$;

C) $\frac{a^2+b^2}{ab^2(a^2-b^2)}$;

B) $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$;

D) $\frac{ab(a^2+b^2)}{a^2-b^2}$.

7. Ekvivalens (egyenértékű) egyenletek. Racionális egyenletek

Figyeljük meg az $x^2 = 4$ és $|x| = 2$ egyenleteket!

Könnyen beláthatjuk, hogy mind a két egyenletnek ugyanazok a gyökei, a 2 és a -2 .

Ezekben az esetekben azt mondjuk, hogy az $x^2 = 4$ és $|x| = 2$ egyenletek **ekvivalensek (egyenértékűek)**.

Nézzünk még néhány példát ekvivalens egyenletekre:

$$\frac{1}{2}x = 0 \text{ és } 2x = 0;$$

$$2x = 4 \text{ és } 4x - 8 = 0;$$

$$x^2 = 1 \text{ és } (x - 1)(x + 1) = 0.$$

Vegyük észre, hogy az $x^2 = -5$ és $|x| = -3$ egyenleteknek nincs megoldásuk. Ezeket az egyenleteket is egyenértékűeknek tekintjük.

M e g h a t á r o z á s. Két egyenlet ekvivalens, ha gyökeik azonosak, vagy ha nincs megoldásuk.

Az $x = 2$ érték az $(x - 2)(x + 1) = 0$ és $x - 2 = 0$ egyenletnek is gyöke. Ezek az egyenletek mégse ekvivalensek, mert az első egyenletnek még gyöke a -1 is, míg ez az érték nem megoldása a második egyenletnek.

A VII. osztályban tanultatok már az egyismeretlenes (egyváltozós) egyenletek tulajdonságait. Ezeket a tulajdonságokat az ekvivalens egyenletek fogalmával így is meghatározhatjuk:

- Ha az egyenlet mindkét oldalához hozzáadjuk vagy mindkét oldalból kivonjuk ugyanazt a számot, akkor az eredeti egyenlettel ekvivalens egyenletet kapunk.
- Ha az egyik tényezőt ellenkező előjellel átvisszük az egyenlet egyik oldaláról a másikra, akkor az eredeti egyenlettel ekvivalens egyenletet kapunk.
- Ha az egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk vagy elosztjuk ugyanazzal a nullával nem egyenlő számmal, akkor az eredeti egyenlettel ekvivalens egyenletet kapunk.

Figyeljük meg a következő feladatot: „Egy személygépkocsi miután megtett 180 km-t, a sebességét 10 km/h-val növelte. Így a maradék

7. Ekvivalens (egyenértékű) egyenletek. Racionális egyenletek

210 km-es utat ugyanannyi idő alatt tette meg, mint az út első részét. Határozzátok meg a személygépkocsi kezdeti sebességét!”

Jelöljük x km/h-val a személygépkocsi kezdeti sebességét, akkor az út második részén a sebessége $(x + 10)$ km/h. Az első részt $\frac{180}{x}$ óra alatt tette meg, a második részt pedig $\frac{210}{x+10}$ óra alatt.

A $\frac{180}{x} = \frac{210}{x+10}$ egyenlet az adott feladat matematikai modellje. Az egyenlet mindkét oldala racionális kifejezés.

M e g h a t á r o z á s. Azokat az egyenleteket, melyek mindkét oldala racionális kifejezés, r a c i o n á l i s egyenleteknek nevezzük.

Az előző meghatározás alapján a feladat megoldása egy racionális egyenlet megoldásához vezet.

Megjegyezzük, hogy az egyismeretlenes lineáris egyenlet, vagyis az $ax = b$ alakú egyenlet is racionális egyenlet.

Vizsgáljuk meg az $\frac{A}{B} = 0$ alakú egyenletet, ahol A és B többtag.

Már tudjátok, hogy *a tört értéke csak akkor nulla, ha számlálója nullával egyenlő, a nevezője viszont nem.* Tehát ahhoz, hogy megoldjuk az $\frac{A}{B} = 0$ alakú egyenletet egyszerre két feltételnek kell teljesülnie: $A = 0$ és $B \neq 0$. Ezt az jelenti, ahhoz hogy megoldjunk egy $\frac{A}{B} = 0$ alakú egyenletet, az alábbi algoritmus szerint járunk el:

- megoldjuk az $A = 0$ egyenletet;
- leellenőrizzük, hogy a kapott gyökök megfelelnek-e a $B \neq 0$ kitételnek;
- a megoldásban csak azokat az értékeket tüntetjük fel, melyek kielégítették a $B \neq 0$ feltételt is.

1. PÉLDA

Oldjuk meg az $\frac{(x-1)(x+1)}{x^2 - 4x + 3} = 0$ egyenletet!

1. §. RACIONÁLIS KIFEJEZÉSEK

Megoldás

A bal oldalon lévő tört számlálóját a nullához egyenlítjük: $(x-1) \times (x+1) = 0$. Ennek az egyenletnek két gyöke van: az 1 és a -1.

Ellenőrizzük le, hogy a kapott értékek megfelelnek-e az $x^2 - 4x + 3 \neq 0$ feltételnek.

Ha $x = -1$, akkor $x^2 - 4x + 3 = 8 \neq 0$.

Ha $x = 1$, akkor $x^2 - 4x + 3 = 0$.

Tehát az $x = -1$ megoldása az egyenletnek, míg az $x = 1$ nem.

F e l e l e t: -1.

Tehát az $\frac{A}{B}=0$ alakú egyenletek megoldását visszavezetjük az $A=0$ egyenlet megoldására és a $B \neq 0$ feltétel leellenőrzésére. Ebben az esetben úgy is szoktak fogalmazni, hogy az $\frac{A}{B}=0$ egyenlet ekvivalens az

$$\begin{cases} A=0, \\ B \neq 0 \end{cases}$$

rendszerrel.

Például az $\frac{(x-1)(x+1)}{x^2-4x+3}=0$ egyenlet ekvivalens az

$$\begin{cases} (x-1)(x+1)=0, \\ x^2-4x+3 \neq 0 \end{cases}$$

rendszerrel.

Mint ahogy már láttátok, ennek a rendszernek az $x = -1$ a megoldása.

Térjünk vissza az eredeti, a személygépkocsiról szóló feladatunk megoldásához.

Rendezzük a

$$\frac{180}{x} = \frac{210}{x+10}$$

egyenletet.

Végezzünk ekvivalens átalakításokat:

$$\frac{180}{x} - \frac{210}{x+10} = 0$$

Hozzuk közös nevezőre a törtet:

$$\frac{180(x+10) - 210x}{x(x+10)} = 0;$$

$$\frac{1800 - 30x}{x(x+10)} = 0.$$

Az utolsó egyenlet egyenértékű az alábbi rendszerrel:

$$\begin{cases} 1800 - 30x = 0, \\ x(x+10) \neq 0. \end{cases}$$

7. Ekvivalens (egyenértékű) egyenletek. Racionális egyenletek

Az egyenlet megoldása 60. Könnyen belátható, hogy ez az érték kielégíti az $x(x+10) \neq 0$ feltételt.

F e l e l e t: 60 km/h.

Ismeretes, hogy bármely racionális kifejezés felírható tört alakban, ezért bármilyen racionális egyenlet is megadható $\frac{A}{B}=0$ alakban. Ezt alkalmaztuk a $\frac{180}{x} = \frac{210}{x+10}$ egyenlet megoldásánál.

2. PÉLDA

Oldjuk meg a $\frac{3x+5}{6x+3} + \frac{1}{4x^2-1} = \frac{x}{2x-1}$ egyenletet!

Megoldás

Rendezzük az egyenletet:

$$\frac{3x+5}{3(2x+1)} + \frac{1}{(2x-1)(2x+1)} - \frac{x}{2x-1} = 0;$$
$$\frac{4x-2}{3(2x+1)(2x-1)} = 0.$$

A kapott egyenlet ekvivalens az alábbi rendszerrel:

$$\begin{cases} 4x-2=0, \\ x \neq 0,5, \\ x \neq -0,5. \end{cases}$$

Vagyis

$$\begin{cases} x=0,5, \\ x \neq 0,5, \\ x \neq -0,5. \end{cases}$$

Tehát az adott egyenletnek nincs megoldása.

F e l e l e t: nincs megoldás.

3. PÉLDA

Oldjuk meg a $\frac{2x^2-4x-16}{x-4} - x = 0$ egyenletet!

Megoldás

Hozzuk közös nevezőre a bal oldalt:

$$\frac{2x^2-4x-16-x^2+4x}{x-4} = 0;$$
$$\frac{x^2-16}{x-4} = 0.$$

1. §. RACIONÁLIS KIFEJEZÉSEK

A kapott egyenlet ekvivalens az alábbi rendszerrel:

$$\begin{cases} x^2 - 16 = 0, \\ x - 4 \neq 0. \end{cases}$$

Tehát

$$\begin{cases} x = 4 \text{ vagy } x = -4, \\ x \neq 4. \end{cases}$$
$$x = -4.$$

F e l e l e t: -4 .

4. PÉLDA

Egy turista csónakkal a folyón lefelé 3 km-t tett meg, felfelé pedig 2 km-t, összesen 30 perc alatt. Határozzuk meg a csónak sebességét állóvízben, ha a folyó sebessége 2 km/h!

Megoldás

Jelöljük a csónak sebességét állóvízben x km/h-val. Akkor a csónak sebessége a vízfolyás irányában $(x + 2)$ km/h, a vízfolyással szemben pedig $(x - 2)$ km/h. A turista 3 km-t tett meg a folyón lefelé $\frac{3}{x+2}$ óra alatt, felfelé pedig 2 km-t $\frac{2}{x-2}$ óra alatt. Mivel az egész utat 30 perc $= \frac{1}{2}$ óra alatt tette meg, ezért $\frac{3}{x+2} + \frac{2}{x-2} = \frac{1}{2}$.

Megoldjuk a kapott egyenletet:

$$\frac{3}{x+2} + \frac{2}{x-2} = \frac{1}{2};$$
$$\frac{3x-6+2x+4}{x^2-4} - \frac{1}{2} = 0;$$

$$\frac{10x-4-x^2+4}{2(x^2-4)} = 0;$$

$$\frac{10x-x^2}{2(x^2-4)} = 0;$$

$$\begin{cases} 10x - x^2 = 0, \\ 2(x^2 - 4) \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(10-x) = 0, \\ x \neq 2, \\ x \neq -2; \end{cases}$$

7. Ekvivalens (egyenértékű) egyenletek. Racionális egyenletek

$$x = 0 \text{ vagy } x = 10.$$

Az $x = 0$ nem felel meg a feladat feltételeinek, ezért a csónak sebessége állóvízben 10 km/h.

F e l e l e t: 10 km/h.



1. Mely egyenleteket nevezzük ekvivalenseknek?
2. Az adott egyenlet mely átalakításaival kaphatunk az adottal ekvivalens egyenletet?
3. Milyen egyenleteket nevezünk racionálisaknak?
4. Fogalmazzátok meg két tört egyenlőségének feltételét!
5. Mondjátok el az $\frac{A}{B}=0$ alakú egyenlet, ahol A és B többtag, megoldásának algoritmusát!

205.° Ekvivalensek-e az alábbi egyenletek:

1) $x + 2 = 10$ és $3x = 24$;

2) $-2x = -6$ és $\frac{1}{3}x = 1$;

3) $x - 5 = 0$ és $x(x - 5) = 0$;

4) $(3x - 12)(x + 2) = 0$ és $(0,4 - 0,1x)(7x + 14) = 0$;

5) $\frac{6}{x} = 0$ és $x^2 = -4$;

6) $x + 1 = 1 + x$ és $\frac{x^2+1}{x^2+1} = 1$?

206.° Adjátok meg az alábbi egyenletekkel egyenértékű egyenletet:

1) $2x - 3 = 4$;

2) $|x| = 1$;

3) $x + 6 = x - 2$!

207.° Oldjátok meg az alábbi egyenleteket:

1) $\frac{x-6}{x-4} = 0$;

7) $\frac{5x-7}{x+1} - \frac{x-5}{x+1} = 0$;

2) $\frac{x-2}{x^2-4} = 0$;

8) $\frac{2x+16}{x+3} - \frac{1-3x}{x+3} = 0$;

3) $\frac{x^2-4}{x-2} = 0$;

9) $\frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+1} = 0$;

4) $\frac{x-2}{x-2} = 1$;

10) $\frac{3}{x-2} = \frac{4}{x+3}$;

5) $\frac{2x^2+18}{x^2+9} = 2$;

11) $\frac{x}{x-6} = 2$;

6) $\frac{x}{x-5} + \frac{2x-9}{x-5} = 0$;

12) $\frac{x-4}{x-3} = \frac{2x+1}{2x-1}$;

$$13) \frac{x+8}{x} - \frac{6}{x-2} = 0;$$

$$15) 3 - \frac{2x^2 - 5x}{x^2 - 3x} = 0!$$

$$14) \frac{2x}{x-5} - \frac{x^2 + 15x}{x^2 - 25} = 0;$$

208.° Oldjátok meg a következő egyenleteket:

$$1) \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1} = 0;$$

$$6) \frac{2x-4}{x} - \frac{3x+1}{x} + \frac{x+5}{x} = 0;$$

$$2) \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} = 0;$$

$$7) \frac{x}{x+6} - \frac{36}{x^2 + 6x} = 0;$$

$$3) \frac{x+7}{x-7} - \frac{2x-3}{x-7} = 0;$$

$$8) \frac{2x^2 + 3x + 1}{2x + 1} - x = 1;$$

$$4) \frac{10-3x}{x+8} + \frac{5x+6}{x+8} = 0;$$

$$9) \frac{4}{x-1} - \frac{4}{x+1} = 1!$$

$$5) \frac{x-6}{x-2} - \frac{x-8}{x} = 0;$$

209.° Milyen számot kell kivonni a $\frac{15}{19}$ tört számlálójából és nevezőjéből, hogy a kapott tört értéke $\frac{2}{3}$ legyen?

210.° Milyen számot kell hozzáadni a $\frac{25}{32}$ tört számlálójához és nevezőjéhez, hogy a kapott tört értéke $\frac{5}{6}$ legyen?

211.° Adjatok meg olyan ekvivalens egyenlet-párokat, melyeknek:

- 1) egy gyökük van;
- 2) két gyökük van;
- 3) végtelen sok megoldásuk van;
- 4) nincs megoldásuk!

212.° Oldjátok meg az alábbi egyenleteket:

$$1) \frac{5}{x^2 - 4} + \frac{2x}{x+2} = 2;$$

$$2) \frac{2}{6x+1} + \frac{3}{6x-1} = \frac{30x+9}{36x^2-1};$$

$$3) \frac{6x+14}{x^2-9} + \frac{7}{x^2+3x} = \frac{6}{x-3};$$

$$4) \frac{2y^2+5}{1-y^2} + \frac{y+1}{y-1} = \frac{4}{y+1};$$

$$5) \frac{2x-1}{2x+1} = \frac{2x+1}{2x-1} + \frac{4}{1-4x^2};$$

$$6) \frac{7}{(x+2)(x-3)} - \frac{4}{(x-3)^2} = \frac{3}{(x+2)^2};$$

$$7) \frac{2x-1}{x+4} - \frac{3x-1}{4-x} = \frac{6x+64}{x^2-16} + 4;$$

$$8) \frac{2x-6}{x^2-36} - \frac{x-3}{x^2-6x} - \frac{x-1}{x^2+6x} = 0!$$

213.* Oldjátok meg az alábbi egyenleteket:

$$1) \frac{x-2}{x+1} - \frac{5}{1-x} = \frac{x^2+27}{x^2-1};$$

$$4) \frac{2x^2-2x}{x^2-4} + \frac{6}{x+2} = \frac{x+2}{x-2};$$

$$2) \frac{3x+1}{3x-1} - \frac{3x-1}{3x+1} = \frac{6}{1-9x^2};$$

$$5) \frac{7}{x^2+2x} + \frac{x+1}{x^2-2x} = \frac{x+4}{x^2-4};$$

$$3) \frac{4}{x-3} + \frac{1}{x} = \frac{5}{x-2};$$

$$6) \frac{x^2-9x+50}{x^2-5x} = \frac{x+1}{x-5} + \frac{x-5}{x}!$$

214.* Egy motorcsónak 8 km-es utat tett meg a folyón lefelé, majd megállás nélkül visszafordult. Az egész utat 54 perc alatt tette meg. Határozzátok meg a folyó sebességét, ha a csónak sebessége állóvízben 18 km/h!

215.* Egy gőzös 28 km-t tett meg a folyón a vízfolyással szemben, majd megállás nélkül visszafordult. Visszafelé az út 4 perccel rövidebb ideig tartott. Határozzátok meg a gőzös sebességét állóvízben, ha a folyó sebessége 1 km/h!

216.* Egy csónak 2 óra alatt 6 km-t tett meg a vízfolyással szemben és 12 km-t a vízfolyás irányába. Határozzátok meg a csónak sebességét állóvízben, ha a folyó sebessége 3 km/h!

217.** Oldjátok meg az alábbi egyenleteket:

$$1) \frac{x+5}{x^2-5x} - \frac{x-5}{2x^2+10x} = \frac{x+25}{2x^2-50};$$

$$2) \frac{2}{x^2-9} - \frac{1}{2x^2-12x+18} = \frac{3}{2x^2+6x};$$

$$3) \frac{9x+12}{x^3-64} - \frac{1}{x-4} = \frac{1}{x^2+4x+16}!$$

218.** Oldjátok meg a következő egyenleteket:

$$1) \frac{4y+24}{5y^2-45} + \frac{y+3}{5y^2-15y} = \frac{y-3}{y^2+3y};$$

$$2) \frac{y+2}{8y^3+1} - \frac{1}{4y+2} = \frac{y+3}{8y^2-4y+2}!$$

219.* Oldjátok meg az alábbi egyenleteket! Vegyétek figyelembe az a paraméter lehetséges értékeit!

$$1) \frac{x-1}{x-a} = 0;$$

$$3) \frac{a(x-a)}{x-3} = 0;$$

$$2) \frac{x-a}{x+5} = 0;$$

$$4) \frac{(x-a)(x-6)}{x-7} = 0;$$

$$5) \frac{(x-4)(x+2)}{x-a} = 0;$$

$$6) \frac{x-a}{(x-4)(x+2)} = 0.$$

220.* Az a mely értékeire nincs az $\frac{x+a}{x^2-4} = 0$ egyenletnek gyöke?

221.* Az a mely értékeire van az $\frac{(x-a)(x-3a)}{x+9} = 0$ egyenletnek egy gyöke?

ISMÉTLŐ FELADATOK

222. Év végére egy város lakossága 72 000 lett. Mennyi volt a lakosság év elején, ha 3%-os volt a népszaporulat?

223. Két állomás között az utat egy vonat 45 perc alatt teszi meg. Ha a vonat növelné sebességét 10 km/h-val, akkor 40 perc is elég lenne. Milyen távol van a két állomás egymástól?

224. Igazoljátok, hogy a változó bármely értével az alábbi kifejezések csak nemnegatív értéket vesznek fel:

1) $(a-5)^2 - 2(a-5) + 1;$

2) $(a-b)(a-b-8) + 16!$

225. Határozzátok meg az $f(x) = 3x - 7$ függvény helyettesítési értékét, ha 1) $x = -3$ -mal; 2) $x = 2\frac{1}{3}$ -dal! Az argumentum mely értékénél lesz a függvény értéke 0,2?

FELKÉSZÜLÉS AZ ÚJ TÉMÁHOZ

226. Számítsátok ki a következő kifejezések értékét:

1) $4^3 + 3^4;$

3) $9 \cdot \left(-\frac{2}{9}\right)^2;$

2) $(-8)^2 - (-1)^{12};$

4) $(2,8 - 3,1)^3 \cdot \left(-1\frac{2}{3}\right)^2!$

227. Számítások nélkül hasonlítsd össze az alábbi kifejezéseket:

1) $(-5,7)^2$ és 0;

3) $(-23)^5$ és $(-2)^4;$

2) 0 és $(-6,9)^3;$

4) -8^8 és $(-8)^8!$

228. Adjátok meg:

1) a 4; 8; 16; 32; 64 2-es alapú hatvány alakját;

2) a 100, 1000, 10 000, 1 000 000 10-es alapú hatvány alakját!

229. Számítsátok ki:

- 1) a $18a^2$ kifejezés értékét, ha $a = -\frac{1}{6}$;
- 2) a $(18a)^2$ kifejezés értékét, ha $a = -\frac{1}{6}$;
- 3) a $16 + b^4$ kifejezés értékét, ha $b = -2$;
- 4) a $(16 + b)^4$ kifejezés értékét, ha $b = -2$!

Frissítsetek fel a 3. pontban tanultakat (225. oldal)!

NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREK HASZNÁLATA

230. Létezik-e olyan természetes szám, amelyet ha 2-vel szorzunk a természetes szám négyzetét, ha hárommal, akkor a természetes szám köbét kaptuk?

8. Negatív egész kitevős hatvány

Gyakran a nagy számok felírása helyett egy rövidebb alakot használnak, a természetes kitevős hatványt. Például

$$129\ 140\ 163 = 3^{17},$$

$$282\ 475\ 249 = 7^{10}.$$

A tudományban és a gyakorlatban a nagy számok felírására a 10 különböző hatványait alkalmazzák.

Például a Föld és a Sarkcsillag között a távolság megközelítőleg

4 470 000 000 000 000 km vagy $4,47 \cdot 10^{15}$ km.

A Nap tömege

1 990 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 kg vagy

$1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg.}$

Ezeket az adatokat a makrovilágból vettük, vagyis a nagyon nagy fizikai mennyiségek világából.

Lássunk néhány példát a mikrovilágból, vagyis a nagyon kis fizikai mennyiségek világából.

A hidrogénatom tömege

[illegible]

Például, ha $n = -2$, akkor $a^2 = \frac{1}{a^{-2}}$.

A tudományos irodalomban az alábbi adatokkal találkozhatasz.

A Vénusz bolygó tömege $4,9 \cdot 10^{24}$ kg. A Mars tömege $6,423 \times 10^{23}$ kg. A Hold felszíne $3,8 \cdot 10^7$ km².

A szövegben szereplő adatok úgynevezett **normálalakban** vannak feltüntetve.

M e g h a t á r o z á s. Egy szám **n o r m á l a l a k - j á n a k** nevezzük az $a \cdot 10^n$ szorzatot, ahol $1 \leq a < 10$ és n természetes szám.

A szám normálalakjában az n számot, a 10 hatványkitevőjét **karakterisztikának** nevezzük. Például a Nap kg-ban kifejezett tömegének karakterisztikája 30 , a hidrogénatom kg-ban kifejezett tömegének pedig -27 .

Bármely pozitív számot megadhatunk normálalakban. Például: $171,25 = 1,7125 \cdot 10^2$; $0,00958 = 9,58 \cdot 10^{-3}$. A gyakorlatban a szám normálalakját igen kis és igen nagy számok esetén használják. Ebben az esetben a karakterisztika utal a szám nagyságára.

1. PÉLDA

Határozzuk meg az alábbi kifejezések értékét:

$$1) \left(\frac{4}{7}\right)^{-1}; \quad 2) 1,2^{-2}; \quad 3) 3^{-3} \cdot 15 + 6^{-2} \cdot 8 - 4,3^0.$$

Megoldás

$$1) \left(\frac{4}{7}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{4}{7}} = \frac{7}{4}.$$

Általánosan, ha $a \neq 0$ és $b \neq 0$, akkor $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$.

$$2) 1,2^{-2} = \left(\frac{12}{10}\right)^{-2} = \left(\frac{6}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}.$$

$$3) 3^{-3} \cdot 15 + 6^{-2} \cdot 8 - 4,3^0 = \frac{1}{3^3} \cdot 15 + \frac{1}{6^2} \cdot 8 - 1 = \\ = \frac{1}{27} \cdot 15 + \frac{1}{36} \cdot 8 - 1 = \frac{5}{9} + \frac{2}{9} - 1 = -\frac{2}{9}$$

2. PÉLDA

Adjátok meg az $(a - b)^{-2} (a^{-2} - b^{-2})$ kifejezést tört alakban!

Megoldás

$$\begin{aligned}(a-b)^{-2}(a^{-2}-b^{-2}) &= \frac{1}{(a-b)^2} \cdot \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) = \frac{1}{(a-b)^2} \cdot \frac{b^2 - a^2}{a^2 b^2} = \\ &= \frac{1}{(b-a)^2} \cdot \frac{(b-a)(b+a)}{a^2 b^2} = \frac{b+a}{a^2 b^2 (b-a)} = \frac{b+a}{a^2 b^3 - a^3 b^2}.\end{aligned}$$

3. PÉLDA

Írjuk fel az alábbi számok normálalakját:

- 1) 564 000 000; 2) 0,0036!

Megoldás

$$1) 564\,000\,000 = 5,64 \cdot 100\,000\,000 = 5,64 \cdot 10^8.$$

$$2) 0,0036 = 3,6 \cdot 0,001 = 3,6 \cdot \frac{1}{1000} = 3,6 \cdot \frac{1}{10^3} = 3,6 \cdot 10^{-3}.$$



1. Mivel egyenlő bármely nullával nem egyenlő a -ra és természetes n -re az a^{-n} kifejezés?
2. Mivel egyenlő egy nullától különböző szám nulla hatványa?
3. Mi a szám normálalakja?
4. Milyen határok közé kell esnie az a számnak ahhoz, hogy az $a \cdot 10^n$ szorzat egy szám normálalakja legyen? n természetes szám.
5. Hogyan nevezzük az n számot egy szám normálalakjában?

231.° Az alábbi kifejezések közül melyikkel egyenlő az a^{-6} hatvány:

- 1) $-a^6$; 2) $\frac{1}{a^{-6}}$; 3) $\frac{1}{a^6}$; 4) $-\frac{1}{a^6}$?

232.° Adjátok meg az alábbi hatványokat tört alakban:

- 1) 3^{-8} ; 3) a^{-9} ; 5) 12^{-1} ; 7) $(a - b)^{-2}$;
2) 5^{-6} ; 4) d^{-3} ; 6) m^{-1} ; 8) $(2x - 3y)^{-4}$!

233.° Helyettesítsd a következő hatványokat törttel:

- 1) 14^{-4} ; 2) p^{-20} ; 3) $(m + n)^{-1}$; 4) $(4c - 5d)^{-10}$!

234.° Írjátok fel a törtet egész kitevős hatvány alakjában vagy hatványok szorzataként:

8. Negatív egész kitevős hatvány

$$1) \frac{1}{7^2}; \quad 3) \frac{1}{c}; \quad 5) \frac{a}{b}; \quad 7) \frac{(a+b)^5}{(c-d)^8};$$

$$2) \frac{1}{x^5}; \quad 4) \frac{m}{n^3}; \quad 6) \frac{x^6}{y^7}; \quad 8) \frac{(x-y)^2}{x+y}!$$

235.° Írjátok fel a törtet egész kitevős hatvány alakjában vagy hatványok szorzataként:

$$1) \frac{1}{11^{11}}; \quad 2) \frac{1}{k^4}; \quad 3) \frac{x^2}{y}; \quad 4) \frac{m^6}{n^6}; \quad 5) \frac{(2x-y)^3}{(x-2y)^0}!$$

236.° Írjátok fel az 1; 2; 4; 8; 16; 32; 64; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{16}$; $\frac{1}{32}$; $\frac{1}{64}$ -et olyan hatványalakban melynek, az alapja: 1) 2; 2) $\frac{1}{2}$!

237.° Adjátok meg az alábbi törteteket olyan hatványként, melynek az alapja egyjegyű szám:

$$1) \frac{1}{49}; \quad 2) \frac{1}{216}; \quad 3) \frac{1}{625}; \quad 4) \frac{1}{128}!$$

238.° Írjátok fel az alábbi számokat 10 hatványaként:

$$1) 0,1; \quad 2) 0,01; \quad 3) 0,0001; \quad 4) 0,000001!$$

239.° Írjátok fel az 1; 3; 9; 27; 81; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{27}$; $\frac{1}{81}$ -et olyan hatványként, melynek az alapja: 1) 3; 2) $\frac{1}{3}$!

240.° Számítsátok ki:

$$1) 5^{-2}; \quad 3) (-9)^{-2}; \quad 5) 1^{-24}; \quad 7) (-1)^{-17}; \quad 9) \left(\frac{2}{3}\right)^{-3};$$

$$2) 2^{-4}; \quad 4) 0,2^{-3}; \quad 6) (-1)^{-16}; \quad 8) \left(\frac{7}{8}\right)^0; \quad 10) \left(-1\frac{1}{6}\right)^{-2}!$$

241.° Határozzátok meg a következő kifejezések értékét:

$$1) 20^{-2}; \quad 3) (-6)^{-3}; \quad 5) \left(\frac{1}{6}\right)^{-3};$$

$$2) 0,3^{-1}; \quad 4) \left(\frac{4}{7}\right)^{-2}; \quad 6) \left(3\frac{1}{3}\right)^{-2}!$$

242.° Számítsátok ki az alábbi kifejezések értékét:

$$1) 3^{-1} - 4^{-1}; \quad 4) 9 \cdot 0,1^{-1};$$

$$2) 2^{-3} + 6^{-2}; \quad 5) 0,5^{-2} \cdot 4^{-1};$$

$$3) \left(\frac{2}{7}\right)^{-1} + (-2,3)^0 - 5^{-2}; \quad 6) (2^{-1} - 8^{-1} \cdot 16)^{-1}!$$

243.° Mivel egyenlő a következő kifejezések értéke:

$$1) 2^{-2} + 2^{-1}; \quad 2) 3^{-2} - 6^{-1};$$

1. §. RACIONÁLIS KIFEJEZÉSEK

- 3) $0,03^0 + 0,7^0$; 4) $(9 \cdot 3^{-3} - 12^{-1})^{-1}$?
- 244.°** Az alábbi szorzatok közül melyik egy szám normálalakja:
 1) $12 \cdot 10^4$; 2) $1,2 \cdot 10^4$; 3) $0,12 \cdot 10^4$?
- 245.°** Írjátok le a következő számok normálalakját, nevezzétek meg a karakterisztikáját:
 1) 3400; 4) 0,000008; 7) $0,86 \cdot 10^3$;
 2) 15; 5) 0,73; 8) $0,23 \cdot 10^4$;
 3) 0,0046; 6) $250 \cdot 10^2$; 9) $9300 \cdot 10^5$!
- 246.°** Az alábbi adatokat írjátok le normálalakban:
 1) vákuumban a fény sebessége 300 000 km/s;
 2) Ukrajna legmagasabb csúcsa, a Hoverla 2061 m;
 3) Ukrajna területe 603 700 km²;
 4) a Föld és a Nap átlagos távolsága 149,6 millió km;
 5) 100 km magasságban a légnyomás 0,032 Pa;
 6) egy vízmolekula átmérője 0,00000028 mm!
- 247.°** Írjátok le a következő számok normálalakját, nevezzétek meg a karakterisztikáját:
 1) 45 000; 4) 0,032;
 2) 260; 5) $0,059 \cdot 10^8$;
 3) 0,00024; 6) $526 \cdot 10^4$!
- 248.°** Adjátok meg az alábbi normálalakú számok természetes számalakját vagy tizedes tört alakját:
 1) $1,6 \cdot 10^3$; 3) $2,1 \cdot 10^{-2}$;
 2) $5,7 \cdot 10^6$; 4) $1,1 \cdot 10^{-5}$!
- 249.°** Adjátok meg az alábbi normálalakú számok természetes számalakját vagy tizedes tört alakját:
 1) $2,4 \cdot 10^2$; 2) $4,8 \cdot 10^5$; 3) $1,4 \cdot 10^{-3}$; 4) $8,6 \cdot 10^{-4}$!
- 250.°** Igazoljátok, hogy $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$!
- 251.°** Határozzátok meg az alábbi kifejezések értékét:
 1) $\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 10^{-1} + 9^0 - (-2)^3 + \left(\frac{2}{9}\right)^{-2} \cdot (-1,5)^{-3}$;
 2) $(2,5)^{-2} - (8^5)^0 + \left(1\frac{2}{3}\right)^{-3} + 0,1^{-1}$!

252.* Rendezzék a következő számokat csökkenő sorrendbe:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$, $\left(\frac{1}{2}\right)^0$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$;

2) 4^{-1} , 4^3 , 4^0 , 4^{-2} !

253.* Rendezzék a következő számokat növekvő sorrendbe:

1) 7^{-2} , 7^2 , 7^{-1} , 7^0 ;

2) $\left(\frac{1}{3}\right)^2$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^0$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$!

254.* Hasonlítsátok össze a következő kifejezések értékét:

1) 12^0 és $(-6)^0$;

4) $3^{-1} \cdot 7^{-1}$ és 21^{-1} ;

2) $0,2^3$ és $0,2^{-3}$;

5) $5^{-1} - 7^{-1}$ és 2^{-1} ;

3) 4^6 és $0,25^{-6}$;

6) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ és $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)^{-1}$!

255.* Melyik kifejezés értéke nagyobb:

1) 3^{-2} és $(-3)^0$;

2) $3^{-1} + 2^{-1}$ és 5^{-1} ;

3) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$ és $\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right)^{-2}$?

256.* Adjátok meg tört alakban a következő kifejezéseket:

1) $ab^{-1} + a^{-1}b$;

2) $3a^{-1} + ab^{-2}$;

3) $m^2n^2(m^{-3} - n^{-3})$;

4) $(a + b)^{-1} \cdot (a^{-1} + b^{-1})$;

5) $(c^{-2} - d^{-2}) : (c + d)$;

6) $(xy^{-2} + x^{-2}y) \cdot \left(\frac{x^2 - xy + y^2}{x}\right)^{-1}$!

257.* Írjátok fel az alábbi kifejezések tört alakját:

1) $a^{-2} + a^{-3}$;

3) $(c^{-1} - d^{-1}) \cdot (c - d)^{-2}$;

2) $mn^{-4} + m^{-4}n$;

4) $(x^{-2} + y^{-2}) \cdot (x^2 + y^2)^{-1}$!

258.* Egy kétjegyű természetes szám hatványkitevője 4. Mennyi e szám normálalakban felírt karakterisztikája?

259.* Egy természetes szám hét számjegyből áll. Mennyi e szám normálalakban felírt karakterisztikája?

260.* Melyik szám nagyobb:

1) $9,7 \cdot 10^{11}$ vagy $1,2 \cdot 10^{12}$; 3) $2,34 \cdot 10^6$ vagy $0,23 \cdot 10^7$;

2) $3,6 \cdot 10^{-5}$ vagy $4,8 \cdot 10^{-6}$; 4) $42,7 \cdot 10^{-9}$ vagy $0,072 \cdot 10^{-7}$?

1. §. RACIONÁLIS KIFEJEZÉSEK

261.* Melyik szám kisebb:

1) $6,1 \cdot 10^{19}$ vagy $6,15 \cdot 10^{18}$; 2) $1,5 \cdot 10^{-9}$ vagy $0,9 \cdot 10^{-8}$?

262.* A táblázat a Nap és a Naprendszer bolygói közötti távolságokat tartalmazza.

A bolygó neve	Távolság, km
Vénusz	$1,082 \cdot 10^8$
Föld	$1,495 \cdot 10^8$
Mars	$2,280 \cdot 10^8$
Merkúr	$5,790 \cdot 10^7$
Neptunusz	$4,497 \cdot 10^9$
Szturnusz	$1,427 \cdot 10^9$
Uránusz	$2,871 \cdot 10^9$
Jupiter	$7,781 \cdot 10^8$

1) Melyik bolygó van a legközelebb, illetve a legmesszebb a Naptól?

2) A Szturnusz vagy a Mars van messzebb a Naptól?

3) Készítsetek olyan táblázatot, ahol a bal oszlopban a bolygók nevét tüntetitek fel a Naptól mért távolságuk növekvő sorrendjében, a jobb oszlopban pedig a távolságot millió km-ben!

263.* Az alábbi táblázat néhány kémia elem atomtömegét tartalmazza.

Kémiai elem	Atomtömeg, kg	Kémiai elem	Atomtömeg, kg
Nitrogén	$2,32 \cdot 10^{-26}$	Arany	$3,27 \cdot 10^{-25}$
Aluminium	$4,48 \cdot 10^{-26}$	Réz	$1,05 \cdot 10^{-25}$
Hidrogén	$1,66 \cdot 10^{-27}$	Nátrium	$3,81 \cdot 10^{-26}$
Hélium	$6,64 \cdot 10^{-27}$	Ón	$1,97 \cdot 10^{-25}$
Vas	$9,28 \cdot 10^{-26}$	Urán	$3,95 \cdot 10^{-25}$

1) A táblázatban feltüntetett kémiai elemek közül melyik atomtömege a legkisebb; legnagyobb?

2) A nátrium vagy a réz atomtömege több?

3) Készíts táblázatot, melyben a kémiai elemeket atomtömegük csökkenésében tünteted fel!

264.* A következő táblázat a Föld ásványkincs-készleteit tartalmazza.

8. Negatív egész kitevős hatvány

Anyagnév	Készlet, t	Anyagnév	Készlet, t
Alumínium	$1,1 \cdot 10^9$	Nikkel	$6,8 \cdot 10^7$
Volfram	$1,3 \cdot 10^6$	Ón	$4,76 \cdot 10^6$
Vas	$8,8 \cdot 10^{10}$	Higany	$1,15 \cdot 10^5$
Arany	$1,1 \cdot 10^4$	Foszfát	$1,98 \cdot 10^{10}$
Mangán	$6,35 \cdot 10^8$	Króm	$4,4 \cdot 10^9$
Réz	$2,8 \cdot 10^9$	Cink	$1,12 \cdot 10^8$

- 1) Melyik ásványi anyagból legtöbb; legkevesebb a Föld tartaléka?
- 2) Nikkelből vagy cinkből van-e több a Földön?
- 3) Készítsetek táblázatot az ásványkincs-készlet csökkenése szerint!

ISMÉTLŐ FELADATOK

265. Egy vastömb tömege 16 kg. Legalább hány darab ilyen vastömbre van szükség 41 db 12 kg-os alkatrész legyártásához?
266. Egy városnak jelenleg 88 200 polgára van. Hány lakosa volt ennek a városnak 2 évvel ezelőtt, ha lakossága évente 5%-kal gyarapodott?
267. Dénes otthonról a sportpályára gyalog szokott járni, 4 km/h-s sebességgel. Ha kerékpárral megy, akkor 20 perccel hamarabb ér oda. Milyen messze van Dénes házatól a pálya, ha sebessége kerékpárral 12 km/h?
268. Egyszerűsítsétek a

$$\frac{2a^2 + 2}{a^2 - 1} - \frac{a + 1}{a - 1} + \frac{3a - 3}{2a + 2}$$

kifejezést!

269. Igaz-e, hogy bármely természetes n -re az $(5n + 6,5)^2 - (2n + 0,5)^2$ kifejezés 42 többszöröse?

FELKÉSZÜLÉS AZ ÚJ TÉMÁHOZ

270. Adjátok meg az alábbi kifejezéseket a alapú hatvány alakjában:

$$1) a^7 \cdot a^5; \quad 2) a^7 : a^5; \quad 3) (a^7)^5; \quad 4) \frac{(a^3)^6 \cdot a^4}{a^{16}}!$$

271. Egyszerűsítsétek a következő kifejezéseket:

$$1) -4m^3n^5 \cdot 5m^4n^2; \quad 2) (-2m^7n^2)^4; \quad 3) 8x^3y^4 \cdot \left(-\frac{1}{2}x^2y^5\right)^3!$$

272. Határozzátok meg a következő kifejezések értékét:

$$1) \frac{3^{10} \cdot 27^3}{9^9}; \quad 2) \left(5\frac{1}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{16}\right)^8!$$

Frissítsétek fel a 4. pont tartalmát (225. oldal)!

NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREK HASZNÁLATA

273. Egy épületben csak olyan házaspárok laknak, akiknek kiskorú gyermekeik vannak. Minden fiúnak van leánytestvére és a fiúk többen vannak. Lakhat-e ebben a házban több felnőtt, mint gyerek?

9. Az egész kitevőjű hatvány tulajdonságai

7. osztályban már tanultátok a valós számok természetes kitevőjű hatványainak tulajdonságait. Ezek a tulajdonságok érvényesek az egész kitevőjű hatványokra is.

Bármely tetszőleges, $a \neq 0$ valós számra és bármely egész n és m számra igazak a következő azonosságok:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \quad (1)$$

$$(a^m)^n = a^{mn}. \quad (2)$$

Bármely tetszőleges, $a \neq 0$ és $b \neq 0$ valós számra és bármely egész n számra igaz a következő azonosság:

$$(ab)^n = a^n b^n. \quad (3)$$

Az (1) azonosság a **hatványozás alaptulajdonságát** fejezi ki. Bizonyítsátok be!

Természetes hatványkitevőre ezt az azonosságot a 7. osztályban már igazoltuk.

Vizsgáljuk meg azt az esetet, ha az m és az n számok negatív egészek.

Ha az m és az n számok negatív egészek, akkor a $-m$ és $-n$ számok természetesek. Vagyis $a^{-m} \cdot a^{-n} = a^{-m+(-n)} = a^{-(m+n)}$.

$$\text{Tehát } a^m \cdot a^n = \frac{1}{a^{-m}} \cdot \frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{a^{-m} \cdot a^{-n}} = \frac{1}{a^{-(m+n)}} = \frac{1}{a^{-(m+n)}} = a^{m+n}.$$

9. Az egész kitevőjű hatvány tulajdonságai

A teljes bizonyításhoz még azokat az eseteket is figyelembe kell venni, amikor az egyik hatványkitevő, vagy az m vagy az n pozitív, míg a másik kitevő negatív; vagy mind a két kitevő nulla. Ezeknek az eseteknek a vizsgálatát végezzétek el önállóan.

A (2) és (3) azonosság igazolása az előzőhöz hasonló.

Az alapononosságból következik az alábbi fontos azonosság: **bármely tetszőleges, $a \neq 0$ valós számra és bármely egész n és m számra következő egyenlőség azonosság:**

$$a^m : a^n = a^{m-n}. \quad (4)$$

$$\text{Valóban, } a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^m \cdot a^{-n} = a^{m+(-n)} = a^{m-n}.$$

A (2) és (3) azonosságok alapján fölírhatjuk a következő azonosságot: **bármely tetszőleges, $a \neq 0$ és $b \neq 0$ valós számra és bármely egész n számra igaz a következő azonosság:**

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}. \quad (5)$$

$$\text{Könnyen belátható, hogy } \left(\frac{a}{b}\right)^n = (a \cdot b^{-1})^n = a^n \cdot (b^{-1})^n = a^n \cdot b^{-n} = \frac{a^n}{b^n}.$$

Az (1) – (5) azonosságokat az **egész kitevőjű hatvány alaptulajdonságainak** nevezzük.

1. PÉLDA

Írjuk fel hatvány alakban a következő kifejezéseket:

$$1) a^{-14} \cdot a^{12}; \quad 2) a^{-5} : a^{-9}; \quad 3) (a^{-4})^{-2} \cdot a^{-7} : a^6!$$

Megoldás

1) A hatványozás alaptulajdonsága alapján:

$$a^{-14} \cdot a^{12} = a^{-14+12} = a^{-2}.$$

2) Az $a^m : a^n = a^{m-n}$ alkalmazva:

$$a^{-5} : a^{-9} = a^{-5-(-9)} = a^{-5+9} = a^4.$$

3) Alkalmazva a hatvány hatványozására (2) és az azonos alapú hatványok szorzására és osztására ((1), (4)) érvényes azonosságokat azt kapjuk, hogy:

$$(a^{-4})^{-2} \cdot a^{-7} : a^6 = a^{-4 \cdot (-2)} \cdot a^{-7} : a^6 = a^8 \cdot a^{-7} : a^6 = a^{8+(-7)-6} = a^{-5}.$$

2. PÉLDA

Határozzuk meg a következő kifejezések értékeit:

$$1) (5^{-5})^{-4} : (5^{-7})^{-3}; \quad 2) 16^{-9} \cdot 8^{12}; \quad 3) \frac{6^{-3}}{18^{-3}}; \quad 4) \left(1\frac{11}{25}\right)^{-8} \cdot \left(\left(\frac{5}{6}\right)^3\right)^{-5}!$$

1. §. RACIONÁLIS KIFEJEZÉSEK

Megoldás

1) A hatványozás alaptulajdonságait alkalmazva:

$$(5^{-5})^{-4} : (5^{-7})^{-3} = 5^{20} : 5^{21} = 5^{-1} = \frac{1}{5}.$$

2) Felírva a 16-ot és a 8-at 2 hatványaként azt kapjuk, hogy:

$$16^{-9} \cdot 8^{12} = (2^4)^{-9} \cdot (2^3)^{12} = 2^{-36} \cdot 2^{36} = 2^0 = 1.$$

3) A tört hatványozása alapján (5. azonosság) felírhatjuk, hogy:

$$\frac{6^{-3}}{18^{-3}} = \left(\frac{6}{18}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 3^3 = 27.$$

$$\begin{aligned} 4) \left(1\frac{11}{25}\right)^{-8} \cdot \left(\left(\frac{5}{6}\right)^3\right)^{-5} &= \left(\frac{36}{25}\right)^{-8} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{-15} = \left(\left(\frac{6}{5}\right)^2\right)^{-8} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{-15} = \\ &= \left(\frac{6}{5}\right)^{-16} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{-15} = \left(\frac{6}{5}\right)^{-16} \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^{15} = \left(\frac{6}{5}\right)^{-1} = \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

3. PÉLDA

Egyszerűsítsük a következő kifejezéseket: 1) $0,6m^2n^{-6} \cdot \frac{1}{3}m^{-4}n^3$;

$$2) (a^{-2} + 9)(a^{-2} - 4) - (a^{-2} + 6)(a^{-2} - 6)!$$

Megoldás

$$\begin{aligned} 1) 0,6m^2n^{-6} \cdot \frac{1}{3}m^{-4}n^3 &= \left(0,6 \cdot \frac{1}{3}\right) \cdot (m^2 \cdot m^{-4}) \cdot (n^{-6} \cdot n^3) = \\ &= 0,2m^{-2}n^{-3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) (a^{-2} + 9)(a^{-2} - 4) - (a^{-2} + 6)(a^{-2} - 6) &= \\ &= a^{-4} - 4a^{-2} + 9a^{-2} - 36 - a^{-4} + 36 = 5a^{-2}. \end{aligned}$$

4. PÉLDA

Végezzük el a $(3,4 \cdot 10^{14}) \cdot (7 \cdot 10^{-8})$ szorzást, és írjuk fel az eredményt normálalakban!

Megoldás

$$\begin{aligned} (3,4 \cdot 10^{14}) \cdot (7 \cdot 10^{-8}) &= (3,4 \cdot 7) \cdot (10^{14} \cdot 10^{-8}) = 23,8 \cdot 10^6 = \\ &= 2,38 \cdot 10 \cdot 10^6 = 2,38 \cdot 10^7. \end{aligned}$$



Soroljátok fel az egész kitevőjű hatvány tulajdonságait!

274.° Adjátok meg a következő kifejezéseket hatványalakban vagy hatványok szorzataként:

$$1) a^{-6} \cdot a^9; \quad 2) a^5 \cdot a^{-8}; \quad 3) a^{-5} \cdot a^{10} \cdot a^{-12};$$

9. Az egész kitevőjű hatvány tulajdonságai

- 4) $a^{-2} : a^6$; 7) $a^{12} \cdot a^{-20} : a^{-9}$; 10) $(a^2)^{-4} \cdot (a^{-3})^{-2} : (a^{-8})^3$;
 5) $a^7 : a^{-3}$; 8) $(a^{-5})^4$; 11) $(a^4 b^{-2} c^3)^{-10}$;
 6) $a^{-3} : a^{-15}$; 9) $(a^{-6})^{-8}$; 12) $\left(\frac{a^{10} b^{-7}}{c^6 d^{-14}}\right)^{-2} !$

275.° Adjátok meg a következő kifejezéseket hatványalakban vagy hatványok szorzataként:

- 1) $a^6 \cdot a^{-10}$; 4) $(a^{-2})^6$; 7) $a^{-16} \cdot a^8 : a^{-4}$;
 2) $a^4 : a^7$; 5) $(a^{-3} b^{-1} c^7)^{-4}$; 8) $(a^{-3})^8 : (a^{-1})^7 \cdot (a^{-7})^{-4} !$
 3) $a^{-5} : a^{-9}$; 6) $\left(\frac{a^2}{bc^{-1}}\right)^{-3}$;

276.° Határozzátok meg az alábbi kifejezések értékét:

- 1) $9^5 \cdot 9^{-7}$; 4) $2^{-9} \cdot 2^{-12} : 2^{-22}$; 7) $3^{-3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$;
 2) $10^{-8} \cdot 10^{12}$; 5) $(17^4)^{-12} \cdot (17^{-6})^{-8}$; 8) $\frac{14^{-5}}{7^{-3}} !$
 3) $3^{-18} : 3^{21}$; 6) $\frac{6^{-3} \cdot (6^{-3})^4}{(6^{-7})^2 \cdot 6^{-3}}$;

277.° Határozzátok meg az alábbi kifejezések értékét:

- 1) $6^{-9} \cdot 6^6$; 3) $5^{-7} : 5^{-6} \cdot 5^3$; 5) $0,8^{-4} \cdot \left(1\frac{1}{4}\right)^{-4}$;
 2) $7^{-16} : 7^{-18}$; 4) $\frac{4^{-7} \cdot (4^{-5})^3}{(4^{-3})^7}$; 6) $\frac{11^{-2}}{22^{-2}} !$

278.° Egyszerűsítsétek a következő kifejezéseket:

- 1) $3a^{-3} \cdot 4a^{-4}$; 7) $(c^{-6} d^2)^{-7}$;
 2) $\frac{10b^{-4}}{10b^{-5}}$; 8) $\frac{1}{3} a^{-3} b^{-6} \cdot \frac{6}{7} a^7 b^4$;
 3) $(2c^{-6})^4$; 9) $0,2c^{-3} d^5 \cdot 1,5c^{-2} d^{-5}$;
 4) $m^{-2} n \cdot mn^{-2}$; 10) $4x^8 \cdot (-3x^{-2} y^4)^{-2}$;
 5) $abc^{-1} \cdot ab^{-1} c$; 11) $\frac{13m^{-10}}{12n^{-8}} \cdot \frac{27n}{26m^2}$;
 6) $\frac{kp^{-6}}{k^4 p^4}$; 12) $\frac{18p^{-6} k^2}{7} : \frac{15k^{-2}}{p^6} !$

279.° Egyszerűsítsétek a következő kifejezéseket:

- 1) $2a^{-5} b^2 \cdot 3a^{-2} b^5$; 3) $\frac{3,6a^2 b}{0,9a^3 b^{-3}}$;
 2) $\left(\frac{1}{2} mn^{-3}\right)^{-2}$; 4) $0,8a^{-6} b^8 \cdot 5a^{10} b^{-8}$;

1. §. RACIONÁLIS KIFEJEZÉSEK

$$5) \frac{25x^{-3}}{y^{-4}} \cdot \frac{y^4}{5x^{-7}};$$

$$6) 28c^3d^{-2} \cdot (2cd^{-1})^{-2}!$$

280.* Határozzátok meg az alábbi kifejezések értékét:

$$1) 8^{-3} \cdot 2^7;$$

$$5) 25^{-4} : (0,2^{-3})^{-2};$$

$$2) 27^{-2} : 9^{-4};$$

$$6) \frac{(-36)^{-3} \cdot 6^8}{216^{-5} \cdot (-6)^{18}};$$

$$3) 100^{-2} : 1000^{-5} \cdot 0,01^6;$$

$$7) \frac{6^{-10}}{81^{-2} \cdot 16^{-3}};$$

$$4) \left(2\frac{1}{4}\right)^{-4} \cdot \left(\left(\frac{2}{3}\right)^3\right)^{-3};$$

$$8) \frac{14^5 \cdot 2^{-7}}{28^{-2} \cdot 7^8} !$$

281.* Határozzátok meg az alábbi kifejezések értékét:

$$1) 9^{-4} \cdot 27^2;$$

$$4) 8^{-2} : 0,5^4;$$

$$2) 32^{-5} : 64^{-4};$$

$$5) \frac{22^6 \cdot 2^{-8}}{44^{-3} \cdot 11^0};$$

$$3) \left(2\frac{7}{9}\right)^{-7} \cdot \left(\left(\frac{3}{5}\right)^{-3}\right)^5;$$

$$6) \frac{10^{-2} \cdot 15^{-4}}{30^{-6}} !$$

282.* Végezzétek el a kijelölt műveleteket! Az eredményt írjátok fel olyan kifejezésként, melyben nincs negatív hatványkitevő:

$$1) -2,4a^{-4}b^3 \cdot (-2a^{-3}c^{-5})^{-3}; \quad 4) \left(-\frac{1}{6}a^{-3}b^{-6}\right)^{-3} \cdot (-6a^2b^9)^{-2};$$

$$2) (-10x^{-2}yz^{-8})^{-2} \cdot (0,1yz^{-4})^{-2}; \quad 5) \left(\frac{7p^{-3}}{5k^{-1}}\right)^{-2} \cdot 49m^{-6}n^4;$$

$$3) 1\frac{7}{9}m^{-6}n \cdot \left(1\frac{1}{3}m^{-1}n^{-4}\right)^{-3}; \quad 6) \left(\frac{4x^{-5}}{3y^{-2}}\right)^{-3} \cdot (16x^{-6}y^4)^2 !$$

283.* Végezzétek el a kijelölt műveleteket! Az eredményt írjátok fel olyan kifejezésként, melyben nincs negatív hatványkitevő:

$$1) 3,6a^{-8}b^4 \cdot (-3a^{-3}b^{-7})^{-2}; \quad 3) \left(\frac{5m^{-4}}{6n^{-1}}\right)^{-3} \cdot 125m^{-10}n^2;$$

$$2) 1\frac{9}{16}x^{-6}y^2 \cdot \left(1\frac{1}{4}x^{-1}y^{-3}\right)^{-3}; \quad 4) \left(\frac{7a^{-6}}{b^5}\right)^{-2} \cdot (a^{-4}b)^4 !$$

284.* Emeljétek ki a zárójel elé az a -t, az adott kitevők közül a legkisebbiken:

$$1) a^3 - 2a^4; \quad 2) a^{-3} - 2a^{-4}; \quad 3) a^3 - 2a^{-4}!$$

285.* Emeljétek ki a zárójel elé a b -t az adott kitevők közül a legkisebbiken:

$$1) b^3 + 3b^2; \quad 2) b^{-3} + 3b^{-2}; \quad 3) b^{-3} + 3b^2!$$

286.* Alakítsátok szorzattá az alábbi kifejezéseket:

1) $a^{-2} - 4$;

4) $a^{-3} + b^{-3}$;

2) $a^{-4}b^{-6} - 1$;

5) $m^{-1} - 6m^{-2}p^{-1} + 9p^{-2}$;

3) $25x^{-8}y^{-12} - z^{-2}$;

6) $a^{-8} - 49a^{-2}$!

287.* Alakítsátok szorzattá az alábbi kifejezéseket:

1) $x^{-4} - 25$;

3) $a^{-10} + 8a^{-5}b^{-7} + 16b^{-14}$;

2) $m^{-6} - 8n^{-3}$;

4) $a^{-4} - a^{-2}$!

288.* Igazoljátok az alábbi azonosságot:

$$a^{-8} - b^{-8} = (a^{-1} - b^{-1})(a^{-1} + b^{-1})(a^{-2} + b^{-2})(a^{-4} + b^{-4})!$$

289.* Egyszerűsítétek a következő kifejezéseket:

1) $(a^{-4} + 3)(a^{-4} - 3) - (a^{-4} + 2)^2$;

2) $\frac{m^{-2} - n^{-2}}{m^{-1} + n^{-1}}$;

3) $\frac{2x^{-2} + y^{-2}}{3x^{-2} - 3x^{-1}y^{-1}} - \frac{x^{-1}}{x^{-1} - y^{-1}}$;

4) $\frac{a^{-5} + b^{-5}}{a^{-6}} : \frac{a^{-3}b^{-5} + a^{-8}}{a^{-4}}$!

290.* Egyszerűsítétek a következő kifejezéseket:

1) $(x^{-2} - 1)^2 - (x^{-2} - 4)(x^{-2} + 4)$;

2) $\frac{a^{-2} - 10a^{-1}b^{-1} + 25b^{-2}}{a^{-1} - 5b^{-1}}$;

3) $\frac{5m^{-2} + n^{-2}}{4m^{-3} + 4m^{-1}n^{-2}} - \frac{m^{-1}}{m^{-2} + n^{-2}}$;

4) $\frac{b^{-1} + 3c^{-1}}{c^{-2}} : \frac{bc}{b^{-2}c^{-1} + 3b^{-1}c^{-2}}$!

291.* Határozzátok meg az alábbi számok karakterisztikáját, ha az a szám karakterisztikája -4 :

1) $10a$;

3) $100a$;

5) $10\,000a$;

2) $0,1a$;

4) $0,001a$;

6) $1\,000\,000a$!

292.* Határozzátok meg az alábbi számok karakterisztikáját, ha a b szám karakterisztikája 3 :

1) $10b$;

2) $0,01b$;

3) $0,0001b$;

4) $1000b$!

293.* Végezzétek el a kijelölt műveleteket, és írjátok fel az eredmény normálalakját:

1) $(1,8 \cdot 10^4) \cdot (6 \cdot 10^3)$;

3) $\frac{5,4 \cdot 10^5}{9 \cdot 10^8}$;

2) $(3 \cdot 10^6) \cdot (5,2 \cdot 10^{-9})$;

4) $\frac{1,7 \cdot 10^{-6}}{3,4 \cdot 10^{-4}}$!

1. §. RACIONÁLIS KIFEJEZÉSEK

294.* Végezzétek el a kijelölt műveleteket! Az eredményt írjátok fel normálalakban:

1) $(1,6 \cdot 10^{-5}) \cdot (4 \cdot 10^7)$; 3) $\frac{7 \cdot 10^{-4}}{1,4 \cdot 10^{-6}}$;

2) $(5 \cdot 10^{-3}) \cdot (1,8 \cdot 10^{-1})$; 4) $\frac{6,4 \cdot 10^1}{8 \cdot 10^{-2}}$.

295.* A Nap és a Föld közötti távolság $1,5 \cdot 10^8$ km, a fény sebessége pedig $3 \cdot 10^8$ m/s. Hány perc alatt ér a napfény a Földre? Az eredményt kerekítsétek egyesekre!

296.* A réz sűrűsége $8,9 \cdot 10^3$ kg/m³. Határozzátok meg annak a rézlemeznek a tömegét, melynek hossza $2,5 \cdot 10^{-1}$ m, szélessége 12 cm, vastagsága pedig 0,02 m!

297.* A Föld tömege $6 \cdot 10^{24}$ kg, a Hold tömege $7,4 \cdot 10^{22}$ kg. Hányszor könnyebb a Hold a Földnél? Az eredményt kerekítsétek egyesekre!

298.** Egyszerűsítsétek a következő kifejezéseket! Az eredményt írjátok fel olyan racionális kifejezésként, mely nem tartalmaz negatív hatványkitevőt:

1) $\left(\frac{a^{-1}}{a^{-1} + b^{-1}} - \frac{a^{-1} - b^{-1}}{a^{-1}} \right) : \left(\frac{b}{a^2} \right)^{-1}$;

2) $\frac{b^{-2} - 2}{b^{-2}} - \frac{b^{-4} - 4}{b^{-2}} \cdot \frac{1}{b^{-2} - 2}$;

3) $\frac{5c^{-3}}{c^{-3} - 3} - \frac{c^{-3} + 6}{2c^{-3} - 6} \cdot \frac{90}{c^{-6} + 6c^{-3}}$;

4) $\left(\frac{m^{-4}}{m^{-4} - 4} - \frac{3m^{-4}}{m^{-8} - 8m^{-4} + 16} \right) : \frac{16 - m^{-8}}{m^{-4} - 7} + \frac{8m^{-4}}{m^{-4} - 4}$!

299.** Egyszerűsítsétek a következő kifejezéseket! Az eredményt írjátok fel olyan racionális kifejezésként, mely nem tartalmaz negatív hatványkitevőt:

1) $\frac{a^{-2} + 5}{a^{-4} - 6a^{-2} + 9} : \frac{a^{-4} - 25}{4a^{-2} - 12} - \frac{2}{a^{-2} - 5}$;

2) $\left(b^{-1} - \frac{5b^{-1} - 36}{b^{-1} - 7} \right) \cdot \left(2b^{-1} + \frac{2b^{-1}}{b^{-1} - 7} \right)^{-1}$!

300.** Az a szám karakterisztikája -4 , a b számé pedig 3. Mennyi lehet az alábbi kifejezések értékének a karakterisztikája:

1) ab ; 2) $a + b$; 3) $a + 10b$; 4) $10a + 10b$?

301.** Az m szám karakterisztikája 2, az n számé pedig 4. Mennyi lehet az alábbi kifejezések értékének karakterisztikája:

- 1) mn ; 2) $0,01mn$; 3) $100m + n$; 4) $0,01m + n$?

ISMÉTLŐ FELADATOK

- 302.** Két természetes szám számtani közepe 18. Ha a nagyobbik számot elosztjuk a kisebbikkel, akkor a nem teljes hányados 3, a maradék pedig 4. Határozzátok meg ezeket a számokat!
- 303.** A villamos energiával való takarékoság jegyében meghirdetett akció eredményeképpen az első hónapban 20%-kal csökkent a fogyasztás, a második hónapban az előző hónaphoz képest még 10%-kal és a harmadik hónapban, szintén az előző hónaphoz képest 5%-kal. Összesen hány százalékkal csökkent az energiafogyasztás?
- 304.** A vízzel előtöltött helyiségből a víz eltávolítására 3 szivattyút hoztak. Ha csak az első üzemel, akkor annak 12 órára van szüksége a munka elvégzésére, a másodiknak 15 órára, a harmadiknak pedig 20 órára. Az első 3 órában csak az első és a második szivattyú működött, majd bekapcsolták a harmadikat is. Hány óra alatt szivattyúzták ki a vizet a helyiségből?
- 305.** Egy könyv 19 hrvnyába került. Sajnos a vásárlónak csak 5 hrvnyás címletei voltak, az eladónak pedig csak 2 hrvnyásai. El tud-e számolni a vásárló a könyvért anélkül, hogy valahol felváltaná a pénzét? Ha igen, akkor legalább hány darab 5 hrvnyással kell rendelkeznie a vásárlónak, és hány darab 2 hrvnyással a vevőnek?

FELKÉSZÜLÉS AZ ÚJ TÉMÁHOZ

306. Határozzátok meg az $y = -\frac{14}{x}$ függvény helyettesítési értékét a megadott helyen:

- 1) $x = 2$; 2) $x = -1$; 3) $x = 3,5$; 4) $x = -6$!

307. Egy függvény az $y = \frac{x+2}{x-6}$ képlettel van megadva. Mi a függvény értelmezési tartománya? Töltsétek ki a táblázatot, számítsátok ki a függvény értékét a megadott helyeken!

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

308. Ábrázoljátok az $y = 2x - 1$ függvény grafikonját! Hozzá tartozik-e a grafikonhoz az: 1) $A(30; 59)$; 2) $B(-15; -29)$ pont?
309. Rajz nélkül határozzátok meg, metszik-e egymást az $y = 2,7x - 8$ és az $y = 1,2x + 7$ függvények grafikonjai?
310. Oldjátok meg grafikusan a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} 2x - y = 3, \\ 3x + y = 7! \end{cases}$$

Frissítsétek fel a 17., 18. és 19. pontok tartalmát (231–232. oldalon)!

NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREK HASZNÁLATA

311. Az egyenes kieséses rendszerben lebonyolított teniszbajnokság végén kiderült, hogy csak 32 olyan játékos volt, aki többször nyert, mint veszített. Hány teniszező vett részt a versenyen?

10. Az $y = \frac{k}{x}$ képlettel megadott függvény és grafikonja

Már a 6. osztályban megismerkedtetek olyan mennyiségekkel melyek között egyenes arányosság áll fenn, vagyis ha az egyik mennyiség néhányszorosan növekszik (csökken), a másik mennyiség ugyanannyiszorosan növekszik (csökken).

A 7. osztályban megbizonyosodtatok arról, hogy az egyenes arányosság egyértelmű hozzárendelés, s aminek az $y = kx$, $k \neq 0$ képlettel megadott függvény felel meg.

Létezik olyan egyértelmű megfeleltetés, ahol az egyik mennyiség néhányszorosan **növekedése** (**csökkenése**), a másik mennyiség ugyanolyan arányú **csökkenését** (**növekedését**) vonja maga után. Ebben az esetben a két mennyiség **fordítottan arányos**.

1. PÉLDA

Van 100 hrvnyánk. Jelöljük x -szel 1 kg termék árát, az egységárat, y -nal azt a mennyiséget, amit ebből a termékből vásárolni tudunk 100 hrvnyáért.

10. Az $y = \frac{k}{x}$ képlettel megadott függvény és grafikonja

Érthető, hogy ez a két mennyiség fordítottan arányos: minél drágább az áru, annál kevesebbet tudunk vásárolni és fordítva, minél olcsóbb annál többet vehetünk.

Ennek az egyértelmű megfeleltetésnek az $y = \frac{100}{x}$ képlettel megadott függvény felel meg.

2. PÉLDA

Vegyünk egy olyan téglalapot, melynek a területe 18 cm^2 , oldalai pedig x és y cm. Akkor

$$y = \frac{18}{x}.$$

A nevezőben lévő x néhányszoros növelése (csökkentése) az y ugyanolyan arányú csökkenését (növelését) eredményezi. Tehát adott terület esetén a téglalap oldalai fordítottan arányosak.

A megvizsgált példákban olyan valós helyzetekkel találkoztunk, melyek matematikai modellje egy függvény, melyet az $y = \frac{k}{x}$ képlettel lehet megadni.

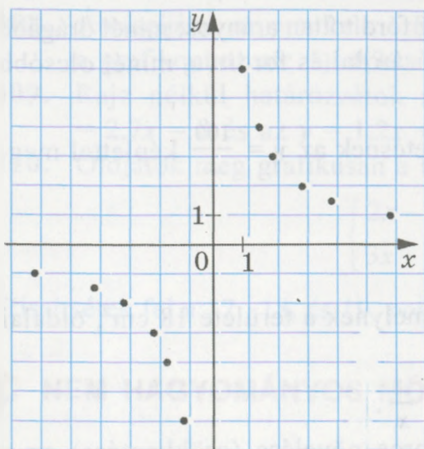
M e g h a t á r o z á s. Az $y = \frac{k}{x}$ képlettel megadott függvényt, ahol $k \neq 0$, **f o r d í t o t t a r á n y o s s á g - n a k** nevezzük.

Mivel az $y = \frac{k}{x}$ kifejezés értelmezhető bármely nullával nem egyenlő számra, így az $y = \frac{k}{x}$ függvény értelmezési tartománya minden 0-tól eltérő szám.

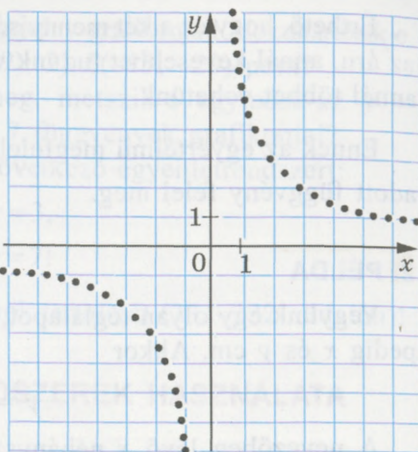
Vizsgáljuk meg az $y = \frac{6}{x}$ függvényt! Az alábbi táblázat néhány argumentum értéket és az ezeken a helyeken felvett függvényértéket tartalmaz.

x	-6	-4	-3	-2	-1,5	-1	1	1,5	2	3	4	6
y	-1	-1,5	-2	-3	-4	-6	6	4	3	2	1,5	1

Jelöljük a koordináta-rendszerben a táblázatban feltüntetett pontokat (3. ábra).



3. ábra



4. ábra

Minél több olyan pontot tüntetünk fel, amely kielégíti az $y = \frac{6}{x}$ egyenletet (4. ábra), annál kevésbé fog eltérni a rajzunk az $y = \frac{6}{x}$ függvény grafikonjától.

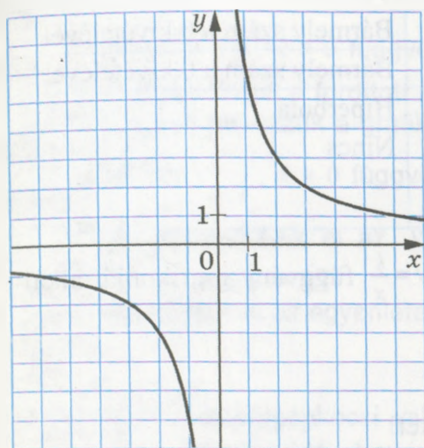
A feltüntetett pontok között nem lehet olyan pont, melynek az abszcisszája 0, mivel a nulla nem tartozik hozzá a függvény értelmezési tartományához. Ezért a függvény grafikonjának nincs közös pontja az ordinátatengellyel.

Ezenkívül a függvény grafikonja nem metszi az abszcisszatengelyt sem, mivel a $\frac{6}{x} = 0$ egyenletnek nincs megoldása. Tehát a nulla nem tartozik hozzá az értékkészlethez sem.

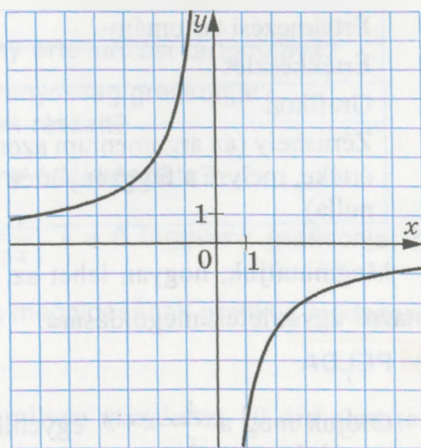
Ha $x > 0$, akkor $\frac{6}{x} > 0$, vagyis $y > 0$; ha pedig $x < 0$, és $y < 0$. Tehát a függvény grafikonja csak az I. és a III. negyedben helyezkedhet el.

Megjegyezzük, hogy ha növeljük az abszcissza abszolút értékét, akkor a grafikon $y = \frac{6}{x}$ pontjai egyre közelebb kerülnek az abszcisszatengelyhez. Ez a távolság akármilyen kicsi is lehet, de sose lehet nullával egyenlő. Valójában minél nagyobb az argumentum abszolút értéke, annál kisebb a megfelelő függvényérték.

10. Az $y = \frac{k}{x}$ képlettel megadott függvény és grafikonja



5. ábra



6. ábra

Hasonlóan megállapíthatjuk, hogy az ordináta növekedésével a grafikon és az ordinátatengely közötti távolság lesz egyre kisebb, de sohasem lesz nullával egyenlő.

Ha sikerült volna feltüntetni az összes olyan pontot, amely megfelel az $y = \frac{6}{x}$ egyenletnek akkor az 5. ábrán látható rajzot kaptuk volna.

Az $y = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$ függvény grafikonját **hiperbolának** nevezzük. A hiperbola két részből áll, úgynevezett **ágakból**. Az 5. ábrán az $y = \frac{6}{x}$ hiperbola látható.

Ha $k > 0$, akkor a hiperbola ágai az I. és III. negyedbe esnek, ha $k < 0$, akkor a II. és IV. negyedbe.

A 6. ábrán az $y = -\frac{6}{x}$ függvény grafikonja látható.

Megjegyezzük, hogy $y = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$ függvény értékészlete bármely nullától eltérő szám.

A következő táblázatban összefoglaltuk az $y = \frac{k}{x}$ függvény azon tulajdonságait, melyeket ebben a pontban tárgyaltuk.

1. §. RACIONÁLIS KIFEJEZÉSEK

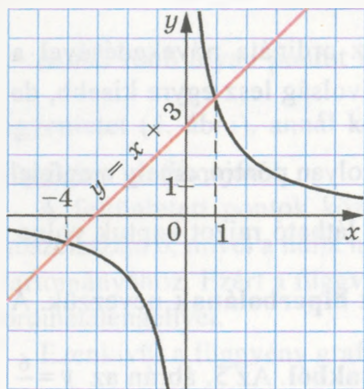
Értelmezési tartomány	Bármely szám a 0 kivételével
Értékkészlet	Bármely szám a 0 kivételével
Grafikon	Hiperbola
Zérushely (az argumentum azon értéke, melyre a függvényérték nulla)	Nincs

Megmutatjuk, hogyan lehet az $y = \frac{k}{x}$ függvény grafikonját alkalmazni egyenletek megoldására.

PÉLDA

Oldjuk meg a $\frac{4}{x} = x + 3$ egyenletet!

Megoldás



7. ábra

Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az $y = \frac{4}{x}$ és $y = x + 3$ függvények grafikonját (7. ábra). A grafikonok két pontban metszik egymást, melyek abszcisszája 1 és -4. A metszéspontokban a függvények azonos értéket vesznek fel. Vagyis a meghatározott abszcisszák helyén a $\frac{4}{x}$ és $x + 3$ kifejezések értéke egyenlő, tehát az 1 és a -4 a $\frac{4}{x} = x + 3$ egyenlet gyökei. Az ellenőrzés ezt igazolja is.

Az alkalmazott módszer az egyenletek megoldásának **grafikus módszere**. A 7. osztályban már megtanultátok az egyenletrendszerek megoldásának grafikus módszerét, és tudjátok, hogy ez a módszer nem mindig pontos. Ezért a kapott gyökök ellenőrzése kötelező, ha az egyenletet grafikusan oldjuk meg.

A későbbiekben (21. pont) megtanuljátok ezeket az egyenleteket megoldani nem grafikusán is.



1. Magyarazzátok meg, mit értünk fordított arányosságon!
2. Melyik függvényt nevezzük fordított arányosságnak?

10. Az $y = \frac{k}{x}$ képlettel megadott függvény és grafikonja

3. Mi az $y = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$ függvény értelmezési tartománya?
4. Hogyan hívjuk a fordított arányosság grafikonját?
5. Hogyan nevezzük a grafikon részeit?
6. Mi az $y = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$ függvény értékkészlete?
7. Hol helyezkedik el az $y = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$ függvény grafikonja, ha $k > 0$? Ha $k < 0$?
8. Mondjátok el az egyenletek megoldásának grafikus módszerét!

312.° Egy személygépkocsi valamilyen útszakaszt 10 óra alatt tesz meg. Mennyi idő alatt teszi meg ugyanezt a távolságot, ha a sebességét:

- 1) 2-szeresére növeli;
- 2) 1,2-szeresére csökkenti?

313.° Egy téglalap hossza 30 cm. Mekkora lesz az ugyanakkora területű téglalap hossza, ha a szélessége:

- 1) 1,5-szer nagyobb;
- 2) 3,2-szer kisebb?

314.° 40 m anyagot vásároltak. Hány méter anyagot vehettek volna ugyanazért a pénzért, ha az anyag egységára:

- 1) 2, 6-szer olcsóbb;
- 2) 1,6-szer drágább?

315.° Egy gyalogos 12 km-t tett meg. Töltsétek ki a táblázatot, ha az első sorban a sebessége szerepel, a másodikban pedig az idő!

v , km/h	5		2,4	
t , h		3		$3\frac{1}{3}$

Adjátok meg képlettel, hogyan függ a t (az idő) a v -től (sebességtől)!

316.° Egy téglatest térfogata 48 cm^3 . Töltsétek ki a táblázatot, ha az első sorban a téglatest alapterületét tüntettük fel, a második sorban pedig a magasságát!

S , cm^2	16		240	
h , cm		8		4,8

Adjátok meg képlettel, hogyan függ a h az S -től!

317.° 7 azonos munkabírási dolgozó a kijelölt feladatot 12 nap alatt végzi el. Hány ugyanilyen tempóban dolgozó munkásra van szükség ahhoz, hogy ezt a feladatot 4 nap alatt végezzék el?

318.° A takarmánykészlet 24 lónak 18 napra elegendő. Hány napra elegendő ez a mennyiség 36 lónak?

319.° Az alábbi függvények közül nevezzétek meg a fordított arányosságot:

1) $y = 2x$; 3) $y = \frac{2}{x}$; 5) $y = -\frac{0,8}{x}$; 7) $y = \frac{1}{2x}$;

2) $y = \frac{x}{2}$; 4) $y = -\frac{1}{x}$; 6) $y = \frac{2x}{3}$; 8) $y = \frac{2}{3x}$!

320.° Az $y = \frac{24}{x}$ függvényre határozzátok meg:

- 1) a függvényértéket, ha az argumentum értéke: -3 ; 6 ; $0,2$;
- 2) az argumentum értékét, ha a függvényérték: 12 ; -6 ; 100 !

321.° Az $y = -\frac{36}{x}$ függvényre határozzátok meg:

- 1) a függvényértéket, ha az argumentum értéke: -4 ; $0,9$; 18 ;
- 2) az argumentum értékét, ha a függvényérték: 6 ; $-0,3$; 8 !

322.° Ábrázoljátok az $y = -\frac{8}{x}$ függvény grafikonját! Olvassátok le a grafikonról:

- 1) a függvényértékeket a 4 ; -1 argumentum helyen;
- 2) az argumentum azon értékeit, melyek helyén a függvényérték 2 ; -8 ;
- 3) az argumentum azon értékeit, melyek helyén a függvényérték pozitív!

323.° Ábrázoljátok az $y = \frac{10}{x}$ függvény grafikonját! Olvassátok le a grafikonról:

- 1) a függvényértékeket a 2 ; -10 helyen;
- 2) az argumentum azon értékeit, melyek helyén a függvényérték 5 ; -2 ;
- 3) az argumentum azon értékeit, melyek helyén a függvényérték negatív!

10. Az $y = \frac{k}{x}$ képlettel megadott függvény és grafikonja

324.° Rajz nélkül döntsék el, hogy a megadott pontok illeszkednek-e az $y = \frac{28}{x}$ függvény grafikonjára:

- | | |
|-----------------|-------------------|
| 1) $A(-4; -7);$ | 3) $C(0,5; 14);$ |
| 2) $B(14; -2);$ | 4) $D(0,2; 140)!$ |

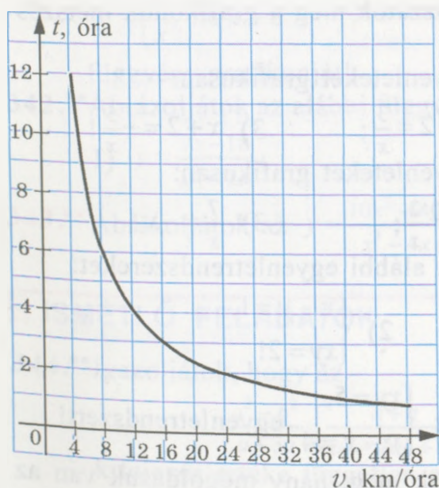
325.° Rajz nélkül döntsék el, hogy a megadott pontok illeszkednek-e az $y = -\frac{48}{x}$ függvény grafikonjára:

- | | |
|-----------------|-------------------|
| 1) $A(-6; -8);$ | 3) $C(0,3; -16);$ |
| 2) $B(12; -4);$ | 4) $D(0,4; 120)!$ |

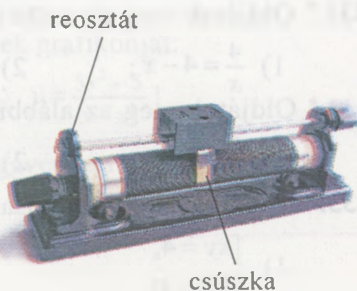
326.* Az A és B helységek közötti távolságot v sebességgel t idő alatt lehet megtenni. Az idő és a sebesség közötti összefüggést a 8. ábra szemlélteti. Olvassátok le a grafikonról:

- 1) hány óra alatt lehet ezt a távolságot 8 km/h sebességgel megtenni, ha a sebesség 24 km/h?
- 2) mekkora sebességgel kell haladni, ha 3 óra alatt akarunk az A helységből a B -be eljutni; és ha 4 óra alatt?
- 3) mekkora a helységek közötti távolság?

327.* Egy huzalos reosztátot tápegységhez kapcsoltak (9. ábra). A reosztát R ellenállása, amely 0 és 6 ohm között változik, függ a csúszka helyzetétől. A reosztát végein a feszültség állandó.

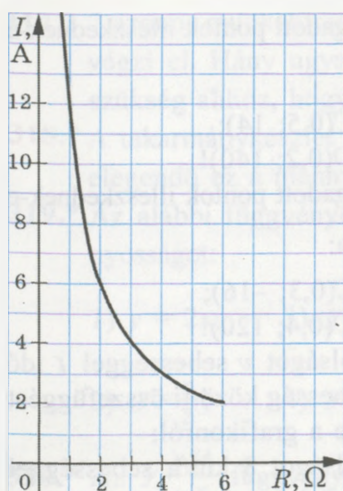


8. ábra



9. ábra

1. §. RACIONÁLIS KIFEJEZÉSEK



10. ábra

Olvassátok le az I áramerősség, az R ellenállás közötti összefüggést ábrázoló grafikonról (10. ábra):

- 1) mennyi az áramerősség, ha az ellenállás 2Ω ;
- 2) milyen ellenállásnál lesz az áramerősség $3 A$;
- 3) mekkora a reosztát végein a feszültség!

328.* Határozzátok meg k azon értékeit, amelyek mellett az alábbi

pontok illeszkednek az $y = \frac{k}{x}$

függvény grafikonjához:

- 1) $A(-5; 4)$; 3) $C(1,5; -8)$!

- 2) $B\left(\frac{1}{6}; -2\right)$;

329.* Az $A(10; 1,6)$ koordinátájú pont az $y = \frac{k}{x}$ függvény grafikonjához tartozik. Illeszkednek-e a következő pontok a függvény grafikonjához:

- 1) $B(-1; -16)$;

- 2) $C(-2; 8)$?

330.* Ábrázoljátok az $y = \frac{4}{x}$ és az $y = x$ függvényeket közös koordináta-rendszerben! Határozzátok meg a grafikonok metszéspontjainak koordinátáit!

331.* Oldjátok meg az alábbi egyenleteket grafikusan:

1) $\frac{4}{x} = 4 - x$;

2) $x - 2 = \frac{3}{x}$;

3) $x + 2 = -\frac{5}{x}$!

332.* Oldjátok meg az alábbi egyenleteket grafikusan:

1) $\frac{8}{x} = 6 - x$;

2) $2x = \frac{2}{x}$;

3) $\frac{7}{x} = -x$!

333.* Oldjátok meg grafikusan az alábbi egyenletrendszereket:

1) $\begin{cases} xy = 4, \\ 4y = x; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - y = 1, \\ xy = 2! \end{cases}$

334.* Oldjátok meg grafikusan az $\begin{cases} xy = 5, \\ y - x = 4 \end{cases}$ egyenletrendszert!

335.* Rajz segítségével állapítsátok meg, hány megoldásuk van az alábbi egyenletrendszereknek:

10. Az $y = \frac{k}{x}$ képlettel megadott függvény és grafikonja

1) $\begin{cases} xy = -1, \\ x + 3y = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} xy = -1, \\ x - 3y = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} xy = 6, \\ 3x - 2y = 6! \end{cases}$

336.* Grafikus módszerrel határozzátok meg az $\begin{cases} xy = -8, \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$ egyenletrendszer gyökeinek számát!

337.** Határozzátok meg az $y = \frac{64}{x}$ függvény grafikonjának azon pontjait, melyek abszcisszája és ordinátája egyenlő!

338.** Határozzátok meg az $y = -\frac{25}{x}$ függvény grafikonjának azon pontjait, melyek abszcisszája és ordinátája ellentett számok!

339.** Ábrázoljátok az $y = \frac{6}{|x|}$ függvényt!

340.** Ábrázoljátok a következő függvények grafikonját:

1) $y = \begin{cases} -\frac{2}{x}, & \text{ha } x \leq -1, \\ x + 3, & \text{ha } x > -1; \end{cases}$

2) $y = \begin{cases} -2x + 10, & \text{ha } x \leq 2, \\ \frac{12}{x}, & \text{ha } 2 < x < 4, \\ 3, & \text{ha } x \geq 4! \end{cases}$

341.** Ábrázoljátok az

$$y = \begin{cases} -\frac{4}{x}, & \text{ha } x < -2, \\ 2, & \text{ha } -2 \leq x \leq 2, \\ \frac{4}{x}, & \text{ha } x > 2 \end{cases}$$

függvény grafikonját!

342.** Ábrázoljátok az alábbi függvények grafikonját:

1) $y = \frac{9x - 18}{x^2 - 2x};$

2) $y = \frac{5x^2 - 5}{x - x^3}!$

343.** Ábrázoljátok az $y = \frac{10x^2 - 40}{x^3 - 4x}$ függvény grafikonját!

ISMÉTLŐ FELADATOK

344.** Igazoljátok, hogy az

$$\frac{a^2 - b^2}{a + 3b} \cdot \left(\frac{a + b}{a^2 - 2ab + b^2} + \frac{b}{a^2 - b^2} \right) - \frac{b}{a - b}$$

kifejezés értéke független az a és b változók minden megengedett értékére!

345. Oldjátok meg a

$$\frac{3}{5x+25} + \frac{1}{2x-10} = \frac{5}{x^2-25}$$

egyenletet!

346. Egy szekrény árát 30%-kal csökkentették, majd később 30%-kal növelték. Hogyan változott a szekrény ára a kezdeti árhoz képest, növekedett-e vagy csökkent, és hány százalékkal?
347. (*Szun-Ce feladata*¹). Két férfinak a megkeresett pénzérméiket úgy kellett elosztaniuk egymás között, hogy az első pénzének és a második pénze felének az összege ugyanannyi legyen, mint a második pénzének és az első pénze a $\frac{2}{3}$ -nak az összege. Ez az összeg mindkét esetben 48 pénzérme. Mennyi érmét kaptak a férfiak külön-külön?
348. Ha egy sífutó 10 km/h sebességgel halad, akkor a tervezettnél 1 órával később ér célba, ha 15 km/h-s sebességgel haladna, akkor a tervezettnél 1 órával korábban érkezne meg. Milyen sebességgel kell haladnia, hogy a tervezett időben érkezzen meg?

NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREK HASZNÁLATA

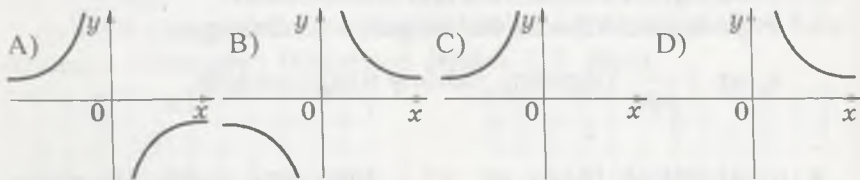
349. Három tanuló mindegyike felírt 100 szót. Majd azokat a szavakat, melyeket legalább ketten felírtak, kihúzták. Így az egyik tanuló listájában 45 szó maradt, a másodikéban 68, míg a harmadik tanuló szöszedetében 54. Bizonyítsátok be, hogy legalább egy olyan szó volt, amit mind a hárman felírtak!

ELLENŐRIZZÉTEK MAGATOKAT! 3. SZ. TESZTFELADAT

1. Oldjátok meg az $\frac{x^2-100}{x-10}=0$ egyenletet!
 A) -10; 10; B) 10; C) -10; D) nincs megoldás.
2. Oldjátok meg az $\frac{x-10}{x^2-100}=0$ egyenletet!
 A) -10; 10; B) 10; C) -10; D) nincs megoldás.

¹ Szun-Ce kínai matematikus (III.-IV. század).

3. Melyik egyenlőség igaz az alábbiak közül?
- A) $10^{-3} = -1000$; C) $(-2)^{-3} = -\frac{1}{8}$;
 B) $\left(-1\frac{1}{3}\right)^{-2} = -\frac{9}{16}$; D) $\frac{1}{7^{-2}} = -49$.
4. Az alábbi kifejezések közül melyik 42 000 normálalakja?
- A) $4,2 \cdot 10^3$; C) $0,42 \cdot 10^5$;
 B) $4,2 \cdot 10^4$; D) $42 \cdot 10^3$.
5. Az alábbi tizedes törtek közül melyik normálalakja $6,3 \cdot 10^{-3}$?
- A) 0,63; B) 0,063; C) 0,0063; D) 0,00063.
6. Írjátok fel $\frac{1}{25}$ -öt 5 hatványaként!
- A) 5^{-2} ; B) 5^2 ; C) 5^{-3} ; D) 5^3 .
7. Az $(1,7 \cdot 10^8) \cdot (6 \cdot 10^{-3})$ kifejezés értéke melyikkel egyenlő a következő kifejezések közül?
- A) $1,02 \cdot 10^5$; B) $1,02 \cdot 10^6$; C) $10,2 \cdot 10^6$; D) $1,02 \cdot 10^7$.
8. Az alábbi számok közül melyikkel egyenlő a $\frac{9^{-2} \cdot 3^{-5}}{81 \cdot 27^{-1}}$ kifejezés értéke?
- A) 81; B) $\frac{1}{81}$; C) 27; D) $\frac{1}{27}$.
9. Az alábbi függvények közül melyik nem fordított arányosság?
- A) $y = \frac{3}{x}$; B) $y = -\frac{3}{x}$; C) $y = \frac{3}{2x}$; D) $y = \frac{3x}{2}$.
10. Melyik rajzon látható az $y = -\frac{4}{x}$ függvény grafikonja?



11. A k mely értékénél illeszkedik az $A(-3; 0,6)$ pont az $y = \frac{k}{x}$ függvény grafikonjára?
- A) -1,8; B) -0,2; C) -2,4; D) -3,6.
12. Oldjátok meg a $\frac{2x-1}{x+4} - \frac{3x+1}{4-x} = \frac{4x^2+8}{x^2-16}$ egyenletet! Mely számok az egyenlet gyökei?
- A) 0, 4; B) -4; 0; C) -4; D) 0.



ÖSSZEFOGLALÁS

Ebben a paragrafusban

- a következő fogalmakkal ismerkedtettek meg:
 - racionális tört;
 - törtkifejezés;
 - racionális kifejezés;
 - a változó megengedett értékei;
 - racionális egyenlet;
 - egyenértékű (ekvivalens) egyenletek;
 - egész kitevőjű hatvány;
 - a szám normálalakja;
 - fordított arányosság;
- elsajátították:
 - a racionális törtök egyszerűsítését;
 - műveletek végzését racionális törtökkel;
 - racionális egyenletek megoldását;
 - a számot nulladik hatványra és negatív kitevőre emelni;
- megtanulták:
 - a tört alaptulajdonságát;
 - az egyenletek ekvivalens átalakításait;
 - az egész kitevős hatványok azonosságait;
 - az $y = \frac{k}{x}$ függvény néhány tulajdonságát;
- megtudták, hogy az $y = \frac{k}{x}$ függvény grafikonja olyan görbe, amit hiperbolának hívnak;
- megismerkedtek az egyenletek megoldásának grafikus módszerével.

2.§. NÉGYZETGYÖK. VALÓS SZÁMOK

- Megvizsgáljuk az $y = x^2$ függvény néhány tulajdonságát.
- Megismerkedünk egy új művelettel – a „négyzetgyökvonással”. Érthetővé válik számunkra, hogy a bennünket körülvevő világ tanulmányozásához nem elegendő a racionális számok ismerete.
- Megtanuljuk a „számtani négyzetgyök” tulajdonságait, és a négyzetgyököket tartalmazó kifejezések egyszerűsítését.

11. A másodfokú függvény $y = x^2$ és grafikonja

Jelöljük y -nal egy olyan négyzet területét, melynek oldalhossza x . Akkor $y = x^2$.

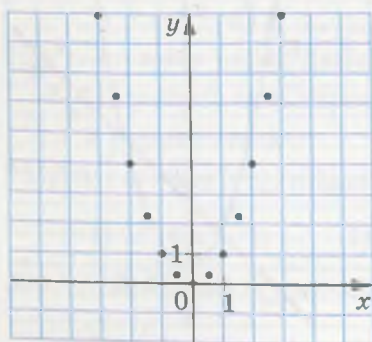
Ha megváltoztatjuk a négyzet x oldalhosszát, akkor meg fog változni a területe is.

Érthető, hogy minden x értéknek csak egy y érték felel meg. Tehát az x és az y mennyiségek között egyértelmű a megfeleltetés, vagyis az $y = x^2$ képlet egy függvényt ad meg.

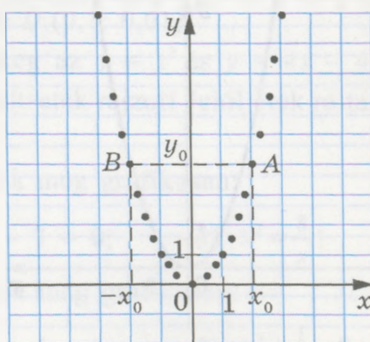
Vizsgáljuk meg az $y = x^2$ képlettel megadott függvényt, melynek az értelmezési tartománya bármely szám. Az alábbi táblázat néhány argumentum értéket és a hozzájuk rendelt függvényértéket tartalmazza.

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y	9	6,25	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9

Jelöljük a koordináta-rendszerben azokat a pontokat, melyek koordinátái a táblázatban feltüntetett értékek (11. ábra).



11. ábra



12. ábra

2. §. NÉGYZETGYÖK. VALÓS SZÁMOK

Minél több olyan pontot tüntetünk fel, melyek koordinátái gyökei az $y = x^2$ egyenletnek, annál kevésbé fog eltérni a kapott görbe az $y = x^2$ függvény grafikonjától (12. ábra).

A $(0; 0)$ koordinátájú pont megoldása az $y = x^2$ egyenletnek, így a függvény grafikonja áthalad az origón. Mivel $y = x^2$ és $x^2 \geq 0$, így $y \geq 0$ tehát a feltüntetett pontok között nem lehet olyan, melynek ordinátája negatív.

A függvény értékkészlete nemnegatív szám.

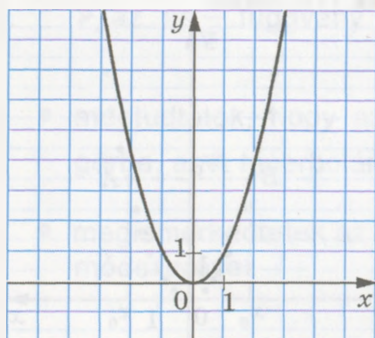
Mivel $x^2 = (-x)^2$, ezért megállapíthatjuk, hogy ha az $A(x_0; y_0)$ pont rajta van a függvény grafikonján, akkor a $B(-x_0; y_0)$ pont is illeszkedik a görbére (12. ábra).

Ha az összes olyan pontot fel tudnánk tüntetni, melyek koordinátái kielégítik az $y = x^2$ egyenletet, akkor egy olyan görbét kapnánk, melyet **parabolának** hívunk (13. ábra).

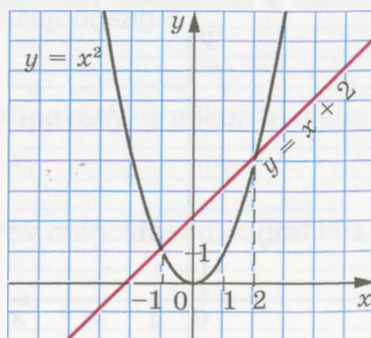
A $(0; 0)$ koordinátájú pont a grafikont két részre osztja, melyeket a **parabola ágainak** nevezünk, az origót a **parabola csúcsának**.

Az alábbi táblázatban összefoglaltuk az ebben a pontban az $y = x^2$ függvényről tanultakat.

Értelmezési tartomány	Bármely szám
Értékkészlet	Bármely nemnegatív szám
A grafikon alakja	Parabola
Zérushely (az argumentum azon értéke, melynél a függvényérték nulla)	$x = 0$



13. ábra



14. ábra

PÉLDA

Oldjuk meg grafikusán az $x^2 = x + 2$ egyenletet!

Megoldás

Közös koordináta-rendszerben ábrázoljuk az $y = x^2$ és az $y = x + 2$ függvények grafikonjait (14. ábra). A grafikonoknak két metszéspontjuk van, melyek abszcisszái 2 és -1 . Ellenőrzéssel meggyőződhetünk, hogy a kapott értékek gyökei az egyenletnek.



1. Mi az $y = x^2$ függvény értelmezési tartománya?
2. Mi az $y = x^2$ függvény értékkészlete?
3. Hogy hívják az $y = x^2$ függvény grafikonját?
4. Az argumentum mely értékénél lesz $y = x^2$ a függvényérték nulla?
5. Hasonlítsátok össze az $y = x^2$ függvény értékeit ellentett argumentumok helyén!

350.° A függvényt az $y = x^2$ képlettel adták meg. Határozzátok meg:

- 1) -6 ; $0,8$; $-1,2$; 150 argumentumhoz tartozó függvényértékeket;
- 2) az argumentum azon értékeit, ahol a függvény felveszi a 49 ; 0 ; 2500 ; $0,04$ értéket!

351.° Rajz nélkül állapítsátok meg, hogy az alábbi pontok rajta vannak-e az $y = x^2$ függvény grafikonján:

- | | |
|--------------------|----------------------|
| 1) A $(-8; 64)$; | 3) C $(0,5; 2,5)$; |
| 2) B $(-9; -81)$; | 4) D $(0,1; 0,01)$! |

352.° Ábrázolás nélkül határozzátok meg az $y = x^2$ és $y = 4x - 4$ függvények metszéspontját! Készítsetek rajzot! Jelöljétek rajta a kapott pontokat!

353.° A következő egyenleteket oldjátok meg grafikusán:

- | | | |
|--------------------|-------------------------|--------------------------|
| 1) $x^2 = x - 1$; | 2) $x^2 - 2x - 3 = 0$; | 3) $x^2 = \frac{8}{x}$! |
|--------------------|-------------------------|--------------------------|

354.° A következő egyenleteket oldjátok meg grafikusán:

- | | | |
|----------------------|-------------------------|------------------------------|
| 1) $x^2 = -4x - 3$; | 2) $x^2 - 3x + 5 = 0$; | 3) $x^2 + \frac{1}{x} = 0$! |
|----------------------|-------------------------|------------------------------|

355.* Állapítsátok meg rajz alapján a következő egyenletrendszerek gyökeinek számát:

$$1) \begin{cases} y = x^2, \\ y = 2; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} y - x^2 = 0, \\ x - y + 6 = 0; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} y = -2, \\ y = x^2; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} y - x^2 = 0, \\ 2x + 5y = 10! \end{cases}$$

356.* Állapítsátok meg rajz alapján a következő egyenletrendszerek gyökeinek számát:

$$1) \begin{cases} y = x^2, \\ 3x + 2y = -6; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} y = x^2, \\ x - 3y = -3! \end{cases}$$

357.** Az $f(x)$ függvény a következő képlettel van megadva:

$$f(x) = \begin{cases} 4, & \text{ha } x \leq -2, \\ x^2, & \text{ha } -2 < x < 1, \\ 2x - 1, & \text{ha } x \geq 1. \end{cases}$$

1) Határozzátok meg $f(-3)$, $f(-2)$, $f(-1)$, $f(1)$, $f(3)$, $f(0,5)$ értéket!

2) Ábrázoljátok a függvény grafikonját!

358.** Az $f(x)$ függvény a következő képlettel van megadva:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & \text{ha } x \leq -1, \\ x^2, & \text{ha } -1 < x < 2, \\ 4, & \text{ha } x \geq 2. \end{cases}$$

1) Határozzátok meg $f(-4)$, $f(-0,3)$, $f(1,9)$, $f(3)$, $f(-1)$, $f(2)$ értéket!

2) Ábrázoljátok a függvény grafikonját!

359.** Az $f(x)$ függvény a következő képlettel van megadva:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \leq 0, \\ x + 1, & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

1) Határozzátok meg $f(-7)$, $f(0)$, $f(2)$ értéket!

2) Ábrázoljátok a függvény grafikonját!

360.** Az $f(x)$ függvény a következő képlettel van megadva:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{6}{x}, & \text{ha } x \leq -1, \\ x^2, & \text{ha } x > -1. \end{cases}$$

1) Határozzátok meg $f(-12)$, $f(-1)$, $f(-0,9)$, $f(3)$, $f(0)$ értéket!

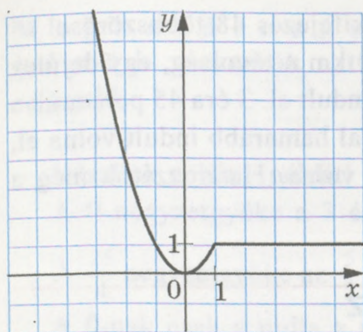
2) Ábrázoljátok a függvény grafikonját!

361.** Ábrázoljátok az alábbi függvényeket:

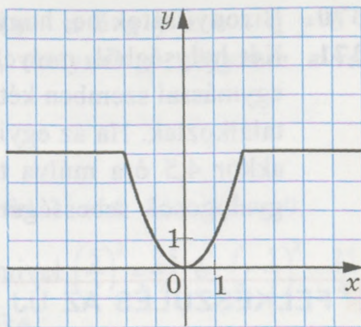
$$1) y = \frac{x^3 + x^2}{x + 1};$$

$$2) y = \frac{x^4 - 4x^2}{x^2 - 4}!$$

11. A másodfokú függvény $y = x^2$ és grafikonja



a)



b)

15. ábra

362.** Ábrázoljátok az $y = \frac{x^3}{x}$ függvény grafikonját!

363.** Határozzátok meg az $y = -x^2$ függvény értelmezési tartományát, értékkészletét, zérushelyét! Készítsetek rajzot!

364.* Ábrázoljátok a következő egyenletek görbéit:

$$1) \frac{y-x^2}{(x-1)^2+(y-1)^2} = 0;$$

$$2) \frac{y-x^2}{y-x} = 0!$$

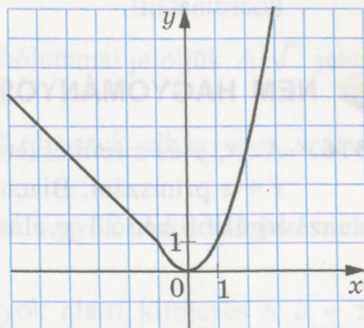
365.* Ábrázoljátok az

$$\frac{x^2-y}{(x+2)^2+(y-4)^2} = 0$$

egyenlet görbét!

366.* Adjátok meg a 15. ábrán látható függvényt képlettel, hasonlóan a 357. példához!

367.* Adjátok meg a 16. ábrán látható függvényt képlettel, hasonlóan a 357. példához!



16. ábra

ISMÉTLŐ FELADATOK

368. Igazoljátok az $\frac{(a+b)^2}{a-b} : \left(\frac{a}{a-b} + \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} - \frac{a}{a+b} \right) = a+b$ azonosságot!

369. Oldjátok meg a $\frac{6}{x-2} - \frac{x+3}{x} = \frac{x+6}{x^2-2x}$ egyenletet!

370. Bizonyítsátok be, hogy $27^6 - 9^7$ kifejezés 48 többszöröse!
371. Két helységről, melyek között 30 km a távolság, egyidejűleg egymással szemben két gyalogos indult el. 3 óra 45 perc múlva találkoztak. Ha az egyikük 2 órával hamarabb indult volna el, akkor 4,5 óra múlva találkoztak volna. Határozzátok meg a gyalogosok sebességét!

FELKÉSZÜLÉS AZ ÚJ TÉMÁHOZ

372. Határozzátok meg annak a négyzetnek az oldalhosszát, melynek területe:
- 1) 25 cm^2 ; 2) 1600 dm^2 ; 3) $0,04 \text{ m}^2$!
373. Oldjátok meg az alábbi egyenleteket:
- 1) $x^2 = 9$; 2) $x^2 = \frac{36}{49}$!
374. Az a mely értékeire nincs gyöke az $x^2 = a$ egyenletnek?
375. Ábrázoljátok közös koordináta-rendszerben az $y = x^2$ és $y = 1$ függvények grafikonjait! Határozzátok meg a közös pontok koordinátáit!

NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREK HASZNÁLATA

376. Az x , y és z természetes számokra igaz, hogy $x + y$, $y + z$ és $x + z$ prímszám. Bizonyítsátok be, hogy a három szám közül legalább kettő 1-gyel egyenlő!

12. Négyzetgyök. Számítási négyzetgyök

Vizsgáljunk meg egy olyan négyzetet, melynek területe 49 cm^2 . Legyen x a négyzet oldalhossza. Akkor az $x^2 = 49$ egyenlet egy olyan matematikai modell, mellyel a négyzet oldalát határozhatjuk meg.

Ennek az egyenletnek a gyökei a 7 és a -7 , mert ezen számok négyzete 49. Azt mondják a 7 és a -7 a 49 **négyzetgyöke**.

M e g h a t á r o z á s. Az a szám **n é g y z e t g y ö - k é n e k** nevezzük azt a számot, melynek a négyzete a -val egyenlő.

Nézzünk néhány példát!

A 9 négyzetgyöke a 3 és a -3 , mivel $3^2 = 9$ és $(-3)^2 = 9$.

A $\frac{25}{4}$ négyzetgyöke az $\frac{5}{2}$ és a $-\frac{5}{2}$, mivel $\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$ és $\left(-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$.

A 0-nak csak a nulla a négyzetgyöke.

Mivel nem létezik olyan szám, melynek a négyzete negatív, ezért nem létezik negatív szám négyzetgyöke sem.

Az $x^2 = 49$ egyenlet pozitív gyöke a 7, a négyzet oldalának meghatározásáról szóló feladat megoldása. Ezt a számot a 49 **számítási négyzetgyökének** nevezzük.

M e g h a t á r o z á s. Az a szám **s z á m t a n i n é g y z e t g y ö k é n e k** nevezzük azt a nemnegatív számot, melynek négyzete az a szám.

Az a szám négyzetgyökét a $\sqrt{a}$ szimbólummal jelöljük. A $\sqrt{}$ jelet a **négyzetgyök jelének** nevezzük.

A $\sqrt{a}$ jelölést a „négyzetgyök a -nak” olvassuk, elhagyva a „számítási” szót.

Azt a kifejezést, amely a $\sqrt{}$ jel alatt áll, **gyök alatti kifejezésnek** nevezzük.

Például a $\sqrt{b-5}$ kifejezésben a gyök alatti kifejezés a $b - 5$ kéttag. A számítási négyzetgyök meghatározásából következik, hogy a **gyök alatti kifejezés csak nemnegatív értékeket vehet fel.**

Azt a műveletet, amikor keressük az adott szám számítási négyzetgyökét **gyökvonásnak** nevezzük.

Lássunk néhány példát:

$$\sqrt{9}=3, \text{ mivel } 3 \geq 0 \text{ és } 3^2 = 9;$$

$$\sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}, \text{ mivel } \frac{5}{2} \geq 0 \text{ és } \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4};$$

$\sqrt{0} = 0$, mivel $0 \geq 0$ és $0^2 = 0$.

Általánosan igaz: ha $b \geq 0$ és $b^2 = a$, akkor $\sqrt{a} = b$.

Bármely nemnegatív a számra igaz, hogy $\sqrt{a} \geq 0$ és $(\sqrt{a})^2 = a$.

Például $(\sqrt{4})^2 = 4$, $(\sqrt{2})^2 = 2$, $(\sqrt{5,2})^2 = 5,2$.

Megjegyezzük, hogy a négyzetgyök fogalmának bevezetését az $x^2 = a$, ahol $a \geq 0$ egyenlet megoldása indokolta. Ennek az egyenletnek a gyöke az a szám négyzetgyöke.

Az $x^2 = a$ egyenlet megoldását szemléltessük az $x^2 = 4$ egyenlet grafikus megoldásával.

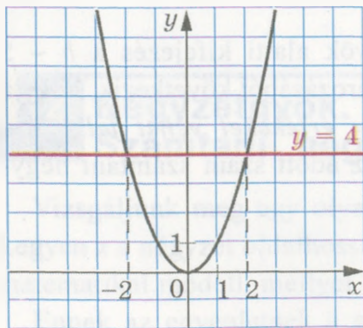
Közös koordináta-rendszerben ábrázoljuk az $y = x^2$ és az $y = 4$ függvények grafikonját (17. ábra). A görbék metszéspontjának abszcisszái a 2 és a -2 , melyek az adott egyenlet gyökei.

Az $x^2 = a$ egyenletnek, ha $a < 0$ nincs megoldása, melyet szintén a grafikus megoldással szemléltetünk. Az $y = x^2$ és $y = a$, ha $a < 0$ függvények grafikonjainak nincs közös pontja (18. ábra).

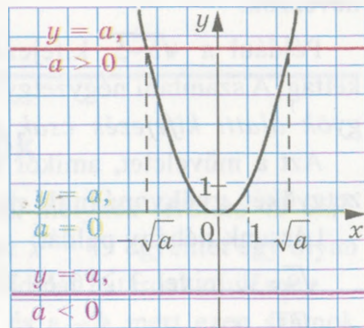
Ha $a = 0$, akkor az $x^2 = a$ egyenletnek egyetlen gyöke van az $x = 0$.

A grafikus módszer segít általánosítani: az $x^2 = a$ egyenletnek, ha $a > 0$ két megoldása van. Valóban az $y = x^2$ parabolának és az $y = a$ egyenesnek két metszéspontja van, ha $a > 0$ (18. ábra). Ebben az esetben az $x^2 = a$ egyenlet megoldása a $\sqrt{a}$ és $-\sqrt{a}$ szám, mivel $(\sqrt{a})^2 = a$ és $(-\sqrt{a})^2 = a$.

Például az $x^2 = 5$ egyenlet gyökei a $\sqrt{5}$ és $-\sqrt{5}$.



17. ábra



18. ábra

1. PÉLDA

Határozzuk meg a $(-8\sqrt{2})^2$ kifejezés értékét!

Megoldás

Alkalmazzuk a szorzat hatványra emelését és a $(\sqrt{a})^2 = a$ azonosságot:

$$(-8\sqrt{2})^2 = (-8)^2 \cdot (\sqrt{2})^2 = 64 \cdot 2 = 128.$$

2. PÉLDA

Oldjuk meg a következő egyenleteket:

$$1) \frac{1}{2}\sqrt{x} - 3 = 0;$$

$$2) \sqrt{1+\sqrt{x+2}} = 2!$$

Megoldás

1) Azt kapjuk, hogy $\frac{1}{2}\sqrt{x} = 3$; $\sqrt{x} = 6$. Ekkor $x = 6^2$; $x = 36$.

2) Felírhatjuk, hogy $\sqrt{1+\sqrt{x+2}} = 2$; $1+\sqrt{x+2} = 2^2$; $\sqrt{x+2} = 3$;
 $x+2 = 3^2$; $x = 7$.

3. PÉLDA

Oldjuk meg az $(x-5)^2 = 16$ egyenletet!

Megoldás

$$(x-5)^2 = 16;$$

$$x-5 = -4 \text{ vagy } x-5 = 4;$$

$$x = 1 \text{ vagy } x = 9.$$

F e l e l e t: 1; 9.

4. PÉLDA

Oldjuk meg a $(3x-1)^2 = 2$ egyenletet!

Megoldás

$$(3x-1)^2 = 2;$$

$$3x-1 = -\sqrt{2} \text{ vagy } 3x-1 = \sqrt{2};$$

$$3x = 1 - \sqrt{2} \text{ vagy } 3x = 1 + \sqrt{2};$$

$$x = \frac{1-\sqrt{2}}{3} \text{ vagy } x = \frac{1+\sqrt{2}}{3}.$$

F e l e l e t: $\frac{1-\sqrt{2}}{3}$; $\frac{1+\sqrt{2}}{3}$.

5. PÉLDA

Az alábbi kifejezések x mely értékeire értelmezhetők:

1) $\sqrt{-5x}$;

2) $\frac{3}{\sqrt{x}-2}$?

Megoldás

- 1) A $\sqrt{-5x}$ kifejezés azokra az x értékekre értelmezhető, melyekre a gyök alatti kifejezés nemnegatív. A $-5x$ olyan szorzat, melyben az egyik tényező negatív. Tehát ennek a kifejezésnek abban az esetben lesz negatív az értéke, ha x nempozitív.

F e l e l e t: ha $x \leq 0$.

- 2) Az adott kifejezés olyan x értékekre értelmezhető, melyekre $\sqrt{x}$ kifejezés értelmezhető és $\sqrt{x} - 2$ nem egyenlő nullával. Tehát egyszerre kell a következő két feltételnek teljesülnie: $x \geq 0$ és $\sqrt{x} - 2 \neq 0$. Tehát $x \geq 0$ és $x \neq 4$.

F e l e l e t: $x \geq 0$ és $x \neq 4$.

6. PÉLDA

Oldjuk meg a következő egyenleteket: 1) $\sqrt{-x} + \sqrt{x-2} = 2$;

2) $\sqrt{x^2-2x} + \sqrt{x-2} = 0$; 3) $(x+2)\sqrt{x-2} = 0$.

Megoldás

- 1) Az egyenlet bal oldala csak olyan x értékekre értelmezhető, melyekre mind a két gyök alatti kifejezés nemnegatív értéket vesz fel. Vagyis ha $-x \geq 0$, akkor $x \leq 0$. Könnyen belátható, hogyha $x \leq 0$, akkor $x - 2$ csak negatív értéket vesz fel. Tehát nincsen olyan x érték, melyre az egyenlet bal oldala értelmezhető.

F e l e l e t: nincs megoldás.

- 2) Az adott egyenlet bal oldala két nemnegatív szám összege, mely csak abban az esetben lehet nullával egyenlő, ha mind a két összeadandó 0. Vagyis egyszerre kell teljesülnie, hogy $\sqrt{x^2-2x} = 0$ és $\sqrt{x-2} = 0$. Ez azt jelenti, hogy a két egyenlet közös megoldását kell meghatározni, meg kell oldani a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-2x} = 0, \\ \sqrt{x-2} = 0. \end{cases}$$

Azt kapjuk, hogy $\begin{cases} x^2 - 2x = 0, \\ x - 2 = 0; \end{cases} \begin{cases} x(x-2) = 0, \\ x = 2; \end{cases} \begin{cases} x = 0 \text{ vagy } x = 2, \\ x = 2. \end{cases}$

Az utolsó egyenletrendszer megoldása az $x = 2$.

F e l e l e t: 2.

- 3) Mivel a szorzat értéke csak akkor nulla, ha vagy az egyik tényező vagy a másik tényező egyenlő nullával, ezért az egyenlet megoldása két egyenlet megoldására vezethető vissza:

$$\begin{aligned} x + 2 &= 0 \text{ vagy } \sqrt{x-2} = 0; \\ x &= -2 \text{ vagy } x = 2. \end{aligned}$$

Viszont az $x = -2$ értékre a $\sqrt{x-2}$ kifejezés nem értelmezhető, így csak egyetlen megoldás van, az $x = 2$.

F e l e l e t: 2.



1. Mit nevezünk az a szám négyzetgyökének?
2. Mit nevezünk az a szám számítási négyzetgyökének?
3. Hogyan jelöljük az a szám számítási négyzetgyökét?
4. Hogyan nevezzük a $\sqrt{\quad}$ jelet?
5. Hogyan olvassuk a $\sqrt{a}$ jelölést?
6. Hogyan nevezzük a gyökjel alatt álló kifejezést?
7. Milyen értékeket vehet fel a gyök alatti kifejezés?
8. Hogyan nevezzük azt a műveletet, amikor az adott szám számítási négyzetgyökét határozzuk meg?
9. Bármely nemnegatív számra mivel egyenlő a $(\sqrt{a})^2$ kifejezés?
10. Hány gyöke van az $x^2 = a$ egyenletnek, ha $a > 0$? Mivel egyenlők?
11. Van-e megoldása az $x^2 = a$ egyenletnek, ha $a = 0$? ha $a < 0$?

377.° Mennyi 16 négyzetgyöke? 1 négyzetgyöke? 0 négyzetgyöke? Mennyi ezen számok számítási négyzetgyöke?

378.° Igazak-e az alábbi egyenlőségek? (A feleletet indokold meg!):

- 1) $\sqrt{25} = 5$; 3) $\sqrt{36} = -6$, 5) $\sqrt{0,81} = 0,9$;
2) $\sqrt{0} = 0$; 4) $\sqrt{0,4} = 0,2$; 6) $\sqrt{10} = 100$?

379.° Végezzétek el a kijelölt gyökvonást:

- 1) $\sqrt{9}$; 2) $\sqrt{49}$; 3) $\sqrt{100}$; 4) $\sqrt{225}$;

- 5) $\sqrt{0,25}$; 8) $\sqrt{1,96}$; 11) $\sqrt{\frac{1}{64}}$; 14) $\sqrt{3\frac{6}{25}}$;
 6) $\sqrt{0,01}$; 9) $\sqrt{400}$; 12) $\sqrt{\frac{4}{9}}$; 15) $\sqrt{0,0004}$;
 7) $\sqrt{1,21}$; 10) $\sqrt{3600}$; 13) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$; 16) $\sqrt{0,000025}$!

380.° Végezzétek el a kijelölt gyökvonást:

- 1) $\sqrt{36}$; 4) $\sqrt{0,04}$; 7) $\sqrt{2500}$; 10) $\sqrt{5\frac{4}{9}}$;
 2) $\sqrt{64}$; 5) $\sqrt{0,49}$; 8) $\sqrt{10000}$; 11) $\sqrt{0,0009}$;
 3) $\sqrt{144}$; 6) $\sqrt{1,69}$; 9) $\sqrt{\frac{16}{121}}$; 12) $\sqrt{0,0196}$!

381.° Értelmezhetőek-e az alábbi kifejezések:

- 1) $\sqrt{2}$; 3) $\sqrt{-2}$; 5) $(\sqrt{-2})^2$?
 2) $-\sqrt{2}$; 4) $\sqrt{(2)^2}$;

382.° Melyik szám számtani négyzetgyöke egyenlő a következő számokkal:

- 1) 4; 3) 0,8; 5) 1,6;
 2) 0; 4) $2\frac{1}{4}$; 6) -9?

383.° A könyv előzőkén található *Természetes számok négyzete* táblázat segítségével végezd el a gyökvonást:

- 1) $\sqrt{484}$; 4) $\sqrt{5929}$; 7) $\sqrt{68,89}$;
 2) $\sqrt{729}$; 5) $\sqrt{5,76}$; 8) $\sqrt{67\ 600}$;
 3) $\sqrt{1156}$; 6) $\sqrt{14,44}$; 9) $\sqrt{384\ 400}$!

384.° Határozzátok meg:

- 1) $\sqrt{841}$; 3) $\sqrt{9,61}$; 5) $\sqrt{72,25}$;
 2) $\sqrt{1296}$; 4) $\sqrt{10,24}$; 6) $\sqrt{672\ 400}$!

385.° Számológéppel számítsátok ki a következő kifejezések értékét! Az eredményt kerekítsétek századokra!

- 1) $\sqrt{2}$; 3) $\sqrt{34}$; 5) $\sqrt{2,439}$.
 2) $\sqrt{7}$; 4) $\sqrt{1,8}$;

386.° Számológéppel számítsátok ki a következő kifejezések értékét!
Az eredményt kerekítsétek századokra!

1) $\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{5,1}$; 3) $\sqrt{40}$; 4) $\sqrt{12,56}$.

387.° Határozzátok meg a következő kifejezések értékét:

1) $(\sqrt{7})^2$; 4) $-(\sqrt{10})^2$; 7) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$;
2) $(\sqrt{4,2})^2$; 5) $(2\sqrt{3})^2$; 8) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{14}\right)^2$;
3) $(-\sqrt{11})^2$; 6) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$; 9) $(-0,3\sqrt{2})^2$!

388.° Számítsátok ki:

1) $(\sqrt{6})^2$; 3) $(3\sqrt{2})^2$; 5) $\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2$;
2) $(-\sqrt{21})^2$; 4) $(-4\sqrt{5})^2$; 6) $\left(\frac{1}{4}\sqrt{26}\right)^2$!

389.° Határozzátok meg a következő kifejezések értékét:

1) $\sqrt{16+9}$; 7) $\frac{1}{3}\sqrt{0,09}-2$;
2) $\sqrt{16}+\sqrt{9}$; 8) $-2\sqrt{0,16}+0,7$;
3) $\sqrt{36}-\sqrt{49}$; 9) $(\sqrt{13})^2-3\cdot(\sqrt{8})^2$;
4) $\sqrt{36}\cdot\sqrt{49}$; 10) $\frac{1}{6}\cdot(\sqrt{18})^2-\left(\frac{1}{2}\sqrt{24}\right)^2$;
5) $5\sqrt{4}-\sqrt{25}$; 11) $50\cdot\left(-\frac{1}{5}\sqrt{2}\right)^2$;
6) $\sqrt{0,81}+\sqrt{0,01}$; 12) $\sqrt{14\cdot 5^2-6^2}$!

390.° Számítsátok ki a következő kifejezések pontos értékét:

1) $\sqrt{3+\sqrt{36}}$; 4) $\frac{1}{3}\sqrt{900}+0,2\sqrt{1600}$;
2) $\sqrt{72-\sqrt{64}}$; 5) $(2\sqrt{6})^2-3(\sqrt{21})^2$;
3) $\sqrt{16}\cdot\sqrt{225}$; 6) $\sqrt{10^2-4\cdot 3^2}$!

391.° Határozzátok meg a következő kifejezések helyettesítési értékét a változó megadott értékénél:

1) $\sqrt{12+a}$, ha $a = 0,25$;
2) $\sqrt{7-3b}$, ha $b = 2$;
3) $\sqrt{2a-b}$, ha $a = 34$, $b = 19$!

392.° Határozzátok meg a következő kifejezések helyettesítési értékét a változó megadott értékénél:

1) $\sqrt{27+m}$, ha $m = 54$;

2) $\sqrt{m-3n}$, ha $m = 0,13$, $n = -0,04$!

393.° Oldjátok meg az alábbi egyenleteket:

1) $\sqrt{x} = 9$;

3) $\sqrt{x} - 0,2 = 0$;

2) $\sqrt{x} = \frac{1}{4}$;

4) $\sqrt{x} + 7 = 0$!

394.° Oldjátok meg az alábbi egyenleteket:

1) $\sqrt{x} = 20$;

2) $\sqrt{x} = -16$;

3) $\sqrt{x} - \frac{2}{3} = 0$!

395.° Oldjátok meg a következő egyenleteket:

1) $x^2 = 25$; 2) $x^2 = 0,49$; 3) $x^2 = 3$; 4) $x^2 = -25$!

396.° Oldjátok meg a következő egyenleteket:

1) $x^2 = 100$; 2) $x^2 = 0,81$; 3) $x^2 = 7$; 4) $x^2 = 3,6$!

397.* Határozzátok meg a következő kifejezések pontos értékét:

1) $-0,06 \cdot \sqrt{10000} + \frac{8}{\sqrt{256}} - 2,5\sqrt{3,24}$;

2) $\sqrt{64} \cdot \sqrt{6,25} + \sqrt{2^3 + 17}$;

3) $\sqrt{1\frac{11}{25}} + 3\sqrt{7\frac{1}{9}} - 0,6\sqrt{3025}$;

4) $\left(\frac{1}{5}\sqrt{75}\right)^2 + \sqrt{26^2 - 24^2}$;

5) $(3\sqrt{8})^2 + (8\sqrt{3})^2 - 2(\sqrt{24})^2$;

6) $\sqrt{144} : \sqrt{0,04} - \sqrt{2,56} \cdot \sqrt{2500}$!

398.* Határozzátok meg a következő kifejezések pontos értékét:

1) $0,15\sqrt{3600} - 0,18\sqrt{400} + (10\sqrt{0,08})^2$;

2) $\frac{95}{\sqrt{361}} - \frac{13}{14}\sqrt{1\frac{27}{169}} + \sqrt{8^2 + 15^2}$;

3) $\left(-8\sqrt{\frac{1}{4}} + \frac{\sqrt{1,44}}{3} \cdot \sqrt{12,25}\right) : (0,1\sqrt{13})^2$!

399.* Az alábbi kifejezéseknek az x mely értékeinél van értelme:

1) $\sqrt{x}$;

2) $\sqrt{-x}$;

3) $\sqrt{x^2}$;

4) $\sqrt{-x^2}$;

- 5) $\sqrt{x-8}$; 8) $\sqrt{(x-8)^2}$; 11) $\frac{1}{\sqrt{x+3}}$; 14) $\sqrt{|x|}$;
 6) $\sqrt{8-x}$; 9) $\frac{1}{\sqrt{(x-8)^2}}$; 12) $\sqrt{x} \cdot \sqrt{-x}$; 15) $\sqrt{-|x|}$;
 7) $\sqrt{x^2+8}$; 10) $\frac{1}{\sqrt{x-3}}$; 13) $\frac{1}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{-x}}$; 16) $\frac{1}{\sqrt{|x|}}$?

400.* Az alábbi kifejezéseknek az y mely értékeinél van értelme:

- 1) $\sqrt{2y}$; 3) $\sqrt{y^3}$; 5) $\sqrt{-y^4}$; 7) $\frac{1}{\sqrt{y-1}}$;
 2) $\sqrt{-3y}$; 4) $\sqrt{-y^3}$; 6) $\frac{1}{\sqrt{y}}$; 8) $\frac{1}{\sqrt{y+1}}$?

401.* Oldjátok meg a következő egyenleteket:

- 1) $\sqrt{5x}-4=0$; 3) $\sqrt{5x-4}=6$; 5) $\frac{18}{\sqrt{x+3}}=9$;
 2) $\sqrt{5x-4}=0$; 4) $\frac{42}{\sqrt{x}}=6$; 6) $\sqrt{x^2-36}=8$!

402.* Oldjátok meg a következő egyenleteket:

- 1) $\frac{1}{3}\sqrt{x}-2=0$; 3) $\frac{4}{\sqrt{x-5}}=6$;
 2) $\sqrt{2x+3}=11$; 4) $\sqrt{130-x^2}=9$!

403.* Oldjátok meg az alábbi egyenleteket:

- 1) $(x+6)^2=0$; 3) $(x+6)^2=3$;
 2) $(x+6)^2=9$; 4) $(7x+6)^2=5$!

404.* Oldjátok meg az alábbi egyenleteket:

- 1) $(2x-3)^2=25$; 2) $(x-3)^2=7$; 3) $(2x-3)^2=7$!

405.** Oldjátok meg a következő egyenleteket:

- 1) $\sqrt{3+\sqrt{2+x}}=4$;
 2) $\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{x}}}=3$;
 3) $\sqrt{4-\sqrt{10+\sqrt{x}}}=2$!

406.** Oldjátok meg a következő egyenleteket:

- 1) $\sqrt{17+\sqrt{\sqrt{x}-6}}=5$; 2) $\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{x}}}=1$!

407.** Az alábbi kifejezések az a és b mely értékeire vannak értelmezve:

- 1) $\sqrt{ab}$; 2) $\sqrt{-ab}$; 3) $\sqrt{ab^2}$; 4) $\sqrt{a^2b^2}$; 5) $\sqrt{-a^2b}$?

408.** Igaz-e, hogy az alábbi kifejezéseknek az x bármely értékénél értelme van:

1) $\sqrt{x^2 - 4x + 4}$; 2) $\sqrt{x^2 - 4x + 5}$?

409.** Bizonyítsátok be, hogy nem létezik olyan x érték, melyre a $\sqrt{-x^2 + 6x - 12}$ kifejezés értelmezhető!

410.** Az alábbi kifejezések közül melyiknek van értelme bármely x értékénél:

1) $\sqrt{x^2 + 8x + 15}$; 2) $\sqrt{x^2 - 10x + 27}$?

411.** Oldjátok meg a következő egyenleteket:

1) $\sqrt{x} = -x$; 4) $\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 4} = 0$;

2) $\sqrt{x} + \sqrt{x-1} = 0$; 5) $(x-1)\sqrt{x+1} = 0$;

3) $\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x-1} = 0$; 6) $(x+1)\sqrt{x-1} = 0$!

412.** Oldjátok meg a következő egyenleteket:

1) $\sqrt{x} + \sqrt{-x} = 0$; 3) $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 1} = 0$;

2) $\sqrt{x} + \sqrt{-x} = 1$; 4) $(x-2)\sqrt{x-3} = 0$!

413.** Az a mely értékeire lesz az $x^2 = a + 1$ egyenletnek:

1) két gyöke;

2) egy gyöke;

3) nincs megoldása?

414.** Ábrázoljátok a következő függvények grafikonját:

1) $y = \sqrt{-x^2}$;

2) $y = \sqrt{-x^2 - 4x - 4} + 2$;

3) $y = (\sqrt{x})^2$!

415.** Ábrázoljátok az $y = \sqrt{2x-1-x^2} - 1$ függvény grafikonját!

416.* Oldjátok meg a következő egyenleteket! Vegyétek figyelembe az a különböző értékeit!

1) $a\sqrt{x-1} = 0$; 3) $a\sqrt{x-1} = a$;

2) $\sqrt{(a-1)x} = 0$; 4) $\sqrt{x-2} = a$.

417.* Az a mely értékénél van a $(\sqrt{x-1})(x-a) = 0$ egyenletnek csak egy gyöke?

ISMÉTLŐ FELADATOK

418. Egy utcában a házakat sorban 1-től 24-ig számozták. Hányszor kellett használni a házsámok elkészítéséhez az 1-es számjegyet?
419. Egyszerűsítsék az

$$\left(\frac{a}{a^2-25} + \frac{5}{5-a} + \frac{1}{a+5} \right) : \left(\frac{28-a^2}{a+5} + a-5 \right)$$

kifejezést!

420. Egy munkás heti bérét, a 420 hrvnyát 5 és 20 hrvnyás címletekben vette fel. Mennyit kapott a különböző címletekből, ha összesen 31 címlettel fizették ki?

FELKÉSZÜLÉS AZ ÚJ TÉMÁHOZ

421. Melyik nagyobb:
1) 2,4578 vagy 2,4569; 2) -1,9806 vagy -1,981?
422. Olvassátok el a következő szakaszos tizedes törteket! Nevezétek meg a szakaszt:
1) 0,(5); 2) 1,(32); 3) 8,4(65); 4) 3,424242...!
423. Írjátok le a következő törtek tizedestört alakját:
1) $\frac{4}{5}$; 2) $\frac{3}{8}$; 3) $\frac{7}{16}$; 4) $\frac{97}{80}$; 5) $\frac{42}{15}$!
424. Írjátok fel a következő közönséges törtek végtelen szakaszos tizedestört alakját! Nevezétek meg a szakaszt:
1) $\frac{5}{6}$; 2) $\frac{11}{25}$; 3) $\frac{9}{11}$; 4) $\frac{31}{33}$!

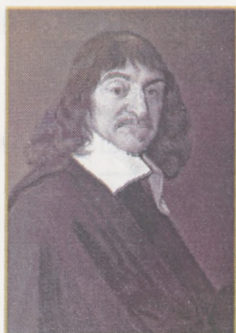
NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREK HASZNÁLATA

425. Keressétek meg az összes olyan háromjegyű n természetes számot, melyben a számjegyek összege az n számnál 11-szer kisebb!

HA ELKÉSZÜLTÉL A HÁZI FELADATTAL

Teremhetnek-e a veteményesekben gyökök?

Az ókori görögök a gyökvonást az adott területű négyzet oldalhosszának meghatározásával azonosították, épp ezért oldalnak nevezték.



René Descartes

A *radix* latin szó egyik jelentése gyökértermés, tehát olyan zöldség, melynek a gyökerét étkezésre használják.

A XIII–XV. században az európai matematikusok a *radix* szó rövidítésével jelölték a négyzetgyököt: R , R , R^2 . Tehát a $\sqrt{7}$ kifejezést ebben a korban R^27 alakban írták.

A XVI. században kezdték használni a $\sqrt{}$ jelet. A jel eredete elég bizonytalan, lehet hogy összefüggésbe hozható a latin *r* betű írásával.

A XVII. században René Descartes használta először a $\sqrt{}$ jelet, kiegészítve az addig használatosat egy függőleges vonallal.

13. Számhalmazok

A természetes számok azok a számok, melyeket először használt az emberiség. Ezekkel a számokkal akkor ismerkedtetek meg, amikor a tárgyak megszámlálásával foglalkoztatok. Az összes természetes szám alkotja a **természetes számok halmazát**, melyet N betűvel jelölünk.

Azt a tényt, hogy valamely m szám természetes, vagyis hogy a természetes számok halmazához tartozik $m \in N$ jelöljük (m eleme N -nek). Például $5 \in N$. A nulla nem természetes szám. Így írjuk: $0 \notin N$ (nulla nem eleme N -nek).

A gyakorlati szükség vezetett a törtszámok kialakulásához. Később szükségessé vált olyan mennyiségek vizsgálata, melyek jellemzésére nem volt elegendő a pozitív számok ismerete. Így alakult ki a negatív szám.

A természetes számok, azok ellentettjei és a nulla alkotják az **egész számok halmazát**, melyet Z -vel jelölünk.

Például $-2 \in \mathbb{Z}$, $0 \in \mathbb{Z}$, $5 \in \mathbb{Z}$.

A természetes számok halmaza része az egész számok halmazának. Azt mondják $\mathbb{N}$ **részhalmaza** $\mathbb{Z}$ -nek: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ ($\mathbb{N}$ részhalmaza $\mathbb{Z}$ -nek).

Az egész és a törtszámok (negatív és pozitív törték) alkotják a **racióális számok halmazát**,

melyet $\mathbb{Q}$ betűvel jelölünk. Például $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$,

$-0,2 \in \mathbb{Q}$, $0 \in \mathbb{Q}$, $-3 \in \mathbb{Q}$, $15 \in \mathbb{Q}$.

Könnyen belátható, hogy $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. A 19. ábra szemlélteti az $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ és $\mathbb{Q}$ halmazok viszonyát.

Bármely racionális szám felírható $\frac{m}{n}$ alakban, ahol m egész szám és n természetes szám. Például: $5 = \frac{5}{1}$; $-3 = \frac{-3}{1}$; $0,2 = \frac{1}{5}$; $0 = \frac{0}{7}$; $5,3 = \frac{53}{10}$.

Lehetséges, hogy ebből az értelmezésből ered a racionális kifejezés, mert a latin *rationis* szó jelentése hányados, arány.

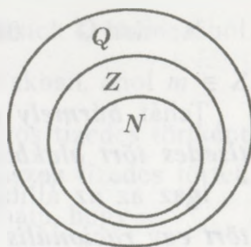
A 6. osztályban már megtudtátok, hogy bármely racionális szám felírható vagy véges, vagy végtelen szakaszos tizedes tört alakban.

Az $\frac{m}{n}$ tizedes tört alakját felírhatjuk, ha m -et elosztjuk n -nel.

Például: $\frac{5}{8} = 0,625$; $\frac{5}{11} = 0,454545\dots$

Az $\frac{5}{8}$ -ad véges tizedes tört alakban írható le, $\frac{5}{11}$ -ed végtelen szakaszos tizedes tört alakban. A $0,454545\dots$ számban a 4-es és az 5-ös számjegy periodikusan ismétlődik. Az ismétlődő számok csoportját **szakasznak** nevezzük, és zárójelbe tesszük: $0,454545\dots = 0,(45)$, vagyis $\frac{5}{11} = 0,(45)$.

Megjegyezzük, hogy bármely véges tizedes tört és bármely egész szám felírható végtelen szakaszos tizedes tört alakban. Például:



19. ábra

$$0,625 = 0,6250000... = 0,625(0);$$

$$2 = 2,000... = 2,(0).$$

Tehát *bármely racionális szám felírható végtelen szakaszos tizedes tört alakban.*

Igaz az az állítás is, hogy *bármely végtelen szakaszos tizedes tört egy racionális szám másik alakja.* A IX. osztályban fogjátok majd megtanulni, hogyan kell a végtelen szakaszos tizedes törtet racionális tört alakban megadni.

Két természetes szám összege és szorzata is természetes szám. A különbségükre ez már nem helytálló. Két természetes szám különbsége nem mindig természetes szám. Például: $(5 - 7) \notin N$.

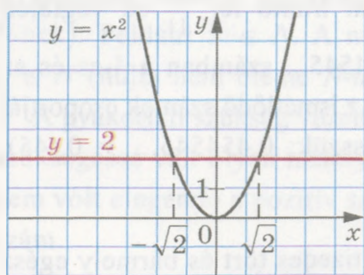
Két egész szám összege, különbsége és szorzata is egész szám. A hányadosra ez már nem érvényes: $\frac{5}{7} \notin Z$.

Két racionális szám összege, különbsége, szorzata és hányadosa (a nullával való osztás kivételével) is racionális szám.

Tehát a kivonás kivezet a természetes számok N halmazából, az osztás az egész számok Z halmazából. Viszont a racionális számok Q halmaza zárt halmaz a négy alapműveletre.

De most ismerkedtetek meg egy új művelettel, a gyökvonással. Felmerül a kérdés, bármely racionális szám négyzetgyöke racionális szám-e?

Vizsgáljuk meg az $x^2 = 2$ egyenletet. Mivel $2 > 0$, ezért az egyenletnek két gyöke van a $\sqrt{2}$ és a $-\sqrt{2}$ (20. ábra). Nem létezik



20. ábra

olyan racionális szám melynek négyzete 2 (a bizonyítást elolvashatod a „Ha elkészültél a házi feladattal” című fejezetben), tehát a $\sqrt{2}$ és a $-\sqrt{2}$ számok nem racionálisak. Ezeket a számokat **irracionális** számoknak nevezzük (az *ir* előtag a tagadás szava, vagyis nem racionális).

Tehát a gyökvonás kivezethet a racionális számok Q halmazából.

Egyetlen irracionális szám se írható fel $\frac{m}{n}$ alakban, ahol $m \in Z$, és $n \in N$, tehát nem írható fel végtelen szakaszos tizedes törtként. Az irracionális számok **végtelen nem szakaszos** tizedes törtek. Például számológépes programmal megállapítható, hogy

$$\sqrt{2} = 1,4142135623730950488016887242097\dots$$

A $\sqrt{2}$ és $-\sqrt{2}$ nem az első irracionális számok, amivel már idáig találkozottatok. A π szám, a körvonal hosszának és átmérőjének az aránya is irracionális szám:

$$\pi = 3,1415926535897932384626433832795028841971693\dots$$

Nem csak a gyökvonás eredménye lehet irracionális szám, hanem bármely nem szakaszos tizedes tört is. Akár magunk is alkothatunk ilyen törtet. Például a $0,10100100010000\dots$ szám is irracionális, ahol a tizedes vessző után tíz hatványait írjuk. Könnyen belátható, ha feltételezzük, hogy ennek a törtnek van szakasza, akkor valamelyik helyi értéktől kezdődően csak nullák lehetnek. Ez viszont ellentmond a konstrukciós elvnek.

A racionális és az irracionális számok alkotják a **valós számok halmazát**, melyet R -rel jelölünk.

Tehát az $N \subset Z \subset Q$ lánc bővíthető: $N \subset Z \subset Q \subset R$.

Matematika-szakkörön megtudhatod, hogy még ez a lánc is folytatható.

Az ebben a fejezetben tanult számhalmazok közötti összefüggést a 21. ábra szemlélteti.



21. ábra

A valós számok halmaza mind a négy alapműveletre zárt halmaz. Ezekre a műveletekre a számotokra már ismert tulajdonságok érvényesek:

$a + b = b + a$	Az összeadás felcserélhetőségi tulajdonsága
$ab = ba$	A szorzás felcserélhetőségi tulajdonsága
$(a + b) + c = a + (b + c)$	Az összeadás csoportosítási tulajdonsága
$(ab)c = a(bc)$	A szorzás csoportosítási tulajdonsága
$a(b + c) = ab + ac$	A szorzás széttagolási tulajdonsága

A valós számok összehasonlítását a tizedes törtekre alkalmazott szabály szerint végezzük, tehát a megfelelő helyi értéken álló számjegyek alaki értékét hasonlítjuk össze.

Például: $7,853126... < 7,853211... .$

Bármelyik pozitív valós szám mindig nagyobb, mint a nulla, és nagyobb, mint bármelyik negatív szám. Bármelyik negatív szám mindig kisebb, mint a nulla.

A körvonal hosszának meghatározásakor a π értékét két tizedes jegyre kerekítve használjuk ($\pi \approx 3,14$). Hasonlóan, ha valós számokat tartalmazó kifejezés értékét kell meghatározni, akkor az irracionális számokat közelítő értékeikkel helyettesítjük.

Például: $\sqrt{2} \approx 1,41$.

Végül megjegyezzük, hogy bármely nemnegatív valós szám négyzetgyöke valós szám. Tehát a valós számok $\mathbb{R}$ halmaza a gyökvonásra zárt halmaz.



1. Milyen betűvel jelöljük a természetes számok halmazát?
2. Mit jelent az $m \in N$ jelölés? Hogyan kell olvasni?
3. Hogyan olvassuk az $a \notin N$ jelölést?
4. Mely számok alkotják az egész számok halmazát?
5. Milyen betűvel jelöljük az egész számok halmazát?
6. Mikor mondhatjuk azt, hogy az egyik halmaz a másik halmaz részhalmaza?
7. Hogyan olvassuk az $N \subset Z$ jelölést?

8. Mely számok alkotják a racionális számok halmazát?
9. Milyen betűvel jelöljük a racionális számok halmazát?
10. Hogyan írható fel bármely racionális szám?
11. Milyen összefüggés van a racionális számok és a végtelen szakaszos tizedes törtek között?
12. Hogyan hívjuk azokat a számokat, amelyek nem racionálisak?
13. Mely halmazok egyesítése alkotja a valós számok halmazát?
14. Milyen betűvel jelöljük a valós számok halmazát?
15. Milyen összefüggés van az N , Z , Q és R halmazok között?

426.° Az alábbi állítások közül melyik hamis:

- 1) a -3 valós szám;
- 2) a -3 racionális szám;
- 3) a -3 egész szám;
- 4) a -3 természetes szám?

427.° Igazak-e az alábbi állítások:

- | | | |
|----------------|-------------------|----------------------------|
| 1) $1 \in N$; | 4) $1 \in R$; | 7) $\sqrt{7} \notin R$; |
| 2) $1 \in Z$; | 5) $-2,3 \in N$; | 8) $\sqrt{121} \notin R$; |
| 3) $1 \in Q$; | 6) $-2,3 \in R$; | 9) $\frac{\pi}{3} \in R$? |

428.° Igazak-e az alábbi állítások:

- | | | |
|-------------------|------------------------------|-----------------------|
| 1) $0 \in N$; | 4) $-\frac{3}{7} \in Q$; | 7) $\sqrt{9} \in Z$; |
| 2) $0 \notin Z$; | 5) $-\frac{3}{7} \notin R$; | 8) $\sqrt{9} \in R$? |
| 3) $0 \in R$; | 6) $\sqrt{9} \in Q$; | |

429.° Igazak-e az alábbi állítások:

- 1) minden természetes szám egész szám;
- 2) minden természetes szám racionális szám;
- 3) minden természetes szám valós szám;
- 4) minden racionális szám egész szám;
- 5) minden valós szám racionális szám;
- 6) minden racionális szám valós szám;
- 7) minden irracionális szám valós szám;
- 8) minden valós szám vagy racionális vagy irracionális szám?

430.° Az alábbi számok közül melyek egy racionális szám tizedes tört alakja és melyek irracionális számok:

- 1) $0,(3)$;
 2) $0,4(32)$;
 3) $0,20200200020\dots$ (a 2-es számjegyek közötti nullák száma eggyel nő)?
- 431.°** Melyik szám nagyobb:
 1) $6,542\dots$ és $6,452\dots$; 2) $-24,064\dots$ és $-24,165\dots$?
- 432.°** Melyik szám nagyobb:
 1) $0,234\dots$ és $0,225\dots$; 2) $-1,333\dots$ és $-1,345\dots$?
- 433.*** Nevezd meg az a -nak legalább egy olyan értékét, melynél az $x^2 = a$ egyenletnek:
 1) két racionális gyöke van;
 2) két irracionális gyöke van;
 3) nincs megoldása!
- 434.*** Hasonlítsátok össze az alábbi számokat:
 1) $\frac{43}{7}$ és $6,12$; 4) $-2,(36)$ és $-2,36$;
 2) $3,(24)$ és $3,24$; 5) $7,(18)$ és $7,(17)!$
 3) π és $3,(14)$;
- 435.*** Hasonlítsátok össze az alábbi számokat:
 1) $\frac{1}{6}$ és $0,2$; 2) $\frac{7}{9}$ és $0,77$; 3) $-1,(645)$ és $-1,(643)!$
- 436.*** Rendezzék csökkenő sorrendbe a $3,(16)$; π ; $-1,82\dots$; $-0,08\dots$; $2,(136)$ számokat!
- 437.*** Rendezzék növekvő sorrendbe a következő számokat: $1,57$; $1,571\dots$; $\frac{\pi}{2}$; $1,(56)$; $1,(572)!$
- 438.**** Igazoljátok, hogy két racionális szám összege, különbsége, szorzata és hányadosa is racionális szám!
- 439.**** Igazoljátok, hogy egy racionális és egy irracionális szám összege irracionális!
- 440.**** Igaz-e, hogy:
 1) bármelyik két irracionális szám összege irracionális;
 2) bármelyik két irracionális szám szorzata irracionális;
 3) bármelyik irracionális és bármelyik racionális szám szorzata irracionális?

ISMETLŐ FELADATOK

441. Egy kilencszintes épület minden szintjén és minden lépcsőházában 8 lakás van. Hányadik lépcsőház, melyik szintjén van a 186. lakás?
442. Az a és b természetes számok közül az a páros szám a b pedig páratlan. Az alábbi kifejezések közül melyik értéke nem lehet természetes szám:

1) $\frac{8b}{5a}$; 2) $\frac{a^2}{b^2}$; 3) $\frac{4a}{b}$; 4) $\frac{b^2}{a}$?

443. Igazoljátok, hogy a változó minden megengedett értékére a

$$\left(\frac{3}{4-4a+a^2} + \frac{2}{a^2-4} \right) \cdot (a-2)^2 - \frac{2a-4}{a+2}$$

kifejezés értéke független az a változó értékétől!

444. Egy vödörben néhány liter víz van. Ha kiöntjük a vödörben lévő víz felét, akkor 14 literrel kevesebb víz marad benne, mint amennyi belefér. Ha 4 liter vizet hozzáöntünk, akkor a vödör térfogatának $\frac{2}{3}$ -a lesz tele vízzel. Hány literes a vödör?

FELKÉSZÜLÉS AZ ÚJ TÉMÁHOZ

445. Határozzátok meg a következő kifejezések értékét:
1) $|-3,5| - |2,6|$; 2) $|-9,6| - |-32|$!
446. Melyik szám abszolút értéke 6?
447. Mely számokra igazak az alábbi egyenlőségek:
1) $|a| = a$;
2) $|a| = -a$;
3) $|a| = |-a|$;
4) $|a| = -|a|$?
448. Mely számokra igazak egyszerre az alábbi egyenlőségek:
 $|a| = a$ és $|a| = -a$?
449. Határozzátok meg az a^2 , $(-a)^2$ és $|a|^2$ kifejezések helyettesítési értékeit, ha $a = -8$ és $a = 7$! Vonjatok le következtetést!
450. Ismeretes, hogy $a > 0$ és $c < 0$. Hasonlítsátok össze az alábbi kifejezéseket nullával:
1) a^3c^4 ; 2) ac^5 !

NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREK HASZNÁLATA

451. Egy osztályba 30 tanuló jár. A tanteremben 15 pad van. Az osztályban a lányok fele fiúkkal ül. Bizonyítsátok be, hogy a tanulókat nem lehet úgy átültetni, hogy a fiúk fele üljön lányokkal!

HA ELKÉSZÜLTÉL A HÁZI FELADATTAL

Az irracionalitás felfedezése

A 13. pontban az $x^2 = 2$ egyenlet megoldása során megállapítottuk, hogy az OA és OB szakaszok hossza $\sqrt{2}$ (22. ábra). Megmutatjuk, hogy a $\sqrt{2}$ irracionális szám.

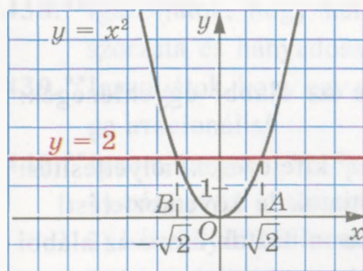
Tegyük fel, hogy a $\sqrt{2}$ racionális szám. Akkor felírhatjuk $\frac{m}{n}$ egyszerűsíthetetlen tört alakban, ahol m és n természetes szám. Azt kapjuk, hogy:

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}.$$

$$\text{De akkor } (\sqrt{2})^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2, \quad 2 = \frac{m^2}{n^2}, \quad m^2 = 2n^2.$$

Az utolsó egyenlőségéből következik, hogy m^2 páros. De ez azt jelenti, hogy akkor m is páros szám. Tehát m felírható $2k$ alakban: $m = 2k$, ahol k természetes szám. Felírhatjuk, hogy $(2k)^2 = 2n^2$; $4k^2 = 2n^2$; $n^2 = 2k^2$. Ebből viszont az következik, hogy n^2 páros, tehát n is páros szám.

Vagyis az $\frac{m}{n}$ tört számlálója és nevezője is páros, tehát a tört



22. ábra

egyszerűsíthető. Ez viszont ellentmond eredeti feltételezésünknek.

Az előző példa (a 22. ábrán az OA és OB szakaszok hossza) szemlélteti, hogy létezik olyan szakasz, melynek a hosszát nem lehet racionális számmal kifejezni, tehát a szakaszok mérésére nem elegendők a racionális számok.

Ezt a tényt az ókori Görögországban, Püthagorasz iskolájában fedezték fel.

Először a püthagoreusok úgy vélték, bármilyen AB és CD szakaszhoz lelhető olyan MN szakasz, amely maradék nélkül néhányszor rá mérhető az adott szakaszokra. Ebből következik, bármely két szakasz aránya kifejezhető természetes számok hányadosaként, vagyis racionális számmal.

Például, a 23. ábrán $AB = 5MN$ és $CD = 2MN$, így $\frac{AB}{CD} = \frac{5}{2}$. Az MN szakaszt az AB és a CD szakaszok **közös mértékének** nevezzük.

Ha két szakasznak létezik közös mértéke, akkor a szakaszokat **összemérhetőnek** nevezzük. Például az AB és CD szakaszok (23. ábra) összemérhetőek.

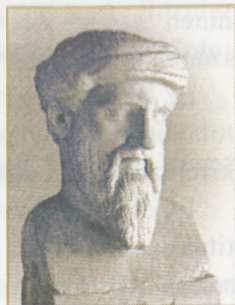
Az ókori görögök úgy tekintették, hogy bármely két szakasz összemérhető, és ez lehetőséget adott arra, hogy bármely szakasz hosszát racionális számmal fejezzék ki.

Valóban, ha az AB szakaszt egységnyi szakasznak választjuk, akkor az AB szakaszra és bármely CD szakaszra létezik olyan e szakasz, amely az adott szakaszok közös mértéke. Tehát $AB = ne$ és $CD = me$,

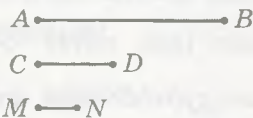
ahol m és n természetes szám. Vagyis $\frac{CD}{AB} = \frac{me}{ne} = \frac{m}{n}$. Mivel $AB = 1$, így $CD = \frac{m}{n}$.

Maguk a püthagoreusok fedezték fel, hogy a négyzet átlója és oldala összemérhetetlen, „asszümetron”. Tehát ha a négyzet oldalát vesszük egységnek, akkor az átló hosszát nem lehet racionális számmal kifejezni.

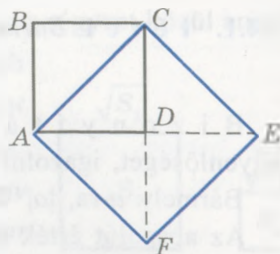
Ahhoz, hogy ezt bebizonyítsuk, vegyünk egy tetszőleges $ABCD$ négyzetet, melynek az oldalát tekintjük egységnek. A négyzet területe $AB^2 = 1$. Szerkesszünk az AC átlóra $ACEF$ négyzetet (24. ábra). Nyilvánvaló, hogy az $ACEF$ négyzet területe 2-szer nagyobb az $ABCD$ négyzet területénél. Tehát $AC^2 = 2$,



Püthagorasz
(kb. Kr. e. 570–500)



23. ábra



24. ábra

innen $AC = \sqrt{2}$. Tehát az AC átló hosszát nem lehet racionális számmal kifejezni.

Ez a felfedezés megváltoztatta az ókori tudósok egyik posztulátumát, amely azt mondta ki, hogy bármelyik két mennyiség aránya kifejezhető két egész szám hányadosaként.

Egy legenda szerint ezt a felfedezést a püthagoreusok a legnagyobb titokban tartották, és azt az embert, aki elmondta, azt az istenek megbüntették. Hajókatasztrófában halt meg.

GYAKORLATOK

1. Bizonyítsátok be, hogy a $\sqrt{3}$ irracionális szám!
2. Igazoljátok, ha egy természetes n szám nem négyzetszám, akkor $\sqrt{n}$ irracionális szám!

14. A számtani négyzetgyök tulajdonságai. A gyökvonás azonosságai

Könnyű belátni, hogy $\sqrt{5^2} = 5$, $\sqrt{1,4^2} = 1,4$, $\sqrt{0^2} = 0$. Azt hihetnénk, hogy $\sqrt{a^2} = a$. De ez nem így van. Például a $\sqrt{(-5)^2} = -5$ egyenlőség nem igaz, mivel $-5 < 0$. Valójában $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$. Ugyanígy meggyőződhetünk arról, hogy $\sqrt{(-7)^2} = 7$ és $\sqrt{(-2,8)^2} = 2,8$.

Általánosan igaz a következő tétel.

14.1. tétel. *Bármely valós számra igaz az alábbi egyenlőség:*

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Bizonyítás. ☉ Ahhoz, hogy bebizonyítsuk a $\sqrt{a} = b$ egyenlőséget, igazolni kell hogy $b \geq 0$ és $b^2 = a$.

Bármely a -ra, $|a| \geq 0$.

Az abszolút érték meghatározása alapján: $(|a|)^2 = a^2$. ▲

A következő tétel általánosítja az előző kijelentést.

14. A számtani négyzetgyökök tulajdonságai. A gyökvonás azonosságai

14.2. tétel (a hatvány négyzetgyöke). *Bármely valós a számra és természetes n -re igaz az alábbi egyenlőség:*

$$\sqrt[n]{a^{2n}} = |a^n|.$$

A tétel bizonyítása az előző tétel bizonyításához hasonló. Végezzék el önállóan.

14.3. tétel (a szorzat négyzetgyöke). *Minden valós $a \geq 0$ és $b \geq 0$ számra igaz az alábbi egyenlőség:*

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Bizonyítás. ☉ Mivel $\sqrt{a} \geq 0$ és $\sqrt{b} \geq 0$, így $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geq 0$.

A szorzat négyzetére vonatkozó azonosságból következik:

$(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = ab$. Tehát a $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ szorzat csak nemnegatív értéket vesz fel és a négyzete egyenlő ab -vel. ▲

Megjegyezzük, hogy ez a tétel érvényes több tényezőre is. Például, ha $a \geq 0$, $b \geq 0$ és $c \geq 0$, akkor

$$\sqrt{abc} = \sqrt{(ab)c} = \sqrt{ab} \cdot \sqrt{c} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c}.$$

14.4. tétel (a tört négyzetgyöke). *Minden valós $a \geq 0$ és $b > 0$ számra igaz az alábbi egyenlőség:*

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

A tétel bizonyítása az előző 14.3.-hoz hasonló.

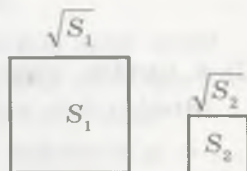
Könnyen belátható, hogy két S_1 és S_2 területű négyzet közül annak nagyobb az oldala, melyiknek a területe nagyobb

(25. ábra). Tehát, ha $S_1 > S_2$, akkor

$\sqrt{S_1} > \sqrt{S_2}$. Ezen egyszerű gondolatmenet alap-

ján megállapíthatjuk hogy: *minden nemnegatív a_1 és a_2 valós számra, ha $a_1 > a_2$, akkor*

$\sqrt{a_1} > \sqrt{a_2}$.



25. ábra

1. PÉLDA

Határozzuk meg a következő kifejezések értékét:

$$1) \sqrt{(-7,3)^2}; \quad 2) \sqrt{1,2^4}; \quad 3) \sqrt{0,81 \cdot 225}; \quad 4) \sqrt{\frac{16}{49}}!$$

Megoldás

$$1) \sqrt{(-7,3)^2} = |-7,3| = 7,3.$$

$$2) \sqrt{1,2^4} = 1,2^2 = 1,44.$$

$$3) \sqrt{0,81 \cdot 225} = \sqrt{0,81} \cdot \sqrt{225} = 0,9 \cdot 15 = 13,5.$$

$$4) \sqrt{\frac{16}{49}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{49}} = \frac{4}{7}.$$

2. PÉLDA

Határozzuk meg az alábbi kifejezések értékét: 1) $\sqrt{18} \cdot \sqrt{2}$; 2) $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{150}}$.

Megoldás

- 1) A négyzetgyökök szorzatát helyettesítsük a szorzat négyzetgyökével:

$$\sqrt{18} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{18 \cdot 2} = \sqrt{36} = 6.$$

- 2) A négyzetgyökök hányadosát helyettesítsük a hányados négyzetgyökével:

$$\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{150}} = \sqrt{\frac{24}{150}} = \sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}.$$

3. PÉLDA

Egyszerűsítsük a következő kifejezéseket: 1) $\sqrt{a^{14}}$; 2) $\sqrt{9a^6}$, ha $a \leq 0$; 3) $\sqrt{m^2n^2}$, ha $m \geq 0$, $n \leq 0$; 4) $\sqrt{a^{36}}$!

Megoldás

- 1) A hatvány négyzetgyökének azonossága alapján:

$$\sqrt{a^{14}} = |a^7| = \begin{cases} a^7, & \text{ha } a \geq 0, \\ -a^7, & \text{ha } a < 0. \end{cases}$$

- 2) A hatvány négyzetgyökének azonossága alapján: $\sqrt{9a^6} = 3 \cdot |a^3|$.
Mivel $a \leq 0$, ezért $a^3 \leq 0$. Így

$$\sqrt{9a^6} = 3 \cdot |a^3| = -3a^3.$$

- 3) $\sqrt{m^2n^2} = |m| \cdot |n| = m \cdot (-n) = -mn$.

4) $\sqrt{a^{36}} = |a^{18}|$. Mivel $a^{18} \geq 0$, ezért $\sqrt{a^{36}} = |a^{18}| = a^{18}$.

4. PÉLDA

Határozzuk meg a következő kifejezések értékét:

1) $\sqrt{37^2 - 12^2}$; 2) $\sqrt{8 \cdot 648}$; 3) $\sqrt{16,9 \cdot 0,4}$!

Megoldás

1) A gyök alatti kifejezést alakítsuk szorzattá:

$$\sqrt{37^2 - 12^2} = \sqrt{(37-12)(37+12)} = \sqrt{25 \cdot 49} = 5 \cdot 7 = 35.$$

2) A gyök alatti kifejezést alakítsuk négyzetek szorzatává:

$$\sqrt{8 \cdot 648} = \sqrt{8 \cdot 2 \cdot 324} = \sqrt{16 \cdot 324} = 4 \cdot 18 = 72.$$

3) $\sqrt{16,9 \cdot 0,4} = \sqrt{169 \cdot 0,04} = 13 \cdot 0,2 = 2,6.$

5. PÉLDA

Ábrázoljuk az $y = \sqrt{x^2} + x$ függvény grafikonját!

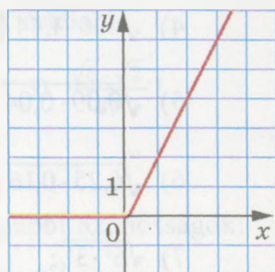
Megoldás

Mivel $\sqrt{x^2} = |x|$, ezért $y = |x| + x$.

Ha $x \geq 0$, akkor $y = x + x = 2x$.

Ha $x < 0$, akkor $y = -x + x = 0$.

$$\text{Tehát } y = \begin{cases} 2x, & \text{ha } x \geq 0, \\ 0, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$



26. ábra

A függvény grafikonja a 26. ábrán látható.

- ?
1. Mivel egyenlő $\sqrt{a^2}$?
 2. Foglazzátok meg a hatvány négyzetgyökekről szóló tételt!
 3. Foglazzátok meg a szorzat négyzetgyökekről szóló tételt!
 4. Foglazzátok meg a tört négyzetgyökekről szóló tételt!
 5. Ismeretes, hogy az a_1 és a_2 nemnegatív számokra $a_1 > a_2$.
Melyik szám nagyobb a $\sqrt{a_1}$ vagy $\sqrt{a_2}$?

452.° Mennyi az alábbi kifejezések értéke:

- | | | |
|------------------------|-------------------------|------------------------|
| 1) $\sqrt{0,4^2}$; | 4) $3\sqrt{1,2^2}$; | 7) $5\sqrt{(-10)^4}$; |
| 2) $\sqrt{(-1,8)^2}$; | 5) $\sqrt{6^4}$; | 8) $-4\sqrt{(-1)^4}$; |
| 3) $2\sqrt{(-15)^2}$; | 6) $\sqrt{(-2)^{10}}$; | 9) $-10\sqrt{3^6}$? |

453.° Számítsátok ki az alábbi kifejezés értékét:

- 1) $\sqrt{a^2}$, ha $a = 4,6$; $-18,6$;
- 2) $\sqrt{b^4}$, ha $b = -3$; $1,2$;
- 3) $0,1\sqrt{c^6}$, ha $c = -2$; 5 !

454.° Számítsátok ki a következő kifejezések értékét:

- | | |
|-------------------------------|---|
| 1) $\sqrt{9 \cdot 25}$; | 9) $\sqrt{25 \cdot 64 \cdot 0,36}$; |
| 2) $\sqrt{16 \cdot 2500}$; | 10) $\sqrt{0,01 \cdot 0,81 \cdot 2500}$; |
| 3) $\sqrt{0,64 \cdot 36}$; | 11) $\sqrt{\frac{81}{100}}$; |
| 4) $\sqrt{400 \cdot 1,44}$; | 12) $\sqrt{\frac{49}{256}}$; |
| 5) $\sqrt{0,09 \cdot 0,04}$; | 13) $\sqrt{3\frac{13}{36}}$; |
| 6) $\sqrt{6,25 \cdot 0,16}$; | 14) $\sqrt{3\frac{1}{16} \cdot 2\frac{14}{25}}$; |
| 7) $\sqrt{6^2 \cdot 3^4}$; | 15) $\sqrt{\frac{169}{36 \cdot 81}}$; |
| 8) $\sqrt{7^2 \cdot 2^8}$; | 16) $\sqrt{\frac{121 \cdot 256}{25 \cdot 100}}$! |

455.° Mennyi a következő kifejezések értéke:

- | | | |
|-----------------------------|-------------------------------|--|
| 1) $\sqrt{36 \cdot 81}$; | 5) $\sqrt{0,36 \cdot 1,21}$; | 9) $\sqrt{2,25 \cdot 0,04 \cdot 1600}$; |
| 2) $\sqrt{900 \cdot 49}$; | 6) $\sqrt{5^2 \cdot 3^6}$; | 10) $\sqrt{13\frac{4}{9}}$; |
| 3) $\sqrt{16 \cdot 0,25}$; | 7) $\sqrt{4^4 \cdot 3^2}$; | 11) $\sqrt{1\frac{7}{9} \cdot \frac{4}{25}}$; |
| 4) $\sqrt{9 \cdot 1,69}$; | 8) $\sqrt{2^6 \cdot 5^2}$; | 12) $\sqrt{\frac{1}{16} \cdot \frac{9}{25}}$? |

456.° Határozzátok meg a következő kifejezések értékét:

- 1) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}$; 4) $\sqrt{0,009} \cdot \sqrt{1000}$; 7) $\sqrt{2,4} \cdot \sqrt{1\frac{2}{3}}$;
 2) $\sqrt{32} \cdot \sqrt{2}$; 5) $\sqrt{200} \cdot \sqrt{0,18}$; 8) $\sqrt{\frac{2}{11}} \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{\frac{1}{11}}$;
 3) $\sqrt{18} \cdot \sqrt{50}$; 6) $\sqrt{13} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{26}$; 9) $\sqrt{2^3 \cdot 3} \cdot \sqrt{2^3 \cdot 3^3}$!

457.° Határozzátok meg a következő kifejezések értékét:

- 1) $\sqrt{27} \cdot \sqrt{3}$; 3) $\sqrt{10} \cdot \sqrt{12,1}$; 5) $\sqrt{1\frac{3}{7}} \cdot \sqrt{2,8}$;
 2) $\sqrt{18} \cdot \sqrt{2}$; 4) $\sqrt{0,5} \cdot \sqrt{50}$; 6) $\sqrt{5 \cdot 2^3} \cdot \sqrt{5^3 \cdot 2^3}$!

458.° Határozzátok meg az alábbi kifejezések értékét:

- 1) $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{48}}$; 5) $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{50}}$; 7) $\frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$;
 2) $\frac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}}$; 4) $\frac{\sqrt{3,2}}{\sqrt{0,2}}$; 6) $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{147}}$; 8) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{15}}$!

459.° Határozzátok meg az alábbi kifejezések értékét:

- 1) $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$; 3) $\frac{\sqrt{6,3}}{\sqrt{0,7}}$; 5) $\frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{3}}$!
 2) $\frac{\sqrt{150}}{\sqrt{6}}$; 4) $\frac{\sqrt{98}}{\sqrt{242}}$;

460.° Az a szám mely értékeinél igazak az alábbi azonosságok:

- 1) $\sqrt{a^2} = a$; 2) $\sqrt{a^2} = -a$?

461.° Az a és a b számok mely értékeinél igazak az alábbi azonosságok:

- 1) $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$; 3) $\sqrt{-ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-b}$?
 2) $\sqrt{ab} = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}$;

462.° Határozzátok meg az alábbi kifejezések értékét! A gyök alatti kifejezéseket alakítsátok át négyzetek szorzatává:

- 1) $\sqrt{18 \cdot 32}$; 4) $\sqrt{75 \cdot 48}$; 7) $\sqrt{2,7 \cdot 1,2}$;
 2) $\sqrt{8 \cdot 98}$; 5) $\sqrt{288 \cdot 50}$; 8) $\sqrt{80 \cdot 45}$;
 3) $\sqrt{3,6 \cdot 14,4}$; 6) $\sqrt{4,5 \cdot 72}$; 9) $\sqrt{33 \cdot 297}$.

463.* Határozzátok meg a következő kifejezések értékét:

$$1) \sqrt{18 \cdot 200}; \quad 3) \sqrt{14,4 \cdot 0,9}; \quad 5) \sqrt{12,5 \cdot 32};$$

$$2) \sqrt{3,6 \cdot 0,4}; \quad 4) \sqrt{13 \cdot 52}; \quad 6) \sqrt{108 \cdot 27}!$$

464.* Határozzátok meg a következő kifejezések értékét:

$$1) \sqrt{41^2 - 40^2}; \quad 3) \sqrt{8,5^2 - 7,5^2}; \quad 5) \sqrt{\frac{155^2 - 134^2}{84}};$$

$$2) \sqrt{145^2 - 144^2}; \quad 4) \sqrt{21,8^2 - 18,2^2}; \quad 6) \sqrt{\frac{139^2 - 86^2}{98,5^2 - 45,5^2}}!$$

465.* Határozzátok meg a következő kifejezések értékét:

$$1) \sqrt{6,8^2 - 3,2^2}; \quad 2) \sqrt{98,5^2 - 97,5^2}; \quad 3) \sqrt{\frac{98}{228^2 - 164^2}}!$$

466.* Helyettesítsétek az alábbi kifejezéseket velük azonos, gyököt nem tartalmazó kifejezéssel:

$$1) \sqrt{b^2}; \quad 2) -0,4\sqrt{c^2}; \quad 3) \sqrt{a^6}; \quad 4) \sqrt{m^8}!$$

467.* Helyettesítsétek az alábbi kifejezéseket gyököt nem tartalmazó, velük azonos kifejezéssel:

$$1) 1,2\sqrt{x^2}; \quad 2) \sqrt{y^4}; \quad 3) \sqrt{n^{10}}!$$

468.* Egyszerűsítsétek az alábbi kifejezéseket:

$$1) \sqrt{m^2}, \text{ ha } m > 0;$$

$$2) \sqrt{n^2}, \text{ ha } n < 0;$$

$$3) \sqrt{16p^2}, \text{ ha } p \geq 0;$$

$$4) \sqrt{0,36k^2}, \text{ ha } k \leq 0;$$

$$5) \sqrt{c^{12}};$$

$$6) \sqrt{0,25b^{14}}, \text{ ha } b \leq 0;$$

$$7) \sqrt{81x^4y^2}, \text{ ha } y \geq 0;$$

$$8) \sqrt{0,01a^6b^{10}}, \text{ ha } a \leq 0; b \geq 0;$$

$$9) -1,2x\sqrt{64x^{18}}, \text{ ha } x \leq 0;$$

$$10) \frac{\sqrt{a^{12}b^{22}c^{36}}}{a^4b^8c^{10}}, \text{ ha } b < 0;$$

$$11) \frac{3,3a^4}{b^3} \sqrt{\frac{b^{24}}{121a^{26}}}, \text{ ha } a < 0;$$

$$12) -0,5m^5 \sqrt{1,96m^6n^8}, \text{ ha } m \leq 0!$$

469.* Egyszerűsítsétek az alábbi kifejezéseket:

$$1) \sqrt{9a^{16}};$$

$$2) \sqrt{0,81d^6}, \text{ ha } d \geq 0;$$

$$3) -5\sqrt{4x^2}, \text{ ha } x \leq 0;$$

$$4) -0,1\sqrt{100z^{10}}, \text{ ha } z \geq 0;$$

$$5) \sqrt{p^6q^8}, \text{ ha } p \geq 0;$$

$$6) \sqrt{25m^{34}n^{38}}, \text{ ha } m \leq 0; n \leq 0;$$

$$7) ab^2\sqrt{a^4b^{18}c^{22}}, \text{ ha } b \geq 0; c \leq 0;$$

$$8) -\frac{8m^3p^4}{k^2} \sqrt{\frac{625k^{30}p^{40}}{144m^6}}, \text{ ha } m < 0; k > 0!$$

470.** Az alábbi állítások közül melyek igazak az a bármely valós értékére:

$$1) \sqrt{a^2} = a; \quad 2) \sqrt{a^4} = a^2; \quad 3) \sqrt{a^6} = a^3; \quad 4) \sqrt{a^8} = a^4?$$

471.** Mely valós a értékekre igazak a következő egyenlőségek:

$$1) \sqrt{a^{10}} = a^5; \quad 3) \sqrt{a^2} = (\sqrt{a})^2;$$

$$2) \sqrt{a^{10}} = -a^5; \quad 4) \sqrt{a^2} = (\sqrt{-a})^2?$$

472.** Ábrázoljátok az alábbi függvényeket:

$$1) y = \sqrt{x^2} - x \text{ ha } x \leq 0; \quad 3) y = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x};$$

$$2) y = 2x + \sqrt{x^2}; \quad 4) y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2}} + 3!$$

473.** Ábrázoljátok az alábbi függvényeket:

$$1) y = \sqrt{x^2} - 2x \text{ ha } x \geq 0; \quad 2) y = \sqrt{-x} \cdot \sqrt{-x}!$$

474.* Mely x -ekre igazak az alábbi egyenlőségek:

$$1) \sqrt{x^2} = x - 4; \quad 2) \sqrt{x^2} = 6 - x; \quad 3) 2\sqrt{x^2} = x + 3?$$

475.* Oldjátok meg az alábbi egyenleteket:

$$1) \sqrt{x^2} = x + 8; \quad 2) \sqrt{x^2} = 6x - 10!$$

ISMÉTLŐ FELADATOK

476. Határozzátok meg az

$$\left(\frac{a^2 - 5a}{a^2 - 10a + 25} + \frac{25}{a^2 - 25} \right) : \frac{125 - a^3}{5 + a}$$

kifejezés értékét, ha $a = 4,5$!

477. Egy traktorosnak 8 nap alatt kell bevetnie a kijelölt földterületet. A rossz idő miatt naponta a tervezettnél 3 hektárral kisebb földterületet tudott csak bevetni. Így 10 nap alatt végzett a munkával. Mekkora földterületet kellett a traktorosnak bevetnie?

478. Az a és b természetes számok közül a páros, b páratlan. Az alábbi kifejezések közül melyik értéke lesz bármely a és b -re páros:

1) $(a + b) b$; 2) $\frac{ab}{2}$; 3) $\frac{a^2 b}{2}$; 4) $\frac{ab^2}{2}$?

 NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREK HASZNÁLATA

479. A táblára felírtak 102 egymást követő természetes számot. Felbonthatók-e ezek a számok két olyan csoportra, melyek összege prímszám (egy-egy csoportban legalább két összeadandónak kell lenni)?

15. Négyzetgyököt tartalmazó kifejezések azonos átalakításai

A szorzat négyzetgyökének azonossága alapján átalakítjuk a $\sqrt{48}$ kifejezést:

$$\sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3}.$$

Tehát a $\sqrt{48}$ felírható egy racionális szám, a 4 és egy irracionális szám, a $\sqrt{3}$ szorzataként. Ezt az eljárást a *négyzetgyökjel alóli kiemelésnek* nevezzük.

Figyeljük meg az előző átalakítást fordított sorrendben:

$$4\sqrt{3} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{48}.$$

Ez az eljárás *bevétel a négyzetgyökjel alá*.

1. PÉLDA

Az alábbi kifejezésekben emeljünk ki tényezőt a gyökjel alól:

- 1) $\sqrt{150}$; 2) $\sqrt{72a^8}$; 3) $\sqrt{b^{35}}$; 4) $\sqrt{-b^{35}}$; 5) $\sqrt{a^2b^3}$, ha $a < 0$!

Megoldás

- 1) A gyökjel alatti számot írjuk fel olyan szorzatként, melynek egyik tényezője négyzetszám:

$$\sqrt{150} = \sqrt{25 \cdot 6} = 5\sqrt{6}.$$

2) $\sqrt{72a^8} = \sqrt{36a^8 \cdot 2} = 6a^4\sqrt{2}.$

- 3) A feltételekből következik, hogy $b \geq 0$, ezért

$$\sqrt{b^{35}} = \sqrt{b^{34} \cdot b} = |b^{17}| \sqrt{b} = b^{17}\sqrt{b}.$$

- 4) A feltételekből következik, hogy $b \leq 0$, ezért

$$\sqrt{-b^{35}} = \sqrt{b^{34} \cdot (-b)} = |b^{17}| \sqrt{-b} = -b^{17}\sqrt{-b}.$$

- 5) A feltételekből következik, hogy $b \geq 0$, ezért

$$\sqrt{a^2b^3} = \sqrt{a^2b^2b} = |a| \cdot |b| \sqrt{b} = -ab\sqrt{b}.$$

2. PÉLDA

Az alábbi kifejezésekben vigyünk be tényezőt a gyökjel alá:

- 1) $-2\sqrt{7}$; 2) $a\sqrt{7}$; 3) $3b\sqrt{-\frac{b}{3}}$; 4) $c\sqrt{c^7}$!

Megoldás

1) $-2\sqrt{7} = -\sqrt{4} \cdot \sqrt{7} = -\sqrt{28}.$

2) Ha $a \geq 0$, akkor $a\sqrt{7} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{7a^2}$, ha $a < 0$, akkor $a\sqrt{7} = -\sqrt{a^2} \cdot \sqrt{7} = -\sqrt{7a^2}.$

3) A feltételekből következik, hogy $b \leq 0$, ezért $3b\sqrt{-\frac{b}{3}} =$

$$= -\sqrt{9b^2} \cdot \sqrt{-\frac{b}{3}} = -\sqrt{9b^2 \cdot \left(-\frac{b}{3}\right)} = -\sqrt{-3b^3}.$$

4) A feltételekből következik, hogy $c \geq 0$, ezért $c\sqrt{c^7} = \sqrt{c^2} \cdot \sqrt{c^7} = \sqrt{c^9}.$

3. PÉLDA

Egyszerűsítsük az alábbi kifejezéseket: 1) $\sqrt{54a} + \sqrt{24a} - \sqrt{600a}$;

2) $(3+2\sqrt{3})(2-\sqrt{3})$; 3) $(7-3\sqrt{2})^2 - (\sqrt{10}+\sqrt{5})(\sqrt{10}-\sqrt{5})!$

Megoldás

- 1) Emeljünk ki tényezőt a gyökjel alól:

$$\begin{aligned}\sqrt{54a} + \sqrt{24a} - \sqrt{600a} &= \sqrt{9 \cdot 6a} + \sqrt{4 \cdot 6a} - \sqrt{100 \cdot 6a} = \\ &= 3\sqrt{6a} + 2\sqrt{6a} - 10\sqrt{6a} = \sqrt{6a} (3 + 2 - 10) = \\ &= \sqrt{6a} \cdot (-5) = -5\sqrt{6a}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2) (3 + 2\sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) &= 6 - 3\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 2(\sqrt{3})^2 = \\ &= 6 + \sqrt{3} - 6 = \sqrt{3}.\end{aligned}$$

- 3) Alkalmazzuk a különbség négyzetének és a kéttag különbsége és összege szorzatának nevezetes azonosságait:

$$\begin{aligned}(7 - 3\sqrt{2})^2 - (\sqrt{10} + \sqrt{5})(\sqrt{10} - \sqrt{5}) &= 7^2 - 2 \cdot 7 \cdot 3\sqrt{2} + (3\sqrt{2})^2 - \\ &- ((\sqrt{10})^2 - (\sqrt{5})^2) = 49 - 42\sqrt{2} + 18 - (10 - 5) = 62 - 42\sqrt{2}.\end{aligned}$$

4. PÉLDA

Alakítsuk szorzattá a következő kifejezéseket: 1) $a^2 - 2$; 2) $b - 4$, ha $b \geq 0$; 3) $9c - 6\sqrt{5c} + 5$; 4) $a + \sqrt{a}$; 5) $\sqrt{3} + 6$; 6) $\sqrt{35} - \sqrt{15}$.

Megoldás

- 1) Írjuk fel az adott kifejezést kéttag négyzetének különbségeként

$$a^2 - 2 = a^2 - (\sqrt{2})^2 = (a - \sqrt{2})(a + \sqrt{2}).$$

- 2) Mivel a feltétel szerint
- $b \geq 0$
- , ezért

$$b - 4 = (\sqrt{b})^2 - 4 = (\sqrt{b} - 2)(\sqrt{b} + 2).$$

- 3) Alkalmazzuk a kéttag különbségének négyzete azonosságát:

$$9c - 6\sqrt{5c} + 5 = (3\sqrt{c})^2 - 2 \cdot 3\sqrt{c} \cdot \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 = (3\sqrt{c} - \sqrt{5})^2.$$

- 4) Emeljünk ki közös tényezőt:
- $a + \sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 + \sqrt{a} = \sqrt{a}(\sqrt{a} + 1)$
- .

$$5) \sqrt{3} + 6 = \sqrt{3} + 2 \cdot (\sqrt{3})^2 = \sqrt{3}(1 + 2\sqrt{3}).$$

$$6) \sqrt{35} - \sqrt{15} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{7} - \sqrt{5} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{5}(\sqrt{7} - \sqrt{3}).$$

5. PÉLDA

Egyszerűsítsük a következő törtet:

$$1) \frac{b-1}{\sqrt{b}+1}; \quad 2) \frac{2-3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}; \quad 3) \frac{a-b}{a-2\sqrt{ab}+b}, \text{ ha } a > 0 \text{ és } b > 0!$$

Megoldás

1) A tört számlálóját alakítsuk szorzattá:

$$\frac{b-1}{\sqrt{b}+1} = \frac{(\sqrt{b})^2-1}{\sqrt{b}+1} = \frac{(\sqrt{b}-1)(\sqrt{b}+1)}{\sqrt{b}+1} = \sqrt{b}-1.$$

$$2) \frac{2-3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2})^2-3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-3)}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}-3.$$

3) Mivel $a > 0$ és $b > 0$, így szorzattá alakíthatjuk úgy a számlálót, mint a nevezőt:

$$\frac{a-b}{a-2\sqrt{ab}+b} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}.$$

6. PÉLDA

Gyöktelenítsük a következő törtek nevezőjét:

$$1) \frac{15}{2\sqrt{3}}; \quad 2) \frac{14}{5\sqrt{2}-1}!$$

A **nevező gyöktelenítése azt jelenti**, hogy a törtet úgy bővítjük, hogy a nevezőjében ne legyen gyökös kifejezés.

Megoldás

1) Bővítsük a törtet $\sqrt{3}$ -mal, vagyis szorozzuk meg a számlálót és nevezőt is $\sqrt{3}$ -mal:

$$\frac{15}{2\sqrt{3}} = \frac{15\sqrt{3}}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{15\sqrt{3}}{2(\sqrt{3})^2} = \frac{15\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

2) Szorozzuk meg a számlálót és a nevezőt is $5\sqrt{2}+1$ kifejezéssel:

$$\begin{aligned} \frac{14}{5\sqrt{2}-1} &= \frac{14(5\sqrt{2}+1)}{(5\sqrt{2}-1)(5\sqrt{2}+1)} = \frac{14(5\sqrt{2}+1)}{(5\sqrt{2})^2-1} = \frac{14(5\sqrt{2}+1)}{50-1} \\ &= \frac{14(5\sqrt{2}+1)}{49} = \frac{2(5\sqrt{2}+1)}{7} = \frac{10\sqrt{2}+2}{7}. \end{aligned}$$

F e l e l e t: 1) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{10\sqrt{2}+2}{7}$.

7. PÉLDA

Igazoljuk a

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{2\sqrt{ab}}{b-a} \right) \cdot \left(\sqrt{a} - \frac{\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \right) = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

azonosságot!

Megoldás

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - \frac{2\sqrt{ab}}{b-a} \right) \cdot \left(\sqrt{a} - \frac{\sqrt{ab} + b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right) = \\
 & \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} - \sqrt{b}) + \sqrt{b}(\sqrt{a} + \sqrt{b}) + 2\sqrt{ab}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} \cdot \left(\sqrt{a} - \frac{\sqrt{b}(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right) = \\
 & = \frac{a - \sqrt{ab} + \sqrt{ab} + b + 2\sqrt{ab}}{a-b} \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{b}) = \frac{(a + 2\sqrt{ab} + b)(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{a-b} = \\
 & = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 (\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \sqrt{a} + \sqrt{b}.
 \end{aligned}$$

8. PÉLDA

Egyszerűsítsük a $\sqrt{12+6\sqrt{3}}$ kifejezést!

Megoldás

Alakítsuk a gyök alatti kifejezést teljes négyzetté:

$$\sqrt{12+6\sqrt{3}} = \sqrt{9+2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{(3+\sqrt{3})^2} = 3+\sqrt{3}.$$

Felelet: $3+\sqrt{3}$.

480.° Emeljete ki tényezőt a gyökjel alól:

- | | | | |
|------------------|-------------------|--------------------|----------------------|
| 1) $\sqrt{8}$; | 4) $\sqrt{54}$; | 7) $\sqrt{275}$; | 10) $\sqrt{0,48}$; |
| 2) $\sqrt{12}$; | 5) $\sqrt{490}$; | 8) $\sqrt{108}$; | 11) $\sqrt{450}$; |
| 3) $\sqrt{32}$; | 6) $\sqrt{500}$; | 9) $\sqrt{0,72}$; | 12) $\sqrt{36300}$! |

481.° Egyszerűsítsétek az alábbi kifejezéseket:

- | | |
|------------------------------|-------------------------------|
| 1) $\frac{2}{3}\sqrt{45}$; | 3) $\frac{1}{10}\sqrt{200}$; |
| 2) $\frac{1}{2}\sqrt{128}$; | 4) $-0,05\sqrt{4400}$! |

482.° Emeljete ki tényezőt a gyökjel alól:

- | | | | |
|------------------|-----------------------------|-----------------------------|------------------------------|
| 1) $\sqrt{27}$; | 4) $\sqrt{125}$; | 7) $-2\sqrt{0,18}$; | 10) $\frac{3}{7}\sqrt{98}$; |
| 2) $\sqrt{24}$; | 5) $\frac{1}{8}\sqrt{96}$; | 8) $\frac{4}{9}\sqrt{63}$; | 11) $10\sqrt{0,03}$; |
| 3) $\sqrt{20}$; | 6) $0,4\sqrt{250}$; | 9) $0,8\sqrt{1250}$; | 12) $0,7\sqrt{1000}$! |

483.° Vigyetek be tényezőt a gyökjel alá:

- 1) $7\sqrt{2}$; 4) $-10\sqrt{14}$; 7) $\frac{1}{4}\sqrt{32}$; 10) $-0,3\sqrt{10b}$;
 2) $3\sqrt{13}$; 5) $5\sqrt{8}$; 8) $-\frac{2}{3}\sqrt{54}$; 11) $3\sqrt{\frac{1}{3}}$;
 3) $-2\sqrt{17}$; 6) $6\sqrt{a}$; 9) $\frac{1}{8}\sqrt{128a}$; 12) $\frac{2}{9}\sqrt{\frac{27}{28}}$!

484.° Vigyetek be tényezőt a gyökjel alá:

- 1) $2\sqrt{6}$; 3) $-11\sqrt{3}$; 5) $-7\sqrt{3c}$; 7) $8\sqrt{\frac{n}{8}}$;
 2) $9\sqrt{2}$; 4) $12\sqrt{b}$; 6) $-10\sqrt{0,7m}$; 8) $-\frac{1}{3}\sqrt{18p}$!

485.° Egyszerűsítsétek a következő kifejezéseket:

- 1) $4\sqrt{a} + 3\sqrt{a} - 5\sqrt{a}$; 3) $5\sqrt{c} + 3\sqrt{d} - \sqrt{c} + 3\sqrt{d}$;
 2) $6\sqrt{b} + 2\sqrt{b} - 8\sqrt{b}$; 4) $\sqrt{5} + 7\sqrt{5} - 4\sqrt{5}$!

486.° Egyszerűsítsétek a következő kifejezéseket:

- 1) $3\sqrt{a} - 2\sqrt{a}$; 3) $9\sqrt{6} - 2\sqrt{3} + 8\sqrt{3} - 3\sqrt{6}$!
 2) $\sqrt{c} + 10\sqrt{c} - 14\sqrt{c}$;

487.° Helyettesítsétek a következő kifejezéseket velük azonos kifejezésekkel:

- 1) $\sqrt{9a} + \sqrt{25a} - \sqrt{49a}$;
 2) $\sqrt{64b} - \frac{1}{6}\sqrt{36b}$;
 3) $2\sqrt{0,04c} - 0,3\sqrt{16c} + \frac{1}{3}\sqrt{0,81c}$;
 4) $0,4\sqrt{100m} + 15\sqrt{\frac{4}{9}m} - 1,2\sqrt{2,25m}$!

488.° Egyszerűsítsétek az alábbi kifejezéseket:

- 1) $2\sqrt{4x} + 6\sqrt{16x} - \sqrt{625x}$;
 2) $3\sqrt{0,09y} - 0,6\sqrt{144y} + \frac{18}{11}\sqrt{\frac{121}{36}}y$!

489.° Egyszerűsítsétek az alábbi kifejezéseket:

- 1) $8\sqrt{2} - \sqrt{32}$; 3) $\sqrt{96} - 3\sqrt{6}$;
 2) $6\sqrt{3} - \sqrt{27}$; 4) $2\sqrt{500} - 8\sqrt{5}$;

$$5) 5\sqrt{7} - \sqrt{700} - 0,5\sqrt{28}; \quad 6) 2\sqrt{20} - \frac{1}{3}\sqrt{45} - 0,6\sqrt{125}!$$

490.° Racionálisak vagy irracionálisak-e az alábbi kifejezések:

$$1) \sqrt{48} - 6 - 4\sqrt{3}; \quad 2) \sqrt{162} - 9\sqrt{2} + \sqrt{27}?$$

491.° Egyszerűsítsék a következő kifejezéseket:

$$\begin{array}{ll} 1) 4\sqrt{700} - 27\sqrt{7}; & 4) 5\sqrt{12} - 7\sqrt{3}; \\ 2) \sqrt{75} - 6\sqrt{3}; & 5) 3\sqrt{72} - 4\sqrt{2} + 2\sqrt{98}; \\ 3) 2\sqrt{50} - 8\sqrt{2}; & 6) \frac{1}{3}\sqrt{108} + \sqrt{363} - \frac{2}{9}\sqrt{243}! \end{array}$$

492.° Egyszerűsítsék a következő kifejezéseket:

$$\begin{array}{ll} 1) \sqrt{2}(\sqrt{50} + \sqrt{8}); & 3) (3\sqrt{5} - 4\sqrt{3})\sqrt{5}; \\ 2) (\sqrt{3} - \sqrt{12})\sqrt{3}; & 4) 2\sqrt{2}\left(3\sqrt{18} - \frac{1}{4}\sqrt{2} + \sqrt{32}\right)! \end{array}$$

493.° Egyszerűsítsék az alábbi kifejezéseket:

$$\begin{array}{ll} 1) \sqrt{7}(\sqrt{7} - \sqrt{28}); & 3) (4\sqrt{3} - \sqrt{75} + 4)3\sqrt{3}; \\ 2) (\sqrt{18} + \sqrt{72})\sqrt{2}; & 4) (\sqrt{600} + \sqrt{6} - \sqrt{24})\sqrt{6}! \end{array}$$

494.° Végezzék el a kijelölt szorzást:

$$\begin{array}{ll} 1) (2 - \sqrt{3})(\sqrt{3} + 1); & 6) (y - \sqrt{7})(y + \sqrt{7}); \\ 2) (\sqrt{2} + \sqrt{5})(2\sqrt{2} - \sqrt{5}); & 7) (4\sqrt{2} - 2\sqrt{3})(2\sqrt{3} + 4\sqrt{2}); \\ 3) (a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b}); & 8) (m + \sqrt{n})^2; \\ 4) (\sqrt{b} - \sqrt{c})(\sqrt{b} + \sqrt{c}); & 9) (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2; \\ 5) (4 + \sqrt{3})(4 - \sqrt{3}); & 10) (2 - 3\sqrt{3})^2! \end{array}$$

495.° Végezzék el a kijelölt szorzást:

$$\begin{array}{ll} 1) (\sqrt{7} + 3)(3\sqrt{7} - 1); & 5) (\sqrt{5} - x)(\sqrt{5} + x); \\ 2) (4\sqrt{2} - \sqrt{3})(2\sqrt{2} + 5\sqrt{3}); & 6) (\sqrt{19} + \sqrt{17})(\sqrt{19} - \sqrt{17}); \\ 3) (\sqrt{p} - q)(\sqrt{p} + q); & 7) (\sqrt{6} + \sqrt{2})^2; \\ 4) (6 - \sqrt{13})(6 + \sqrt{13}); & 8) (3 - 2\sqrt{15})^2! \end{array}$$

496.° Mennyi az alábbi kifejezések értéke:

$$1) (2 + \sqrt{7})^2 - 4\sqrt{7}; \quad 2) (\sqrt{6} - \sqrt{3})^2 + 6\sqrt{2}?$$

497.° Határozzátok meg az alábbi kifejezések értékét:

1) $(3 + \sqrt{5})^2 - 6\sqrt{5}$; 2) $(\sqrt{12} - 2\sqrt{2})^2 + 8\sqrt{6}$!

498.° Gyöktelenítsétek a következő törtek nevezőjét:

1) $\frac{4}{\sqrt{2}}$; 3) $\frac{18}{\sqrt{5}}$; 5) $\frac{a}{b\sqrt{b}}$; 7) $\frac{7}{\sqrt{7}}$;
2) $\frac{12}{\sqrt{6}}$; 4) $\frac{m}{\sqrt{n}}$; 6) $\frac{5}{\sqrt{15}}$; 8) $\frac{24}{5\sqrt{3}}$!

499.° Gyöktelenítsétek a következő törtek nevezőjét:

1) $\frac{a}{\sqrt{11}}$; 2) $\frac{18}{\sqrt{6}}$; 3) $\frac{5}{\sqrt{10}}$; 4) $\frac{13}{\sqrt{26}}$; 5) $\frac{30}{\sqrt{15}}$; 6) $\frac{2}{3\sqrt{x}}$!

500.° Alakítsátok szorzattá az alábbi kifejezéseket:

1) $a^2 - 3$; 9) $b + 6\sqrt{b} + 9$;
2) $4b^2 - 2$; 10) $3 + 2\sqrt{3c} + c$;
3) $5 - 6c^2$; 11) $2 + \sqrt{2}$;
4) $a - 9$, ha $a \geq 0$; 12) $6\sqrt{7} - 7$;
5) $m - n$, ha $m \geq 0$, $n \geq 0$; 13) $a - \sqrt{a}$;
6) $16x - 25y$, ha $x \geq 0$, $y \geq 0$; 14) $\sqrt{b} + \sqrt{3b}$;
7) $a - 2\sqrt{a} + 1$; 15) $\sqrt{15} - \sqrt{5}$!
8) $4m - 28\sqrt{mn} + 49n$, ha $m \geq 0$, $n \geq 0$;

501.° Alakítsátok szorzattá az alábbi kifejezéseket:

1) $15 - x^2$; 6) $m + 2\sqrt{mn} + n$, ha $m \geq 0$, $n \geq 0$;
2) $49x^2 - 2$; 7) $a - 4\sqrt{a} + 4$;
3) $36p - 64q$, ha $p \geq 0$, $q \geq 0$; 8) $5 + \sqrt{5}$;
4) $c - 100$, ha $c \geq 0$; 9) $\sqrt{3p} - p$;
5) $a - 8b\sqrt{a} + 16b^2$; 10) $\sqrt{12} + \sqrt{32}$!

502.° Egyszerűsítsétek a következő törteket:

1) $\frac{a^2 - 7}{a + \sqrt{7}}$; 3) $\frac{c - 9}{\sqrt{c} - 3}$; 5) $\frac{5\sqrt{a} - 7\sqrt{b}}{25a - 49b}$;
2) $\frac{\sqrt{3} - b}{3 - b^2}$; 4) $\frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$; 6) $\frac{100a^2 - 9b}{10a + 3\sqrt{b}}$;

$$\begin{array}{lll}
 7) \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}; & 9) \frac{\sqrt{15}-\sqrt{6}}{5-\sqrt{10}}; & 11) \frac{a+2\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}; \\
 8) \frac{\sqrt{35}+\sqrt{10}}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}; & 10) \frac{13-\sqrt{13}}{\sqrt{13}}; & 12) \frac{4b^2-4b\sqrt{c}+c}{2b-\sqrt{c}}!
 \end{array}$$

503.* Egyszerűsítsék a következő törtet:

$$\begin{array}{lll}
 1) \frac{x-25}{\sqrt{x}-5}; & 4) \frac{\sqrt{10}+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}; & 7) \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-2\sqrt{ab}+b}; \\
 2) \frac{\sqrt{a}+2}{a-4}; & 5) \frac{23-\sqrt{23}}{\sqrt{23}}; & 8) \frac{b-8\sqrt{b}+16}{\sqrt{b}-4}! \\
 3) \frac{a-3}{\sqrt{a}+\sqrt{3}}; & 6) \frac{\sqrt{24}-\sqrt{28}}{\sqrt{54}-\sqrt{63}};
 \end{array}$$

504.* Emeljete ki tényezőt a gyökjel alól:

$$\begin{array}{ll}
 1) \sqrt{3a^2}, \text{ ha } a \geq 0; & 3) \sqrt{12a^4}; \\
 2) \sqrt{5b^2}, \text{ ha } b \leq 0; & 4) \sqrt{c^5}!
 \end{array}$$

505.* Emeljete ki tényezőt a gyökjel alól:

$$\begin{array}{ll}
 1) \sqrt{18x^{12}}; & 2) \sqrt{y^9}!
 \end{array}$$

506.* Egyszerűsítsék a következő kifejezéseket:

$$\begin{array}{l}
 1) \sqrt{98} - \sqrt{50} + \sqrt{32}; \\
 2) 3\sqrt{8} + \sqrt{128} - \frac{1}{3}\sqrt{162}; \\
 3) 0,7\sqrt{300} - 7\sqrt{\frac{3}{49}} + \frac{2}{3}\sqrt{108}; \\
 4) \sqrt{5a} - 2\sqrt{20a} + 3\sqrt{80a}; \\
 5) \sqrt{a^3b} - \frac{2}{a}\sqrt{a^3b}, \text{ ha } a > 0, b \geq 0; \\
 6) \sqrt{c^5} + 4c\sqrt{c^3} - 5c^2\sqrt{c}!
 \end{array}$$

507.* Egyszerűsítsék a következő kifejezéseket:

$$\begin{array}{l}
 1) 0,5\sqrt{12} - 3\sqrt{27} + 0,4\sqrt{75}; \\
 2) 2,5\sqrt{28b} + \frac{2}{3}\sqrt{63b} - 10\sqrt{0,07b}; \\
 3) \sqrt{81a^7} - 5a^3\sqrt{a} + \frac{6}{a}\sqrt{a^9}!
 \end{array}$$

508.* Bizonyítsátok be a következő egyenlőségeket:

$$1) \sqrt{1+4\sqrt{7}} = \sqrt{7} + 2; \quad 2) \sqrt{14+8\sqrt{3}} = \sqrt{8} + \sqrt{6}!$$

509.* Egyszerűsítsétek az alábbi kifejezéseket:

$$1) (2\sqrt{3}-1)(\sqrt{27}+2); \quad 4) (7+4\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^2;$$

$$2) (\sqrt{5}-2)^2 - (3+\sqrt{5})^2; \quad 5) (\sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{6-2\sqrt{5}})^2!$$

$$3) \sqrt{\sqrt{17}-4} \cdot \sqrt{\sqrt{17}+4};$$

510.* Határozzátok meg a következő kifejezések értékét:

$$1) (3\sqrt{2}+1)(\sqrt{8}-2); \quad 3) (10-4\sqrt{6})(2+\sqrt{6})^2;$$

$$2) (3-2\sqrt{7})^2 + (3+2\sqrt{7})^2; \quad 4) (\sqrt{9-4\sqrt{2}} + \sqrt{9+4\sqrt{2}})^2!$$

511.* Egyszerűsítsétek az alábbi törteket:

$$1) \frac{4a+4\sqrt{5}}{a^2-5};$$

$$4) \frac{x^2-6y}{x^2+6y-x\sqrt{24y}};$$

$$2) \frac{\sqrt{28}-2\sqrt{2a}}{6a-21};$$

$$5) \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}};$$

$$3) \frac{a+4\sqrt{ab}+4b}{a-4b}, \text{ ha } a > 0, b > 0;$$

$$6) \frac{m\sqrt{m}-27}{\sqrt{m}-3}!$$

512.* Egyszerűsítsétek az alábbi törteket:

$$1) \frac{a-b}{\sqrt{11b}-\sqrt{11a}};$$

$$3) \frac{a-2\sqrt{a}+4}{a\sqrt{a}+8}!$$

$$2) \frac{2a+10\sqrt{2ab}+25b}{6a-75b}, \text{ ha } a > 0 \text{ és } b > 0;$$

513.* Gyöktelenítsétek az alábbi törtek nevezőjét:

$$1) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1};$$

$$3) \frac{15}{\sqrt{15}-\sqrt{12}};$$

$$5) \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}};$$

$$2) \frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}};$$

$$4) \frac{19}{2\sqrt{5}-1};$$

$$6) \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}!$$

514.* Gyöktelenítsétek az alábbi törtek nevezőjét:

$$1) \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2};$$

$$2) \frac{8}{\sqrt{10}-\sqrt{2}};$$

$$3) \frac{9}{\sqrt{x}+\sqrt{y}};$$

$$4) \frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}!$$

515.* Igazoljátok a következő egyenlőségeket:

$$1) \frac{1}{5-2\sqrt{6}} + \frac{1}{5+2\sqrt{6}} = 10; \quad 3) \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = 4\sqrt{2}!$$

$$2) \frac{2}{3\sqrt{2}+4} - \frac{2}{3\sqrt{2}-4} = -8;$$

516.* Igazoljátok, hogy az alábbi kifejezések értéke racionális szám:

$$1) \frac{6}{3+2\sqrt{3}} + \frac{6}{3-2\sqrt{3}}; \quad 2) \frac{\sqrt{11}+\sqrt{6}}{\sqrt{11}-\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{11}-\sqrt{6}}{\sqrt{11}+\sqrt{6}}!$$

517.* Egyszerűsítsétek a következő kifejezéseket:

$$1) \frac{a}{\sqrt{a}-2} - \frac{4\sqrt{a}-4}{\sqrt{a}-2}; \quad 6) \frac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \cdot \frac{b}{2\sqrt{a}+2};$$

$$2) \frac{\sqrt{m}+1}{\sqrt{m}-2} - \frac{\sqrt{m}+3}{\sqrt{m}}; \quad 7) \frac{\sqrt{c}-5}{\sqrt{c}} : \frac{c-25}{3c};$$

$$3) \frac{\sqrt{y}+4}{\sqrt{xy}+y} - \frac{\sqrt{x}-4}{x+\sqrt{xy}}; \quad 8) \left(\sqrt{a} - \frac{a}{\sqrt{a}+1} \right) : \frac{\sqrt{a}}{a-1};$$

$$4) \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+4} - \frac{a}{a-16}; \quad 9) \left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \right) : \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}};$$

$$5) \frac{a}{\sqrt{ab}-b} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}; \quad 10) \left(\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3} + \frac{12\sqrt{x}}{x-9} \right) : \frac{\sqrt{x}+3}{x-3\sqrt{x}}!$$

518.* Egyszerűsítsétek a következő kifejezéseket:

$$1) \frac{\sqrt{a}-3}{\sqrt{a}+1} - \frac{\sqrt{a}-4}{\sqrt{a}}; \quad 4) \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}} : \left(\frac{\sqrt{m}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}} \right);$$

$$2) \frac{\sqrt{a}+1}{a-\sqrt{ab}} - \frac{\sqrt{b}+1}{\sqrt{ab}-b}; \quad 5) \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \frac{4\sqrt{x}}{x-1} \right) : \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1};$$

$$3) \frac{\sqrt{x}}{y-2\sqrt{y}} : \frac{\sqrt{x}}{3\sqrt{y}-6}; \quad 6) \frac{a-64}{\sqrt{a}+3} \cdot \frac{1}{a+8\sqrt{a}} - \frac{\sqrt{a}+8}{a-3\sqrt{a}}!$$

519.** Emeljétek ki tényezőt a gyökjel alól:

$$1) \sqrt{-m^9}; \quad 4) \sqrt{m^7n^7}, \text{ ha } m \leq 0, n \leq 0;$$

$$2) \sqrt{a^4b^{13}}, \text{ ha } a \neq 0; \quad 5) \sqrt{15x^3y^{14}}, \text{ ha } y < 0;$$

$$3) \sqrt{4x^6y}, \text{ ha } x < 0; \quad 6) \sqrt{64a^3b^9}, \text{ ha } a > 0;$$

15. Négyzetgyököt tartalmazó kifejezések azonos átalakításai

7) $\sqrt{242m^{11}b^{18}}$, ha $b < 0$;

8) $\sqrt{-m^2n^2p^{15}}$, ha $m > 0$, $n < 0$!

520.** Emeljetek ki tényezőt a gyökjel alól:

1) $\sqrt{-m^{19}}$;

2) $\sqrt{a^{23}b^{24}}$, ha $b \neq 0$;

3) $\sqrt{49a^2b}$, ha $a < 0$;

4) $\sqrt{a^9b^9}$;

5) $\sqrt{27x^{15}y^{34}}$, ha $y < 0$;

6) $\sqrt{-50m^6n^6p^7}$, ha $m > 0$, $n > 0$!

521.** Vigyetek be tényezőt a gyökjel alá:

1) $a\sqrt{3}$;

5) $xy^2\sqrt{xy}$, ha $x \leq 0$;

2) $b\sqrt{-b}$;

6) $2p\sqrt{\frac{p}{2}}$;

3) $c\sqrt{c^5}$;

7) $2p\sqrt{-\frac{p}{2}}$;

4) $m\sqrt{n}$, ha $m \geq 0$;

8) $ab^2\sqrt{\frac{a}{b}}$, ha $a \geq 0$!

522.** Vigyetek be tényezőt a gyökjel alá:

1) $m\sqrt{7}$, ha $m \geq 0$;

4) $x^4y\sqrt{x^5y}$, ha $y \leq 0$;

2) $3n\sqrt{6}$, ha $n \leq 0$;

5) $7a\sqrt{\frac{3}{a}}$;

3) $p\sqrt{p^3}$;

6) $5ab\sqrt{-\frac{a^7}{5b}}$, ha $a \leq 0$, $b > 0$.

523.** Bizonyítsátok be a következő azonosságokat:

1) $\left(\frac{8\sqrt{a}}{\sqrt{a}+7} - \frac{15\sqrt{a}}{a+14\sqrt{a}+49}\right) : \frac{8\sqrt{a}+41}{a-49} + \frac{7\sqrt{a}-49}{\sqrt{a}+7} = \sqrt{a}-7$;

2) $\frac{a\sqrt{a}+27}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \cdot \left(\frac{\sqrt{a}-3}{a-3\sqrt{a}+9} - \frac{\sqrt{ab}-9}{a\sqrt{a}+27}\right) = \sqrt{a}$!

524.** Egyszerűsítsék az alábbi kifejezéseket:

$$1) \left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a+\sqrt{ab}} - \frac{1}{a-b} \cdot \frac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \right) : \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a+\sqrt{ab}};$$

$$2) \left(\sqrt{a}+\sqrt{b} - \frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \right) : \left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \right) !$$

525.* Egyszerűsítsék a következő kifejezéseket:

$$1) \sqrt{3+2\sqrt{2}}; \quad 2) \sqrt{7+4\sqrt{3}}; \quad 3) \sqrt{11+2\sqrt{30}} !$$

526.* Egyszerűsítsék a következő kifejezéseket:

$$1) \sqrt{8+2\sqrt{7}}; \quad 2) \sqrt{15+6\sqrt{6}}; \quad 3) \sqrt{7+2\sqrt{10}} !$$

527.* Egyszerűsítsék az alábbi kifejezést:

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}} !$$

528.* Igazoljátok, hogy

$$\frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{91}+\sqrt{89}} = \frac{\sqrt{91}-1}{2} !$$

529.* Igazoljátok, hogy

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} = 2 !$$

530.* Egyszerűsítsék az alábbi kifejezéseket:

$$1) \sqrt{10+8\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}; \quad 2) \sqrt{22+6\sqrt{3+\sqrt{13+\sqrt{48}}}} !$$

ISMÉTLŐ FELADATOK

531. Egy munkásnak naponta 12 alkatrészt kellett elkészítenie. Mivel ő naponta 15 alkatrészt gyártott, így a határidő lejárt előtt már 5 nappal, csak 30 alkatrészt kellett elkészítenie. Hány alkatrészt kellett a munkásnak a terv szerint legyártania?
532. Egy kiárusításon egy termék árát 20%-kal csökkentették. Hány százalékkal kellene ennek a terméknek az árát növelni, hogy az eredeti áron lehessen értékesíteni?
533. Egy csónak a folyón lefelé haladva 32 km-t 4 óra alatt tett meg, a folyón felfelé pedig 8 óra alatt. Határozzátok meg a folyóvíz sebességét és a csónak sebességét állóvízben!

534. Ferenc és Olga egy vonaton utazott. Ferenc a szerelvény elejétől számítva a 12-edik vagonba szállt fel, Olga a végétől számítva a 4-edikbe. Hány vagonból állt a szerelvény?
535. Az adott kifejezések közül melyik értéke a legnagyobb, ha az a szám pozitív, a b szám pedig negatív:
 1) a^2b ; 2) $-a^2b^2$; 3) $-ab^2$; 4) ab ; 5) $-a^2b$?

▶ NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREK HASZNÁLATA

536. Egy úrhajó a Vendégváros bolygót azonos időszakonként látogatja meg (nem feltétlenül egész naponként). Lehetséges-e, hogy ebben az évben először hétfőn, másodszor kedden, negyedszer vasárnap járt a bolygón?

16. A négyzetgyökfüggvény és grafikonja

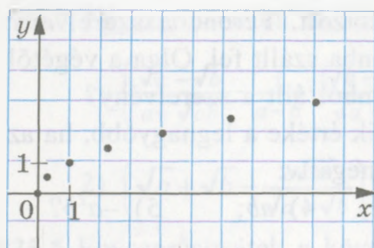
Ha x -szel jelöljük a négyzet területét, akkor az $y = \sqrt{x}$ képlettel meg tudjuk határozni a négyzet oldalhosszát. A terület, az x változása maga után vonja az oldalhossz, az y változását.

Érthető, hogy minden x értéknek csak egy y érték felel meg. Tehát az y és az x változó között egyértelmű a hozzárendelés, vagyis az $y = \sqrt{x}$ képlet egy függvényt ad meg.

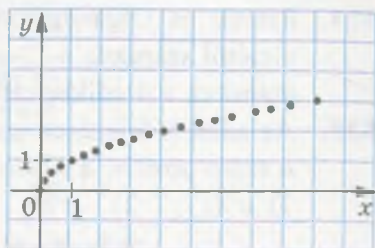
Mivel a $\sqrt{x}$ kifejezés, csak a nemnegatív értékekre értelmezhető, így a négyzetgyökfüggvény értelmezési tartománya is a nemnegatív számok halmaza.

A $\sqrt{x}$ kifejezés értéke sem lehet negatív szám, így egyetlen negatív szám sem tartozhat hozzá a függvény értékkészletéhez. Igazoljuk, hogy az $y = \sqrt{x}$ függvény bármely nemnegatív számot felvesz, például $y = 7,2$. Valóban létezik az argumentumnak olyan értéke, melynél $\sqrt{x} = 7,2$. Ez a szám az $x = 7,2^2$. A bemutatott példa igazolja, hogy bármely nemnegatív b számra, létezik olyan x érték, hogy $\sqrt{x} = b$. Ez a szám a b^2 .

2. §. NÉGYZETGYÖK. VALÓS SZÁMOK



27. ábra



28. ábra

Tehát az $y = \sqrt{x}$ függvény értékkészlete a nemnegatív számok halmaza.

Figyelembe véve az $y = \sqrt{x}$ függvény értelmezési tartományát és értékkészletét megállapíthatjuk, hogy a függvény grafikonja az I. koordináta-negyedben helyezkedik el.

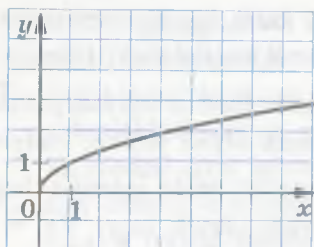
Készítsünk függvényérték táblázatot. Az alábbi táblázatban feltüntettünk néhány argumentumértéket és a hozzá rendelt függvényértéket.

x	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9
y	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3

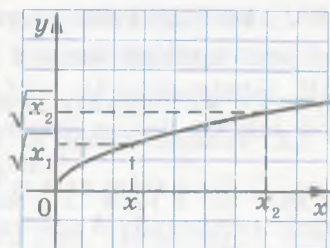
Tüntessük fel koordináta-rendszerben azokat a pontokat, melyek koordinátái a táblázatban szereplő értékpárok (27. ábra)!

Minél több olyan pont tüntetünk fel, melynek a koordinátái kielégítik az $y = \sqrt{x}$ egyenletet, annál kevésbé fog eltérni a mi rajzunk az $y = \sqrt{x}$ függvény képétől (28. ábra).

Ha minden ilyen pontot fel tudnánk tüntetni, akkor a 29. ábrán látható rajzot kapnánk. Későbbi tanulmányaitok során megbizonyosodtok majd arról, hogy az $y = \sqrt{x}$ függvény grafikonja az $y = x^2$ függvény grafikonjának az egyik ága.



29. ábra



30. ábra

16. A négyzetgyökfüggvény és grafikonja

Vizsgáljuk az $y = \sqrt{x}$ függvényt két tetszőleges x_1 és x_2 argumentumra, melyekre igaz hogy $x_1 < x_2$. A számtani négyzetgyök tulajdonsága alapján megállapíthatjuk, hogy $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$. Ez azt jelenti, hogy a nagyobb argumentum értéknek nagyobb függvényérték felel meg, és fordítva, nagyobb függvényértékhez nagyobb argumentum érték tartozik, vagyis ha $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$, akkor $x_1 < x_2$ (30. ábra).

Az alábbi táblázatban összefoglaltuk az $y = \sqrt{x}$ függvényről az ebben a pontban tanultakat:

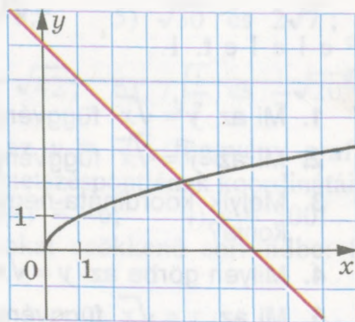
Értelmezési tartomány	Minden nemnegatív szám
Értékkészlet	Minden nemnegatív szám
Grafikon	A parabola egyik ága
Zérushely (az argumentum azon értéke melynél a függvényérték nulla)	$x = 0$

1. PÉLDA

Oldjuk meg grafikusán az $\sqrt{x} = 6 - x$ egyenletet!

Megoldás

Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az $y = \sqrt{x}$ és az $y = 6 - x$ függvények grafikonját (31. ábra)! A grafikonok metszik egymást, a metszéspont abszcisszája 4. Az ellenőrzés igazolja, hogy a 4 valóban gyöke az egyenletnek.



31. ábra

2. PÉLDA

Hasonlítsátok össze a következő számokat: 1) 6 és $\sqrt{31}$; 2) $3\sqrt{7}$ és $\sqrt{65}$!

Megoldás

1) Mivel $6 = \sqrt{36}$ és $36 > 31$, ezért $\sqrt{36} > \sqrt{31}$, így $6 > \sqrt{31}$.

- 2) Tudjuk, hogy $3\sqrt{7} = \sqrt{63}$ és $63 < 65$, így $\sqrt{63} < \sqrt{65}$. Tehát $3\sqrt{7} < \sqrt{65}$.

3. PÉLDA

Mely x értékekre teljesül a $\sqrt{x} < 3$ egyenlőtlenség?

Megoldás

Az adott egyenlőtlenséget írjuk fel $\sqrt{x} < \sqrt{9}$ alakban. Mivel az $y = \sqrt{x}$ függvény nagyobb értékeihez nagyobb argumentum felel meg, így $x < 9$. Figyelembe véve, hogy a $\sqrt{x}$ kifejezés csak pozitív számokra van értelmezve, így $0 \leq x < 9$.

4. PÉLDA

Egyszerűsítsük a $\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}$ kifejezést!

Megoldás

Vegyük figyelembe, hogy $\sqrt{5} > 2$ és $\sqrt{5} < 3$, így $\sqrt{5}-2 > 0$ és $\sqrt{5}-3 < 0$. Tehát

$$\begin{aligned}\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{5}-3)^2} &= |\sqrt{5}-2| + |\sqrt{5}-3| = \\ &= \sqrt{5}-2+3-\sqrt{5}=1.\end{aligned}$$

F e l e l e t . 1 .



1. Mi az $y = \sqrt{x}$ függvény értelmezési tartománya?
2. Mi az $y = \sqrt{x}$ függvény értékkészlete?
3. Melyik koordináta-negyedben van az $y = \sqrt{x}$ függvény grafikonja?
4. Milyen görbe az $y = \sqrt{x}$ függvény grafikonja?
5. Mi az $y = \sqrt{x}$ függvény zérushelye?
6. Az a és b nemnegatív számokról tudjuk, hogy $a > b$. Hasonlítsátok össze a $\sqrt{a}$ és $\sqrt{b}$ kifejezések értékét!
7. Tudjuk, hogy $\sqrt{a} < \sqrt{b}$. Mit mondhatunk el az a és a b számokról?

537.^o Töltsétek ki a táblázatot, ha $y = \sqrt{x}$!

x	0,01	3				1600
y			9	11	1,5	

- 538.°** Egy függvény az $y = \sqrt{x}$ képlettel van megadva.
 1) Mennyi a függvény 0,16; 64; 1,44; 3600 argumentumához tartozó helyettesítési értéke?
 2) Az argumentum mely értékénél veszi fel a függvény a 0,2; 5; 120; -4 értéket?
- 539.°** Rajz nélkül állapítsátok meg az alábbi pontok közül melyek illeszkednek az $y = \sqrt{x}$ függvény grafikonjához: $A(36; 6)$; $B(4; -2)$; $C(0,81; 0,9)$; $D(-1; 1)$; $E(42,25; 6,5)$!
- 540.°** Az alábbi pontok közül melyek tartoznak az $y = \sqrt{x}$ függvény grafikonjához:
 1) $A(16; 4)$; 3) $C(3,6; 0,6)$;
 2) $B(49; -7)$; 4) $D(-36; 6)$?
- 541.°** Hasonlítsátok össze az alábbi számokat:
 1) $\sqrt{86}$ és $\sqrt{78}$; 4) $\sqrt{\frac{6}{7}}$ és 1; 7) $\sqrt{41}$ és $2\sqrt{10}$;
 2) $\sqrt{1,4}$ és $\sqrt{1,6}$; 5) -7 és $-\sqrt{48}$; 8) $0,6\sqrt{3\frac{1}{3}}$ és $\sqrt{1,1}$;
 3) 5 és $\sqrt{26}$; 6) $3\sqrt{2}$ és $2\sqrt{3}$; 9) $\sqrt{75}$ és $4\sqrt{3}$!
- 542.°** Melyik szám nagyobb:
 1) $\sqrt{\frac{1}{3}}$ és $\sqrt{\frac{1}{5}}$; 3) $\sqrt{33}$ és 6; 5) $\sqrt{30}$ és $2\sqrt{7}$;
 2) $\sqrt{32}$ és $\sqrt{6}$; 4) $3\sqrt{5}$ és $\sqrt{42}$; 6) $7\sqrt{\frac{1}{7}}$ és $\frac{1}{2}\sqrt{20}$?
- 543.°** Rajz nélkül határozzátok meg az $y = \sqrt{x}$ függvény grafikonjának és az alábbi egyenesek metszéspontjának koordinátáit:
 1) $y = 1$; 2) $y = 0,8$; 3) $y = -6$; 4) $y = 500$!
- 544.°** Rendezzétok a következő számokat csökkenő sorrendbe: 8; $\sqrt{62}$; 7,9; $\sqrt{65}$; 8,2!
- 545.°** Rendezzétok a következő számokat növekvő sorrendbe: $\sqrt{38}$; 6,1; 6; $\sqrt{35}$; 5,9!
- 546.°** Mely két egymást követő természetes szám között helyezkedik el az alábbi szám a számegyenesen:
 1) $\sqrt{2}$; 4) $\sqrt{7}$; 7) $\sqrt{59}$;
 2) $\sqrt{3}$; 5) $\sqrt{13}$; 8) $-\sqrt{115}$;
 3) $\sqrt{5}$; 6) $\sqrt{0,98}$; 9) $-\sqrt{76,19}$?

547.* Mely két szomszédos természetes szám között helyezkedik el az alábbi szám a számegyenesen:

- 1) $\sqrt{6}$; 3) $\sqrt{29}$; 5) $-\sqrt{86}$;
2) $\sqrt{19}$; 4) $\sqrt{160}$; 6) $-\sqrt{30,5}$?

548.* Nevezzétek meg azokat az egész számokat, melyek a számegyenesen az alábbi számok között helyezkednek el:

- 1) 3 és $\sqrt{68}$; 3) $-\sqrt{31}$ és $-2,3$;
2) $\sqrt{7}$ és $\sqrt{77}$; 4) $-\sqrt{42}$ és $2,8$!

549.* Nevezzétek meg azokat az egész számokat, melyek a számegyenesen az alábbi számok között vannak:

- 1) $\sqrt{3}$ és $\sqrt{13}$; 2) $\sqrt{10}$ és $\sqrt{90}$; 3) $-\sqrt{145}$ és $-\sqrt{47}$!

550.* Mely x értékekre igazak az alábbi egyenlőtlenségek:

- 1) $\sqrt{x} \geq 2$; 2) $\sqrt{x} < 4$; 3) $6 \leq \sqrt{x} < 9$?

551.* Mely x értékekre igazak az alábbi egyenlőtlenségek:

- 1) $\sqrt{x} \leq 8$; 2) $\sqrt{x} > 7$; 3) $10 \leq \sqrt{x} \leq 20$?

552.* Oldjátok meg grafikusán az alábbi egyenleteket:

- 1) $\sqrt{x} = x$; 3) $\sqrt{x} = x + 2$; 5) $\sqrt{x} = \frac{8}{x}$;
2) $\sqrt{x} = x^2$; 4) $\sqrt{x} = 0,5x + 0,5$; 6) $\sqrt{x} = 1,5 - 0,5x$!

553.* Oldjátok meg grafikusán az alábbi egyenleteket:

- 1) $\sqrt{x} = -x - 1$; 2) $\sqrt{x} = 2 - x$; 3) $\sqrt{x} = \frac{1}{x}$!

554.* Egyszerűsítsétek az alábbi kifejezéseket:

- 1) $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$; 3) $\sqrt{(2\sqrt{5}-3)^2}$;
2) $\sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{7})^2}$; 4) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} + \sqrt{(3-\sqrt{3})^2}$!

555.* Egyszerűsítsétek az alábbi kifejezéseket:

- 1) $\sqrt{(\sqrt{5}-4)^2}$; 2) $\sqrt{(\sqrt{8}-3)^2} - \sqrt{(\sqrt{2}-3)^2}$!

556.** Oldjátok meg a $\sqrt{x} = -x^2$ egyenletet!

557.** Adott az $f(x) = \begin{cases} \frac{4}{x}, & \text{ha } x < 0, \\ \sqrt{x}, & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$ függvény!

- 1) Határozzátok meg $f(-8)$, $f(0)$, $f(9)$ helyettesítési értékeket!
- 2) Ábrázoljátok a függvény grafikonját!

558.** Adott az $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \leq 0, \\ \sqrt{x}, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$ függvény!

- 1) Határozzátok meg $f(-2)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(4)$ helyettesítési értékeket!
- 2) Ábrázoljátok a függvény grafikonját!

559.** Határozzátok meg az $y = \sqrt{-x}$ függvény értelmezési tartományát, értékkészletét és zérushelyeit! Ábrázoljátok a függvény grafikonját!

560.** Ábrázoljátok az $y = \frac{x}{\sqrt{x}}$ függvényt!

561.* Egyszerűsítsétek a következő kifejezéseket:

- 1) $\sqrt{8-2\sqrt{7}}$;
- 2) $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$;
- 3) $\sqrt{12-6\sqrt{3}}$;
- 4) $\sqrt{38-12\sqrt{2}}$!

562.* Egyszerűsítsétek a következő kifejezéseket:

- 1) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$;
- 2) $\sqrt{7-2\sqrt{10}}$;
- 3) $\sqrt{37-20\sqrt{3}}$!

563.* Az a paraméter értékeitől függően hány gyöke van a $\sqrt{x} = a - x$ egyenletnek?

564.* Egyszerűsítsétek a $\sqrt{(\sqrt{a}+1)^2 - 4\sqrt{a}} + \sqrt{(\sqrt{a}-2)^2 + 8\sqrt{a}}$ kifejezést!

565.* Egyszerűsítsétek a $\sqrt{(\sqrt{a}-6)^2 + 24\sqrt{a}} - \sqrt{(\sqrt{a}+6)^2 - 24\sqrt{a}}$ kifejezést!

ISMÉTLŐ FELADATOK

- 566.** Az egyik konténerben 90 kg alma volt, egy másikban pedig 75 kg. Miután az első konténerből háromszor annyi almát vettek ki, mint a másodikból, az első konténerben kétszer kevesebb alma maradt, mint a másodikban. Hány kilogramm almát vettek ki az első konténerből?
- 567.** A folyami kikötőből a vízfolyással szemben egy motorcsónak indult el, melynek a sebessége állóvízben 12 km/h. 40 perccel az indulás után meghibásodott a csónak motorja, és így a csónakot a vízfolyás 2 óra alatt visszasodorta a kikötőbe. Mekkora a folyó sebessége?

568. Igazoljátok az alábbi azonosságokat:

$$1) \left(\frac{a-2b}{a^2+2ab} - \frac{1}{a^2-4b^2} \cdot \frac{a+2b}{(2b-a)^2} \right) \cdot \frac{a^2-2ab}{a^2+4ab+4b^2} = \frac{2b}{a^2};$$

$$2) \left(\frac{2a}{a+3} - \frac{4a}{a^2+6a+9} \right) \cdot \frac{a^2-9}{a+1} - \frac{a^2-9a}{a+3} = a!$$

569. Két helység között az utat egy személygépkocsi 2 óra alatt teszi meg, egy tehergépkocsi 3 óra alatt. Hány óra múlva találkozik a személygépkocsi és a teherautó, ha a két helységből egyszerre indulnak egymással szemben?

FELKÉSZÜLES AZ ÚJ TEMÁHOZ

570. Oldjátok meg az alábbi egyenleteket:

$$\begin{array}{lll} 1) x^2 = 0; & 4) -3x^2 + 12 = 0; & 7) \frac{1}{6}x^2 - 5x = 0; \\ 2) x^2 - 1 = 0; & 5) 5x^2 - 6x = 0; & 8) x^2 - 2x + 1 = 0; \\ 3) x^2 + 5x = 0; & 6) 0,2x^2 + 2 = 0; & 9) 9x^2 + 30x + 25 = 0! \end{array}$$

NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREK HASZNÁLATA

571. Az 1-től 37-ig lévő természetes számokat úgy rendezték el, hogy bármely szám osztója az előtte álló számok összegének. Melyik szám áll ebben a sorban a harmadik helyen, ha az első helyen a 37 van, a második pedig az 1?

ELLENŐRIZZÉTEK MAGATOKAT! 4. sz. TESZTFELADAT

1. Az alábbi állítások közül melyik hamis?

- A) -5 – egész szám;
- B) -5 – racionális szám;
- C) -5 – irracionális szám;
- D) -5 – valós szám.

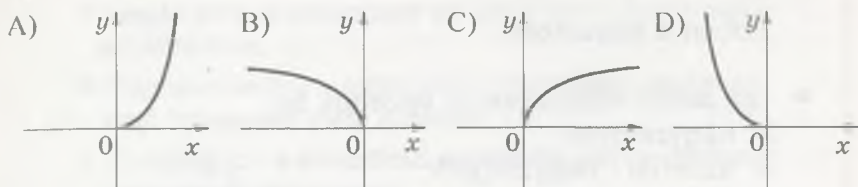
2. Az alábbi számok közül melyik irracionális?

- A) $\sqrt{4}$;
- B) $\sqrt{0,4}$;
- C) $\sqrt{0,04}$;
- D) $\sqrt{400}$!

3. Az alábbi függvények közül melyik grafikonja parabola?

- A) $y = 2x$;
- B) $y = x^2$;
- C) $y = \frac{2}{x}$;
- D) $y = \frac{x}{2}$.

4. Az alábbi rajzok közül melyiken látható az $y = \sqrt{x}$ függvény grafikonja?



5. Az alábbi kifejezések közül melyik nem értelmezhető?

- A) $\sqrt{2}$; B) $-\sqrt{2}$; C) $\sqrt{-2}$; D) $\sqrt{(-2)^2}$.

6. Számítsátok ki a $\sqrt{7x-3}$ kifejezés értékét, ha $x = 4$!

- A) 5; B) -5; C) 25; D) -25.

7. Mennyi a $\sqrt{36 \cdot 0,81}$ kifejezés értéke?

- A) 6,9; B) 54; C) 5,4; D) 0,54.

8. Határozzátok meg az $\left(\frac{1}{5}\sqrt{10}\right)^2$ kifejezés értékét!

- A) 2; B) 4; C) 2,5; D) 0,4!

9. Egyszerűsítsétek a $\sqrt{9a} - \sqrt{16a} + \sqrt{64a}$ kifejezést!

- A) $15\sqrt{a}$; B) $15a$; C) $7\sqrt{a}$; D) $7a$.

10. Gyöktelenítsétek a $\frac{12}{\sqrt{2}}$ tört nevezőjét!

- A) $\sqrt{2}$; B) $4\sqrt{2}$; C) $6\sqrt{2}$; D) $10\sqrt{2}$.

11. Egyszerűsítsétek az $\frac{a-2}{a-2\sqrt{2a}+2}$ törtet!

- A) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{2}}{\sqrt{a}-\sqrt{2}}$; B) $\frac{a+2}{a-2}$; C) 1; D) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{\sqrt{a}+\sqrt{2}}$.

12. Egyszerűsítsétek a $(2 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5}) + (\sqrt{5} + 1)^2 - \sqrt{20}$ kifejezést!

- A) 15; B) 5; C) $10 - \sqrt{5}$; D) $10 + 5\sqrt{5}$.

ÖSSZEFOGLALÁS

Ebben a fejezetben

- az alábbi kifejezéseket vezettük be:
 - négyzetgyök;
 - számtani négyzetgyök;
 - halmaz;
 - részhalmaz;
 - irracionális szám;
 - valós szám;
- elsajátítottátok
 - a gyökvonás műveletét nemnegatív számokból;
 - gyökös kifejezések egyszerűsítését;
 - az $y = x^2$ és $y = \sqrt{x}$ függvény ábrázolását;
- megtanultátok
 - a számtani négyzetgyök tulajdonságait;
 - az $y = x^2$ és az $y = \sqrt{x}$ függvény néhány tulajdonságát.

3. §. A MÁSODFOKÚ EGYENLET

- Megtanuljátok megoldani az $ax^2 + bx + c = 0$ alakú egyenleteket.
- Megismerkedtek a másodfokú egyenletekre alkalmazható nevezetes Viete tételével.
- Elsajátítjátok a másodfokú egyenletre visszavezethető egyenletek megoldását.

17. Másodfokú egyenletek. A nem teljes másodfokú egyenletek megoldása

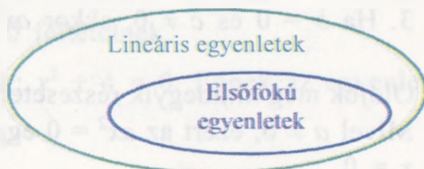
Már megtanultátok, hogyan kell megoldani a $ax + b = 0$ alakú lineáris egyenleteket, ahol a és b bármely szám, x a változó.

Ha $a \neq 0$, akkor az $ax = b$ alakú egyenleteket **elsőfokú egyenleteknek** nevezzük.

Például a $2x = 3$, $3x = 0$ és az $\frac{1}{3}x = -7$ lineáris egyenletek elsőfokúak, viszont a $0x = 0$ és $0x = 2$ lineáris egyenletek nem elsőfokúak.

Az a és a b számokat az **elsőfokú lineáris $ax = b$ egyenlet együtthatóinak** nevezzük.

Azt a tényt, hogy az elsőfokú egyenletek a lineáris egyenleteknek részesetei a 32. ábra szemlélteti.



32. ábra

Már találkoztatok néhány olyan egyenlet megoldásával, melyben a változó második hatványa szerepel. Például felkészülés közben már megoldottátok az $x^2 = 0$, $x^2 - 1 = 0$, $x^2 + 5x = 0$, $x^2 - 2x + 1 = 0$ egyenleteket (570. példa). Ezek az egyenletek $ax^2 + bx + c = 0$ alakúak.

M e g h a t á r o z á s. Az $ax^2 + bx + c = 0$ alakú egyenleteket **m á s o d f o k ú e g y e n l e t e k n e k** nevezzük, ahol x a változó, a , b és c bármely szám és $a \neq 0$.

3. §. A MÁSODFOKÚ EGYENLET

Az a , b és c számokat **a másodfokú egyenlet együtthatóinak** nevezzük. Az a szám a négyzetes tag együtthatója, **főegyüttható**, b az **elsőfokú tag** együtthatója, c a **szabad tag**.

Például a $-2x^2 + 5x + 3 = 0$ másodfokú egyenletben $a = -2$, $b = 5$ és $c = 3$.

Az olyan másodfokú egyenleteket, amelyek főegyütthatója 1, **redukált** másodfokú egyenleteknek nevezzük.

Például az $x^2 + \sqrt{2}x - 1 = 0$, $x^2 - 4 = 0$, $x^2 + 3x = 0$ egyenletek redukált másodfokú egyenletek, mivel főegyütthatójuk 1.

Mivel az $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenlet főegyütthatója nem lehet nulla, ezért bármelyik másodfokú egyenlet felírható olyan alakban, ahol a főegyüttható 1. Osszuk el az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet mindkét oldalát a -val: $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.

Ha az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet b vagy c együtthatója nulla, akkor az egyenletet **hiányos (nem teljes) másodfokú egyenletnek** nevezzük.

A hiányos másodfokú egyenletek három részesetét különböztetjük meg:

1. Ha $b = c = 0$, akkor $ax^2 = 0$.
2. Ha $c = 0$ és $b \neq 0$, akkor $ax^2 + bx = 0$.
3. Ha $b = 0$ és $c \neq 0$, akkor $ax^2 + c = 0$.

Oldjuk meg mindegyik részesetet külön-külön.

1. Mivel $a \neq 0$, ezért az $ax^2 = 0$ egyenletnek egyetlen gyöke van az $x = 0$.
2. Az $ax^2 + bx = 0$ egyenletet írjuk fel $x(ax + b) = 0$ alakban. Ennek az egyenletnek mindig két, x_1 és x_2 gyöke van. Az egyik gyök a nulla, a másik az $ax + b = 0$ egyenlet gyöke. Tehát $x_1 = 0$ és $x_2 = -\frac{b}{a}$.
3. Az $ax^2 + c = 0$ egyenletet írjuk fel $x^2 = -\frac{c}{a}$ alakban. Mivel $c \neq 0$, így két eset lehetséges: $-\frac{c}{a} < 0$ vagy $-\frac{c}{a} > 0$. Könnyen belátható, hogy az első esetben az egyenletnek nincs megoldása.

A második esetben az egyenletnek két gyöke van: $x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$ és

$$x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

A kapott eredményeket az alábbi táblázat foglalja össze.

A b és c együtthatók értékei	Egyenlet	Gyökök
$b = c = 0$	$ax^2 = 0$	$x = 0$
$b \neq 0, c = 0$	$ax^2 + bx = 0$	$x_1 = 0, x_2 = -\frac{b}{a}$
$b = 0, -\frac{c}{a} < 0$	$ax^2 + c = 0$	nincs megoldás
$b = 0, -\frac{c}{a} > 0$	$ax^2 + c = 0$	$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}, x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$

PÉLDA

Oldjuk meg az $x^2 - \frac{4x}{|x|} = 0$ egyenletet!

Megoldás

Ha $x > 0$, akkor $x^2 - \frac{4x}{x} = 0$; $x^2 - 4 = 0$; $x = 2$ vagy $x = -2$. Viszont $x = -2$ nem felel meg az $x > 0$ feltételnek.

Ha $x < 0$, akkor $x^2 + \frac{4x}{x} = 0$; $x^2 + 4 = 0$. Ennek az egyenletnek nincs megoldása.

F e l e l e t: 2.



1. Milyen egyenletet nevezünk lineárisnak?
2. Milyen egyenletet nevezünk elsőfokúnak?
3. Hozzatok fel példát olyan lineáris egyenletre, amely elsőfokú és olyan lineáris egyenletre, amely nem elsőfokú!
4. Milyen egyenletet nevezünk másodfokúnak?
5. Hogyan hívjuk az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet együtthatóit?
6. Melyek a redukált másodfokú egyenletek?

7. Melyek a hiányos másodfokú egyenletek?
8. A hiányos másodfokú egyenletek mely részeseteit különböztetjük meg? Hány gyöke van ezekben az esetekben az egyenletnek?

572.° Az alábbi egyenletek közül válasszatok ki a másodfokúakat! Nevezzétek meg a másodfokú egyenletek együtthatóit, főegyütthatóját, szabad tagját!

- | | |
|-------------------------|---------------------------|
| 1) $x = 0$; | 6) $3x^2 + x^2 + 6 = 0$; |
| 2) $x^2 = 0$; | 7) $-2x^2 + 7x - 8 = 0$; |
| 3) $x^2 + x = 0$; | 8) $x^3 - x - 9 = 0$; |
| 4) $x^2 + 1 = 0$; | 9) $6 - x^2 + 4x = 0$; |
| 5) $x^2 - 4x + 2 = 0$; | 10) $-x^2 - 2x + 3 = 0$. |

573.° Írjátok fel azt a másodfokú egyenletet, melynek:

- 1) a főegyütthatója 6, az elsőfokú tag együtthatója 7 és a szabad tag pedig 2;
- 2) a főegyütthatója 1, az elsőfokú tag együtthatója -8 és a szabad tag pedig $-\frac{1}{3}$;
- 3) a főegyütthatója $-0,5$, az első fokú tag együtthatója 0 és a szabad tag pedig $2\frac{3}{7}$;
- 4) a főegyütthatója 7,2, az első fokú tag együtthatója -2 és a szabad tag pedig 0!

574.° Írjátok fel azt a másodfokú egyenletet, melynek:

- 1) a főegyütthatója -1 , az első fokú tag együtthatója -2 és a szabad tag pedig 1,6;
- 2) a főegyütthatója és a szabad tag 2, az elsőfokú tag együtthatója 0!

575.° Írjátok fel az alábbi egyenleteket $ax^2 + bx + c = 0$ alakban, nevezzétek meg az a , b és c együtthatókat:

- 1) $6x(3 - x) = 7 - 2x^2$;
- 2) $x(x + 1) = (x - 3)(7x + 2)$;
- 3) $(5x - 1)^2 = (x + 4)(x - 2)$;
- 4) $4x(x + 8) - (x - 6)(x + 6) = 0$!

576.° Írjátok fel az alábbi egyenleteket $ax^2 + bx + c = 0$ alakban, nevezzétek meg az a , b és c együtthatókat:

- 1) $x(x + 10) = 8x + 3$;
- 2) $(x + 2)^2 = 2x^2 + 4$!

577.° Az alábbi egyenletek közül nevezzétek meg azokat, melyek főegyütthatója 1 (redukált másodfokú egyenlet). Alakítsátok át a többi egyenletet redukált másodfokú egyenletté:

- | | |
|-----------------------------------|-------------------------------|
| 1) $x^2 - 5x + 34 = 0$; | 4) $16 - 6x + x^2 = 0$; |
| 2) $2x^2 + 6x + 8 = 0$; | 5) $-x^2 + 8x - 7 = 0$; |
| 3) $\frac{1}{3}x^2 + x - 5 = 0$; | 6) $-0,2x^2 + 0,8x + 1 = 0$! |

578.° Alakítsátok át az egyenleteket redukált másodfokú egyenletté:

- | | |
|------------------------------------|-------------------------|
| 1) $\frac{1}{6}x^2 - 2x - 3 = 0$; | 3) $3x^2 + x + 2 = 0$! |
| 2) $-4x^2 + 20x - 16 = 0$; | |

579.° Az 1; 0; -3; 2; -10 számok közül melyek gyökei az $x^2 + 9x - 10 = 0$ egyenletnek?

580.° Igazoljátok, hogy:

- 1) -1 gyöke az $x^2 - 2x + 3 = 0$ egyenletnek;
- 2) a $-\frac{1}{3}$ és a -3 gyöke a $3x^2 + 10x + 3 = 0$ egyenletnek;
- 3) a $-\sqrt{2}$ és $\sqrt{2}$ gyöke a $3x^2 - 6 = 0$ egyenletnek!

581.° Igazoljátok, hogy:

- 1) -5 gyöke az $x^2 + 3x - 10 = 0$ egyenletnek;
- 2) a 4 gyöke az $\frac{1}{4}x^2 - 4x = 0$ egyenletnek!

582.° Oldjátok meg az alábbi egyenleteket:

- | | |
|----------------------|-----------------------|
| 1) $5x^2 - 45 = 0$; | 4) $2x^2 - 10x = 0$; |
| 2) $x^2 + 8x = 0$; | 5) $64x^2 - 9 = 0$; |
| 3) $2x^2 - 10 = 0$; | 6) $x^2 + 16 = 0$! |

583.° Oldjátok meg a következő egyenleteket:

- | | |
|-----------------------|---------------------|
| 1) $x^2 + 7x = 0$; | 3) $3x^2 - 6 = 0$; |
| 2) $2x^2 - 11x = 0$; | 4) $-8x^2 = 0$! |

584.° Oldjátok meg a következő egyenleteket:

- 1) $(3x - 1)(x + 4) = -4$;
- 2) $(2x - 1)^2 - 6(6 - x) = 2x$;
- 3) $(x + 2)(x - 3) - (x - 5)(x + 5) = x^2 - x$!

585.° Oldjátok meg az alábbi egyenleteket:

- 1) $(3x - 2)(3x + 2) + (4x - 5)^2 = 10x + 21$;
- 2) $(2x - 1)(x + 8) - (x - 1)(x + 1) = 15x$!

586.° Határozzátok meg azt a két szomszédos természetes számot, melyek szorzata 36-tal nagyobb a kisebbik számnál!

3. §. A MÁSODFOKÚ EGYENLET

587.° Határozzátok meg azt a két szomszédos természetes számot, melyek szorzata 80-nal nagyobb a nagyobbik számnál!

588.° Igazoljátok, hogy a $2 - \sqrt{3}$ és $2 + \sqrt{3}$ számok gyökei az $x^2 - 4x + 1 = 0$ egyenletnek!

589.° Oldjátok meg a következő egyenletket:

1) $\frac{x^2 - 8x}{6} = x$;

2) $\frac{x^2 - 3}{5} - \frac{x^2 - 1}{2} = 2$!

590.° Oldjátok meg a következő egyenleteket:

1) $\frac{x^2 + x}{7} - \frac{x}{3} = 0$;

2) $\frac{x^2 + 1}{6} - \frac{x^2 + 2}{4} = -1$!

591.° Mekkora az m , ha:

1) 2 gyöke az $x^2 + mx - 6 = 0$ egyenletnek;

2) -3 gyöke a $2x^2 - 7x + m = 0$ egyenletnek;

3) $\frac{1}{7}$ gyöke az $m^2x^2 + 14x - 3 = 0$ egyenletnek?

592.° Mekkora az n , ha:

1) 6 gyöke az $x^2 - nx + 3 = 0$ egyenletnek;

2) 0,5 gyöke az $nx^2 - 8x + 10 = 0$ egyenletnek?

593.° Csoportosítási módszerrel alakítsátok szorzattá a bal oldalt, és oldjátok meg a következő egyenleteket:

1) $x^2 - 6x + 8 = 0$;

3) $x^2 + 22x - 23 = 0$!

2) $x^2 + 12x + 20 = 0$;

594.° Alakítsátok teljes négyzetté és oldjátok meg a következő egyenleteket:

1) $x^2 - 4x + 3 = 0$;

3) $x^2 + 8x + 20 = 0$!

2) $x^2 + 6x - 7 = 0$;

595.° Alakítsátok szorzattá a bal oldalt, és oldjátok meg a következő egyenleteket:

1) $x^2 - 10x + 9 = 0$;

3) $x^2 - x - 2 = 0$;

2) $x^2 + 2x - 3 = 0$;

4) $x^2 + 6x + 5 = 0$!

596.° Két természetes szám négyzeteinek az összege 17-tel több a nagyobbik szám kétszeresénél. Melyek ezek a számok?

597.° Határozzátok meg azt a két egymást követő egész számot, melyek négyzeteinek az összege 1!

598.° Az m mely értékeinél nem másodfokúak az alábbi egyenletek:

1) $(m - 4)x^2 + mx + 7 = 0$;

2) $(m^2 + 8m)x^2 + (m + 8)x + 10 = 0$;

3) $(m^2 - 81)x^2 - 6x + m = 0$?

599. • Az $ax^2 + bx = 0$ másodfokú egyenlet nullától különböző gyökei milyen előjelűek, ha:

- 1) $a > 0, b > 0$; 3) $a > 0, b < 0$;
2) $a < 0, b > 0$; 4) $a < 0, b < 0$?

600. • Létezik-e az $ax^2 + c = 0$ hiányos másodfokú egyenletnek megoldása, ha:

- 1) $a > 0, c > 0$; 3) $a > 0, c < 0$;
2) $a < 0, c > 0$; 4) $a < 0, c < 0$?

601. •• A $3x^2 - 2x + 4 + * = 0$ egyenletben a csillagokat helyettesítsétek olyan többtaggal, hogy a kapott hiányos másodfokú egyenletnek gyökei legyenek az alábbi számok:

- 1) 0 és 4; 2) -1 és 1!

602. •• Az $x^2 + 5x - 1 + * = 0$ egyenletben a csillagokat helyettesítsétek olyan többtaggal, hogy a kapott hiányos másodfokú egyenletnek gyökei legyenek az alábbi számok:

- 1) 0; -7; 2) -4; 4!

603. •• Oldjátok meg az alábbi egyenleteket:

- 1) $x^2 - 3|x| = 0$; 3) $x^2 - \frac{|x|}{x} = 0$;
2) $x^2 + |x| - 2x = 0$; 4) $x^2 - \frac{2x^2}{|x|} = 0$!

604. • Oldjátok meg az alábbi egyenleteket:

- 1) $x^2 - 7|x| = 0$; 3) $2x^2 - \frac{3x^2}{|x|} = 0$.
2) $x^2 - 6|x| + x = 0$;

605. •• Az a mely értékei mellett lesz az $(a - 2)x^2 + (2a - 1)x + a^2 - 4 = 0$ egyenlet:

- 1) lineáris;
2) olyan másodfokú egyenlet, melynek főegyütthatója 1;
3) hiányos másodfokú egyenlet, $a \neq 1$;
4) olyan hiányos másodfokú egyenlet, melynek főegyütthatója 1?

606. •• Az a mely értékénél lesz az alábbi egyenletek egyik gyöke 0? Mi a másik gyök:

- 1) $x^2 + ax + a - 4 = 0$;
2) $4x^2 + (a - 8)x + a^2 + a = 0$;
3) $ax^2 + (a + 3)x + a^2 - 3a = 0$?

ISMÉTLŐ FELADATOK

607. Végezzék el a kijelölt műveleteket:

$$1) \frac{3-2a}{2a} - \frac{1-a^2}{a^2};$$

$$4) \frac{56a^5}{b^4} \cdot \frac{b^2}{14b^5};$$

$$2) \frac{a^2-6b^2}{3b} + 2b;$$

$$5) \frac{72a^3b}{c} : (27a^2b);$$

$$3) \frac{4}{c^2-4c} - \frac{c+4}{c^2-16};$$

$$6) \frac{4a^2-1}{a^2-9} : \frac{10a+5}{a+3}!$$

608. Egyszerűsítsék a következő kifejezéseket:

$$1) 10\sqrt{3} - 5\sqrt{48} + 2\sqrt{75};$$

$$3) (5 - \sqrt{2})^2;$$

$$2) (3\sqrt{5} - 2\sqrt{20})\sqrt{5};$$

$$4) (\sqrt{18} - \sqrt{3})\sqrt{2} + 0,5\sqrt{24}!$$

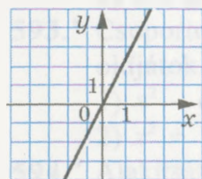
609. A 33. ábra melyik rajzán látható az alábbi függvények grafikonja:

$$1) y = x^2;$$

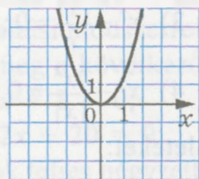
$$2) y = 2x;$$

$$3) y = \frac{x}{2};$$

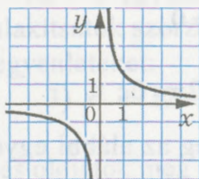
$$4) y = \frac{2}{x}?$$



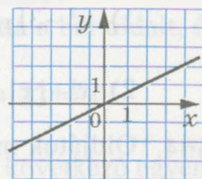
a)



b)



c)



d)

33. ábra

610. A tanuló egy kétjegyű számra gondolt. Ha a szám mindkét számjegyét kettővel növeljük, akkor a kapott szám 13-mal kevesebb a gondolt szám kétszeresénél. Melyik számra gondolt a tanuló?

NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREK HASZNÁLATA

611. Egy számológépbe, ha az $(a; b)$ számpárt táplálják be, akkor

az $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \right)$ számpárt adja ki. Lehetséges-e ezzel a

géppel a $(0,25; 1000)$ számpárból a $(1,25; 250)$ számpárt kapni?

18. A másodfokú egyenlet megoldóképlete

Ha ismerjük az $ax = b$ elsőfokú egyenlet a és b együtthatóját, akkor az egyenlet gyökét az $x = \frac{b}{a}$ képlettel határozhatjuk meg.

Kivezetjük azt a képletet, mellyel az a , b és c együtthatókon keresztül meghatározhatjuk az egyenlet gyökeit.

Induljunk ki a másodfokú egyenlet általános alakjából:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$$

Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát $4a$ -val. Mivel $a \neq 0$, ezért az előzővel egyenértékű egyenletet kapunk:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0.$$

Az egyenlet bal oldalát alakítsuk teljes négyzetté:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 - b^2 + 4ac = 0;$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac. \quad (2)$$

A (2) egyenlet megoldása és gyökeinek száma a $b^2 - 4ac$ kifejezés előjelétől függ. Ezt a kifejezést a **másodfokú egyenlet diszkriminánsának** nevezzük, és D betűvel jelöljük. Tehát $D = b^2 - 4ac$. A diszkrimináns fogalom a latin *discriminare* szóból ered, melynek jelentése megkülönböztetni, elválasztani.

Tehát a (2) egyenlet így is felírható:

$$(2ax + b)^2 = D. \quad (3)$$

A következő három eset fordulhat elő: $D < 0$, $D = 0$, $D > 0$.

1. Ha $D < 0$, akkor a (3) egyenletnek és így az (1) egyenletnek sincs megoldása. Valóban, mivel a $(2ax + b)^2$ kifejezés az x bármely értékére nemnegatív.

K ö v e t k e z t e t é s: ha $D < 0$, akkor a másodfokú egyenletnek nincs valós gyöke.

2. Ha $D = 0$, akkor (3) egyenlet az alábbi módon írható fel:

$$(2ax + b)^2 = 0.$$

$$2ax + b = 0;$$

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

K ö v e t k e z t e t é s: ha $D = 0$, akkor a másodfokú egyenletnek egy gyöke van: $x = -\frac{b}{2a}$.

3. §. A MÁSODFOKÚ EGYENLET

3. Ha $D > 0$, akkor a (3) egyenlet így írható fel:

$$(2ax+b)^2 =$$

Ebből kapjuk, hogy $2ax+b = -\sqrt{D}$ vagy $2ax+b = \sqrt{D}$. Tehát

$$x = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} \text{ vagy } x = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}.$$

K ö v e t k e z t e t é s: ha $D > 0$, akkor a másodfokú egyenletnek két gyöke van:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} \text{ vagy } x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}.$$

Gyakran használják a rövidített felírást.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Ezt a felírást szokás az $ax^2 + bx + c = 0$ **másodfokú egyenlet megoldóképletének** vagy **gyökképletének** nevezni.

A képletet alkalmazni lehet abban az esetben is, ha $D = 0$. Akkor

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = -\frac{b}{2a}.$$

A másodfokú egyenlet megoldását az alábbi algoritmus szerint végezzük el:

- meghatározzuk a másodfokú egyenlet D diszkriminánsát;
- ha $D < 0$, akkor az egyenletnek nincs megoldása;
- ha $D \geq 0$, akkor alkalmazzuk a megoldóképletet.

Ha az elsőfokú tag együtthatója páros, tehát felírható $2k$ alakban, akkor alkalmazhatunk egy másik képletet, mely sok esetben leegyszerűsíti a számítást.

Ebben az esetben a másodfokú egyenlet $ax^2 + 2kx + c = 0$ alakú.

Számítsuk ki az egyenlet diszkriminánsát: $D = 4k^2 - 4ac = 4(k^2 - ac)$.

Jelöljük a $k^2 - ac$ kifejezést D_1 -gyel.

Ha $D_1 \geq 0$, akkor a megoldóképlet alapján:

$$x = \frac{-2k \pm \sqrt{4D_1}}{2a} = \frac{-2k \pm 2\sqrt{D_1}}{2a} = \frac{2(-k \pm \sqrt{D_1})}{2a} = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a},$$

vagyis

$$x = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}, \text{ ahol } D_1 = k^2 - ac.$$

1. PÉLDA

Oldjuk meg a következő egyenleteket:

1) $3x^2 - 2x - 16 = 0$;

4) $x^2 - 6x + 11 = 0$;

2) $-0,5x^2 + 2x - 2 = 0$;

5) $5x^2 - 16x + 3 = 0$.

3) $x^2 + 5x - 3 = 0$;

Megoldás

1) Az egyenlet együtthatói: $a = 3$, $b = -2$, $c = -16$.

A diszkrimináns

$$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-16) = 4 + 192 = 196.$$

A gyökképletbe helyettesítve

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{196}}{6} = \frac{2 - 14}{6} = -2, \quad x_2 = \frac{2 + 14}{6} = \frac{16}{6} = 2\frac{2}{3}.$$

F e l e l e t: -2 ; $2\frac{2}{3}$.

2) $D = 2^2 - 4 \cdot (-0,5) \cdot (-2) = 4 - 4 = 0$.

Tehát ennek az egyenletnek csak egy gyöke van:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{-1} = 2.$$

Megjegyezzük, hogy ezt az egyenletet más módszerrel is megoldhatjuk. Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát -2 -vel:

$$x^2 - 4x + 4 = 0; (x - 2)^2 = 0; x - 2 = 0; x = 2.$$

F e l e l e t: 2 .

3) $D = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 25 + 12 = 37$.

Az egyenletnek két gyöke van: $x_1 = \frac{-5 - \sqrt{37}}{2}$, $x_2 = \frac{-5 + \sqrt{37}}{2}$.

F e l e l e t: $\frac{-5 \pm \sqrt{37}}{2}$.

4) $D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 11 = 36 - 44 = -8 < 0$.

Tehát az egyenletnek nincs megoldása.

F e l e l e t: Nincs megoldás.

5) Írjuk fel az adott egyenletet $5x^2 + 2 \cdot (-8)x + 3 = 0$ alakban, és alkalmazzuk az $ax^2 + 2kx + c = 0$ egyenlet megoldóképletét:

3. §. A MÁSODFOKÚ EGYENLET

$$D_1 = (-8)^2 - 5 \cdot 3 = 49;$$

$$x_1 = \frac{8-7}{5} = \frac{1}{5}; \quad x_2 = \frac{8+7}{5} = 3.$$

F e l e l e t: $\frac{1}{5}; 3$.

2. PÉLDA

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket:

$$1) x^2 + 6\sqrt{x^2} - 16 = 0;$$

$$3) 9x^2 - 8x + \frac{5}{x-1} = 1 + \frac{5}{x-1}!$$

$$2) x^2 - 10(\sqrt{x})^2 - 24 = 0;$$

Megoldás

- 1) Mivel $\sqrt{x^2} = |x|$, így az $x^2 + 6|x| - 16 = 0$ egyenletet kell megoldani.
Ha $x \geq 0$, akkor az $x^2 + 6|x| - 16 = 0$ egyenletet kapjuk, melynek gyökei -8 és 2 , viszont a -8 nem felel meg az $x \geq 0$ feltételnek.
Ha $x < 0$, akkor az $x^2 - 6x - 16 = 0$ egyenletet kapjuk, melynek gyökei 8 és -2 , viszont a -2 nem felel meg az $x < 0$ feltételnek.

F e l e l e t: $-2; 2$.

- 2) Mivel $(\sqrt{x})^2 = x$, ha $x \geq 0$, ezért a változó olyan értékeit keressük, melyeknek két feltételt kell kielégíteniük: $x^2 - 10x - 24 = 0$ és $x \geq 0$. Azt is mondhatjuk, hogy az eredeti egyenlet ekvivalens az
- $$\begin{cases} x^2 - 10x - 24 = 0, \\ x \geq 0 \end{cases} \text{ egyenletrendszerrel. Az } x^2 - 10x - 24 = 0$$
- egyenletnek két gyöke van a -2 és 12 , viszont a -2 nem felel meg az $x \geq 0$ feltételnek.

F e l e l e t: 12 .

- 3) Az adott egyenlet ekvivalens a $\begin{cases} 9x^2 - 8x = 1, \\ x-1 \neq 0 \end{cases}$ egyenletrendszerrel.

$$\begin{cases} 9x^2 - 8x - 1 = 0, \\ x \neq 1; \end{cases} \begin{cases} x = 1 \text{ vagy } x = -\frac{1}{9}, \\ x \neq 1; \end{cases}$$

$$x = -\frac{1}{9}.$$

F e l e l e t: $-\frac{1}{9}$.

3. FELADÁ

A b mely értéke mellett lesz az alábbi egyenleteknek egy gyöke:
 1) $2x^2 - bx + 18 = 0$; 2) $(b + 6)x^2 - (b - 2)x + 1 = 0$?

Megoldás

- 1) Az adott egyenlet másodfokú, így akkor lesz az egyenletnek egy gyöke, ha a diszkrimináns 0.

$$D = b^2 - 4 \cdot 2 \cdot 18 = b^2 - 144;$$

$$b^2 - 144 = 0;$$

$$b = -12 \text{ vagy } b = 12.$$

F e l e l e t: $b = -12$ vagy $b = 12$.

- 2) Ha $b = -6$, akkor a $8x + 1 = 0$ egyenletet kapjuk, melynek csak egy gyöke van.

Ha $b \neq -6$, akkor az adott egyenlet másodfokú, így akkor lesz az egyenletnek egy gyöke, ha a diszkrimináns 0:

$$D = (b - 2)^2 - 4(b + 6) = b^2 - 4b + 4 - 4b - 24 =$$

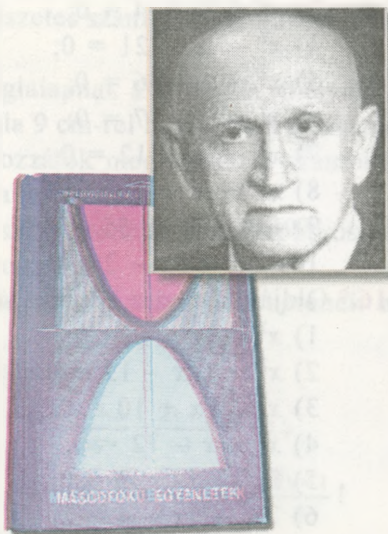
$$= b^2 - 8b - 20.$$

Megoldva a $b^2 - 8b - 20 = 0$ egyenletet azt kapjuk, hogy $b = -2$ vagy $b = 10$.

F e l e l e t: $b = -2$ vagy $b = 10$ vagy $b = -6$.

A matematikatanárok több nemzedéke és tanítványai is Mikola Andrijovics Csajkovszkij (1887–1970) híres ukrán pedagógus és matematikus *Másodfokú egyenletek* című könyvéből merítették pedagógiai tapasztalataikat és bővítették tudásukat.

M. A. Csajkovszkijnek óriási pedagógiai és tudományos hagyatéka van. Munkásságát Ukrajna határain túl is jól ismerik.



M. A. Csajkovszkij



1. Mi a másodfokú egyenlet diszkriminánsa?
2. Hogyan függ a másodfokú egyenlet gyökeinek száma a diszkrimináns értékétől?
3. Írjátok le a másodfokú egyenlet megoldóképletét!
4. Milyen algoritmus szerint oldjuk meg a másodfokú egyenleteket?

612.° Határozzátok meg az alábbi egyenletek diszkriminánsát és állapítsátok meg a gyökök számát:

- | | |
|-------------------------|----------------------------|
| 1) $x^2 + 2x - 4 = 0$; | 3) $2x^2 - 6x - 3,5 = 0$; |
| 2) $x^2 - 3x + 5 = 0$; | 4) $5x^2 - 2x + 0,2 = 0$! |

613.° Az alábbi egyenletek közül melyiknek van két gyöke:

- | | |
|--------------------------|---------------------------|
| 1) $x^2 + 4x + 8 = 0$; | 3) $4x^2 - 12x + 9 = 0$; |
| 2) $3x^2 - 4x - 1 = 0$; | 4) $2x^2 - 9x + 15 = 0$? |

614.° Az alábbi egyenletek közül melyiknek nincs gyöke:

- | | |
|---------------------------|-------------------------------|
| 1) $x^2 - 6x + 4 = 0$; | 3) $3x^2 + 4x - 2 = 0$; |
| 2) $5x^2 - 10x + 6 = 0$; | 4) $0,04x^2 - 0,4x + 1 = 0$? |

615.° Oldjátok meg a következő egyenleteket:

- | | |
|---------------------------|----------------------------|
| 1) $x^2 - 4x + 3 = 0$; | 11) $2x^2 - x - 6 = 0$; |
| 2) $x^2 + 2x - 3 = 0$; | 12) $3x^2 - 4x - 20 = 0$; |
| 3) $x^2 + 3x - 4 = 0$; | 13) $10x^2 - 7x - 3 = 0$; |
| 4) $x^2 - 4x - 21 = 0$; | 14) $-5x^2 + 7x - 2 = 0$; |
| 5) $x^2 + x - 56 = 0$; | 15) $-6x^2 - 7x - 1 = 0$; |
| 6) $x^2 - 6x - 7 = 0$; | 16) $3x^2 - 10x + 3 = 0$; |
| 7) $x^2 - 8x + 12 = 0$; | 17) $-3x^2 + 7x + 6 = 0$; |
| 8) $x^2 + 7x + 6 = 0$; | 18) $x^2 - 4x + 1 = 0$; |
| 9) $-x^2 + 6x + 55 = 0$; | 19) $2x^2 - x - 4 = 0$; |
| 10) $2x^2 - 3x - 2 = 0$; | 20) $x^2 - 8x + 20 = 0$! |

616.° Oldjátok meg a következő egyenleteket:

- | | |
|---------------------------|----------------------------|
| 1) $x^2 - 3x + 2 = 0$; | 7) $4x^2 - 3x - 1 = 0$; |
| 2) $x^2 + 12x - 13 = 0$; | 8) $-2x^2 + x + 15 = 0$; |
| 3) $x^2 - 7x + 10 = 0$; | 9) $6x^2 + 7x - 5 = 0$; |
| 4) $x^2 - x - 72 = 0$; | 10) $18x^2 - 9x - 5 = 0$; |
| 5) $2x^2 - 5x + 2 = 0$; | 11) $x^2 - 6x + 11 = 0$; |
| 6) $2x^2 - 7x - 4 = 0$; | 12) $-x^2 - 8x + 12 = 0$! |

617.° A változó mely értékeire:

- 1) egyenlők a $6x^2 - 2$ és $5 - x$ többtagok értéke;

- 2) egyenlő az $y - 6$ kéttagú kifejezés és az $y^2 - 9y + 3$ háromtagú kifejezés értéke;
- 3) egyenlők a $4m^2 + 4m + 2$ és $2m^2 + 10m + 8$ háromtagú kifejezések értéke?

618.° A változó mely értékeire:

- 1) egyenlők a $4x + 4$ kéttagú kifejezés és a $3x^2 + 5x - 10$ háromtagú kifejezés értéke;
- 2) egyenlők a $10p^2 + 10p + 8$ és $3p^2 - 10p + 11$ kifejezések értéke?

619.° Határozzátok meg az alábbi egyenletek gyökeit:

- 1) $(2x - 5)(x + 2) = 18$;
- 2) $(4x - 3)^2 + (3x - 1)(3x + 1) = 9$;
- 3) $(x + 3)^2 - (2x - 1)^2 = 16$;
- 4) $(x - 6)^2 - 2x(x + 3) = 30 - 12x$;
- 5) $(x + 7)(x - 8) - (4x + 1)(x - 2) = -21x$;
- 6) $(2x - 1)(2x + 1) - x(1 - x) = 2x(x + 1)!$

620.° Oldjátok meg a következő egyenleteket:

- 1) $(x - 4)^2 = 4x - 11$;
- 2) $(x + 5)^2(x - 7)(x + 7) = 6x - 19$;
- 3) $(3x - 1)(x + 4) = (2x + 3)(x + 3) = -17!$

621.° Határozzátok meg azt a természetes számot, mely 42-vel kevesebb négyzeténél!

622.° Határozzátok meg annak a téglalapnak a területét, melynek a területe 70 cm^2 , és egyik oldala 9 cm -rel hosszabb a másikonál!

623.° Két szám szorzata 84 . Határozzátok meg ezeket a számokat, ha az egyik 8 -cal kevesebb a másikonál!

624.° Két szomszédos természetes szám szorzata 89 -cel több összegükénél. Melyek ezek a számok?

625.° Melyik két szomszédos természetes szám négyzetének az összege 365 ?

626.° Oldjátok meg az alábbi egyenleteket:

- 1) $2x^2 + x\sqrt{5} - 15 = 0$;
- 3) $\frac{x^2 - 4}{8} - \frac{2x + 3}{3} = -1$;
- 2) $x^2 - x(\sqrt{6} - 1) - \sqrt{6} = 0$;
- 4) $\frac{4x^2 + x}{3} - \frac{x^2 + 17}{9} = \frac{5x - 1}{6}!$

627.° Oldjátok meg a következő egyenleteket:

- 1) $x^2 + 3x\sqrt{2} + 4 = 0$;

$$2) \quad x^2 - x(\sqrt{3} + 2) + 2\sqrt{3} = 0;$$

$$3) \quad \frac{2x^2 + x}{3} - \frac{x + 3}{4} = x - 1!$$

- 628.* Az a mely értéke mellett lesz $\frac{1}{4}$ az $a^2x^2 + 4ax - 5 = 0$ egyenlet gyöke?
- 629.* Az a mely értéke mellett lesz 2 az $x^2 - 0,5ax - 3a^2 = 0$ egyenlet gyöke?
- 630.* Egy négyzet alakú papírlapból levágtak egy 3 cm széles csíkot. A maradék papírlap területe 40 cm^2 . Mekkora volt az eredeti papírlap oldalhossza?
- 631.* Egy 18 cm hosszú téglalap alakú papírlapból levágtak a téglalap szélességével egyenlő oldalhosszúságú négyzetet. A maradék téglalap területe 72 cm^2 . Mekkora az eredeti téglalap szélessége?
- 632.* Egy derékszögű háromszög befogóinak különbsége 14 cm, átfogója 34 cm. Mekkora a háromszög befogói?
- 633.* Egy téglalap oldalainak különbsége 31 cm, átlója 41 cm. Mekkora a téglalap oldalai?
- 634.* Határozzátok meg azt a három egymást követő természetes páratlan számot, melyek közül a legkisebb négyzete 33-mal több, mint a másik két szám összegének kétszerese!
- 635.* Határozzátok meg azt a négy egymást követő páros természetes számot, melyek közül az első és a harmadik összege 5-ször kisebb, mint a második és a negyedik szám szorzata!
- 636.* Bizonyítsátok be, hogy ha a másodfokú egyenlet főegyütthatója és szabad tagja különböző előjelű, akkor az egyenletnek két gyöke van!
- 637.* (*Ősi indiai feladat.*) Majmok játszottak egyszer – így szól az indiai hír –, nyolcadrészüik négyzetre emelve már ugrál az erdőben. A fennmaradó tizenkettő táncolva és nagy zajjal a zöld lombok közé szaladt. Hányan voltak összesen?

638.** Az idei labdarúgó-bajnokságban 36 mérkőzést játszottak le. Hány csapat vett részt a bajnokságon, ha fordulónként mindenki mindenkiel játszott?

639.** Hány oldala van annak a sokszögnek, melyben 90 átló húzható?

640. Oldjátok meg az alábbi egyenleteket:

$$\begin{array}{ll} 1) |x^2 + 7x - 4| = 4; & 4) x^2 + \frac{4x^2}{|x|} - 12 = 0; \\ 2) 5x^2 - 8|x| + 3 = 0; & 5) x^2 - 8\sqrt{x^2} + 15 = 0; \\ 3) x|x| + 6x - 5 = 0; & 6) x^2 + 4\sqrt{x^2} - 12 = 0! \end{array}$$

641. Oldjátok meg az alábbi egyenleteket:

$$\begin{array}{ll} 1) |x^2 + 10x - 4| = 20; & 3) \frac{x^3}{|x|} - 14x - 15 = 0; \\ 2) x|x| + 12x - 45 = 0; & 4) x^2 - 8\sqrt{x^2} - 9 = 0! \end{array}$$

642. Oldjátok meg a következő egyenleteket:

$$1) x^2 + 2x + \frac{3}{x-8} = \frac{3}{x-8} + 80; \quad 2) x^2 + 8(\sqrt{x})^2 - 33 = 0!$$

643. Oldjátok meg a következő egyenleteket:

$$1) 6x^2 + 5x - \frac{1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}; \quad 2) 5x^2 - 14(\sqrt{x})^2 - 3 = 0!$$

644. A b mely értéke esetén lesz az alábbi egyenleteknek egy gyöke:

$$1) 2x^2 + 4x - b = 0; \quad 2) 3x^2 - bx + 12 = 0?$$

645. A b mely értéke esetén lesz az alábbi egyenleteknek egy gyöke:

$$1) 6x^2 - 18x + b = 0; \quad 2) 8x^2 + bx + 2 = 0?$$

646. Igazoljátok, hogy az alábbi egyenleteknek a p bármely értéke mellett két gyöke van:

$$1) 4x^2 - px - 3 = 0; \quad 2) x^2 + px + p - 2 = 0!$$

647. Igazoljátok, hogy az alábbi egyenleteknek az m bármely értéke mellett nincs megoldása:

$$1) x^2 + mx + m^2 + 1 = 0; \quad 2) x^2 - 2mx + 2m^2 + 9 = 0!$$

648. Bizonyítsátok be, hogy az $x^2 + bx - 7 = 0$ egyenletnek a b minden értéke esetén két gyöke van!

649. Oldjátok meg a következő egyenleteket:

$$1) x^2 - (3a + 1)x + 2a^2 + a = 0;$$

- 2) $x^2 - (2a + 4)x + 8a = 0$;
 3) $a^2x^2 - 24ax - 25 = 0$;
 4) $3(2a - 1)x^2 - 2(a + 1)x + 1 = 0$!
- 650.** Oldjátok meg a következő egyenleteket:
 1) $x^2 - (2a - 5)x - 3a^2 + 5a = 0$;
 2) $x^2 + (3a - 4)x - 12a = 0$;
 3) $ax^2 - (a + 1)x + 1 = 0$!
- 651.** A b mely értékei mellett lesz az alábbi egyenleteknek egy megoldásuk:
 1) $bx^2 - 6x - 7 = 0$;
 2) $(b + 5)x^2 - (b + 6)x + 3 = 0$;
 3) $(b - 4)x^2 + (2b - 8)x + 15 = 0$?
- 652.** A b mely értékei mellett lesz az alábbi egyenleteknek egy megoldásuk:
 1) $bx^2 + x + b = 0$;
 2) $(b + 3)x^2 + (b + 1)x - 2 = 0$?

ISMÉTLŐ FELADATOK

- 653.** Egyszerűsítsétek az $\left(\frac{a+b}{a} - \frac{4b}{a+b}\right) \cdot \frac{a+b}{a-b}$ kifejezést!
- 654.** Határozzátok meg a $\frac{(a^{-1})^3}{a^{-2} \cdot a^{-5}}$ kifejezés értékét, ha $a = \frac{1}{3}$!
- 655.** Rendezzétek a $\sqrt{17}$, $3\sqrt{2}$ és 4 számokat növekvő sorrendbe!
- 656.** Kétféle vasérc van: az egyiknek 5%-a, a másiknak 45%-a nikkell. Mennyi vasércre van szükség mind a két fajtából 120 tonna olyan ötvözethez, melynek 30%-a nikkell?
- 657.** Egy könyvből hiányzik néhány oldal. A bal oldalon a 24-es szám állt, a jobb oldalon az 53-as. Hány lap hiányzik a könyvből?

FÉLKÉSZÜLÉS AZ ÚJ TÉMÁHOZ

- 658.** Oldjátok meg az alábbi egyenleteket, számítsátok ki a gyökök összegét és szorzatát, hasonlítsátok össze az elsőfokú tag együtthatójával és a szabad taggal:
 1) $x^2 - 4x - 12 = 0$; 2) $x^2 + 9x + 14 = 0$!

19. Viète tétele

659. Töltsétek ki az alábbi táblázatot, ha a , b és c az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet együtthatói, x_1 és x_2 az egyenlet gyökei!

Egyenlet	$-\frac{b}{a}$	$\frac{c}{a}$	x_1	x_2	$x_1 + x_2$	$x_1 x_2$
$7x^2 - 8x + 1 = 0$						
$6x^2 + 13x - 15 = 0$						

NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREK HASZNÁLATA

660. Bizonyítsátok be, hogy 101 festett kockából mindig ki lehet választani 11 azonos színűt vagy 11 olyan kockát, mely mind különböző színű!

19. Viète tétele

A felkészülés közben a 658., 659. példákat oldottuk meg. Lehet, hogy ezek a példák rávezettek arra, hogy milyen összefüggés van a másodfokú egyenletek gyökei és együtthatói között.

19.1. tétel (Viète tétele). Ha x_1 és x_2 az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet gyökei, akkor

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ és } x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Francois Viète (1540–1603) francia matematikus, foglalkozását tekintve jogász. 1591-ben bevezette azt, hogy nemcsak az egyenletek változóit, hanem az együtthatóit is betűvel jelölje, ami lehetővé tette az egyenletek általános alakjának és gyökeinek vizsgálatát. Viète saját bevallása szerint különösen nagyra értékelte saját munkái közül az egyenlet gyökei és együtthatói közötti összefüggés felfedezését.



3. §. A MÁSODFOKÚ EGYENLET

B i z o n y í t á s. ☉ Tételizzük fel, hogy az adott másodfokú egyenlet diszkriminánsa nagyobb, mint nulla: $D > 0$. Akkor a megoldóképlet alapján felírhatjuk, hogy:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \quad \text{és} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

$$\text{Vagyis } x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{D} - b + \sqrt{D}}{2a} = -\frac{b}{a};$$

$$\begin{aligned} x_1 x_2 &= \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \cdot \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{D})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - D}{4a^2} = \\ &= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}. \quad \triangle \end{aligned}$$

M e g j e g y z é s: Viète tétele igaz abban az esetben is, ha $D = 0$. Ekkor úgy vesszük, hogy $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.

$$x_1 + x_2 = 2 \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b}{a},$$

$$x_1 x_2 = \frac{b^2}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

K ö v e t k e z m é n y. Ha x_1 és x_2 az $x^2 + bx + c = 0$ redukált másodfokú egyenlet gyökei, akkor

$$x_1 + x_2 = -b,$$

$$x_1 \cdot x_2 = c,$$

vagyis a két gyök összege egyenlő az elsőfokú tag együtthatójának ellentettjével, a két gyök szorzata pedig a szabad taggal.

19.2. tétel (Viète tételének megfordítása). Ha α és β számokra igaz hogy, $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ és $\alpha\beta = \frac{c}{a}$, akkor ezek a számok az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet gyökei.

B i z o n y í t á s. ☉ Induljunk ki az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenletből, osszuk el az egyenlet mindkét oldalát a -val:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Felhasználva a tétel feltételeit felírhatjuk:

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0. \quad (*)$$

Helyettesítsük be a kapott egyenletbe α -t és β -t:

$$\alpha^2 - (\alpha + \beta)\alpha + \alpha\beta = \alpha^2 - \alpha^2 - \alpha\beta + \alpha\beta = 0;$$

$$\beta^2 - (\alpha + \beta)\beta + \alpha\beta = \beta^2 - \alpha\beta - \beta^2 + \alpha\beta = 0.$$

Tehát α és β gyökei a (*) egyenletnek és így az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenletnek is. ▲

Következtetés. Ha α és β számokra igaz hogy, $\alpha + \beta = -b$ és $\alpha\beta = c$, akkor ezek a számok az $x^2 + bx + c = 0$ egyenlet gyökei.

Alkalmazva ezt a következtetést, a másodfokú egyenlet megoldható a megoldóképlet nélkül is.

1. PÉLDA

Határozzuk meg a $3x^2 - 15x + 2 = 0$ egyenlet gyökeinek összegét és szorzatát!

Megoldás

Ellenőrizzük le, vannak-e gyökei az adott egyenletnek:

$$D = (-15)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 225 - 24 > 0.$$

Mivel a diszkrimináns nagyobb, mint nulla, így az egyenletnek két gyöke van: x_1 és x_2 .

$$\text{Viète tétele alapján: } x_1 + x_2 = -\frac{-15}{3} = 5, \quad x_1 x_2 = \frac{2}{3}.$$

2. PÉLDA

Határozzuk meg az $x^2 + bx + c = 0$ egyenlet b és c együtthatóit, ha tudjuk hogy az egyenlet gyökei -7 és 4 !

Megoldás

$$\text{Viète tétele alapján: } b = -(-7 + 4) = 3, \quad c = -7 \cdot 4 = -28.$$

3. PÉLDA

Írjunk fel olyan egész együtthatójú másodfokú egyenletet, melynek gyökei az alábbi számok: 1) 4 és $-\frac{5}{7}$; 2) $\frac{6-\sqrt{7}}{2}$ és $\frac{6+\sqrt{7}}{2}$!

Megoldás

1) Mivel $x_1 = 4$ és $x_2 = -\frac{5}{7}$, ezért

$$x_1 + x_2 = 4 - \frac{5}{7} = \frac{23}{7} \quad \text{és} \quad x_1 \cdot x_2 = 4 \cdot \left(-\frac{5}{7}\right) = -\frac{20}{7}.$$

3. §. A MÁSODFOKÚ EGYENLET

A fordított tétel alapján az x_1 és x_2 számok gyökei az $x^2 - \frac{23}{7}x - \frac{20}{7} = 0$ egyenletnek. Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát 7-tel, így olyan másodfokú egyenletet kapunk, melynek együtthatói egész számok:

$$7x^2 - 23x - 20 = 0.$$

2) Ha $x_1 = \frac{6-\sqrt{7}}{2}$ és $x_2 = \frac{6+\sqrt{7}}{2}$, akkor

$$x_1 + x_2 = \frac{6-\sqrt{7}}{2} + \frac{6+\sqrt{7}}{2} = 6 \text{ és}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{6-\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{6+\sqrt{7}}{2} = \frac{36-7}{4} = \frac{29}{4}.$$

Tehát x_1 és x_2 számok gyökei az $x^2 - 6x + \frac{29}{4} = 0$ egyenletnek, de akkor a $4x^2 - 24x + 29 = 0$ egész együtthatós egyenletnek is.

4. PÉLDA

A $2x^2 - 3x - 9 = 0$ egyenlet megoldása nélkül határozzátok meg az $\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1}$ kifejezés értékét, ha x_1 és x_2 az előbbi egyenlet gyökei!

Megoldás

Viete tétele alapján $x_1 + x_2 = \frac{3}{2}$, $x_1 \cdot x_2 = -\frac{9}{2}$.

Tehát

$$\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{3}{2} : \left(-\frac{9}{2}\right) = -\frac{1}{3}.$$

F e l e l e t: $-\frac{1}{3}$.

5. PÉLDA

A $3x^2 - 10x + n = 0$ egyenlet egyik gyöke 4. Határozzátok meg az egyenlet másik gyökét és az n értékét!

Megoldás

Jelöljük x_1 -gyel és x_2 -vel az adott egyenlet gyökeit, és emellett $x_1 = 4$. Akkor Viete tétele alapján

$$x_1 + x_2 = \frac{10}{3}, \quad x_2 = \frac{10}{3} - 4 = -\frac{2}{3}, \quad n = x_1 x_2 = -\frac{8}{3}.$$

F e l e l e t: $x_2 = -\frac{2}{3}$, $n = -\frac{8}{3}$.

6. PÉLDA

Írjunk fel olyan másodfokú egyenletet, melynek gyökei 4-gyel nagyobbak, mint az $x^2 + 6x - 14 = 0$ egyenlet megfelelő gyökei!

Megoldás

Jelöljük x_1 -gyel és x_2 -vel az $x^2 + 6x - 14 = 0$ egyenlet gyökeit és x'_1 és x'_2 a keresett másodfokú egyenlet gyökei.

A feltételek alapján: $x'_1 = x_1 + 4$ és $x'_2 = x_2 + 4$.

Viète tétele alapján $x_1 + x_2 = -6$ és $x_1 \cdot x_2 = -14$.

Így

$$x'_1 + x'_2 = x_1 + 4 + x_2 + 4 = (x_1 + x_2) + 8 = -6 + 8 = 2;$$

$$\begin{aligned} x'_1 x'_2 &= (x_1 + 4)(x_2 + 4) = x_1 x_2 + 4(x_1 + x_2) + 16 = \\ &= -14 + 4 \cdot (-6) + 16 = -22. \end{aligned}$$

Viète tételének megfordított tétele alapján a keresett egyenlet $x^2 - 2x - 22 = 0$.

F e l e l e t: $x^2 - 2x - 22 = 0$.



1. Fogalmazzatok meg Viète tételét!
2. Fogalmazzatok meg Viète tételének következményét!
3. Fogalmazzatok meg a Viète tétel megfordítását!
4. Fogalmazzatok meg a Viète tétel megfordításának következményét!

661.° Mennyi az $x^2 + 5x - 10 = 0$ egyenlet gyökeinek összege?

- 1) 5; 2) -5; 3) -10; 4) 10.

662.° Mennyi az $x^2 - 14x + 12 = 0$ egyenlet gyökeinek szorzata?

- 1) -14; 2) 14; 3) 12; 4) -12.

663.° A következő egyenletek megoldása nélkül írjátok fel a gyökök összegét és szorzatát:

- 1) $x^2 + 6x - 32 = 0$; 3) $2x^2 - 6x + 3 = 0$;
2) $x^2 - 10x + 4 = 0$; 4) $10x^2 + 42x + 25 = 0$!

664.° A következő egyenletek megoldása nélkül írjátok fel a gyökök összegét és szorzatát:

- 1) $x^2 - 12x - 18 = 0$; 3) $3x^2 + 7x + 2 = 0$;
2) $x^2 + 2x + 9 = 0$; 4) $-4x^2 - 8x + 27 = 0$!

665.° Viète megfordított tétele alapján ellenőrizték, hogy az adott számok gyökei-e az alábbi egyenletnek:

- 1) 2 és 6 az $x^2 - 8x + 12 = 0$ egyenletnek;
2) -7 és 8 az $x^2 + x - 56 = 0$ egyenletnek;

- 3) 5 és 8 az $x^2 - 13x + 42 = 0$ egyenletnek;
4) 9 és 11 az $x^2 - 20x - 99 = 0$ egyenletnek!
- 666.°** Viete fordított tétele alapján ellenőrizték, hogy az adott számok gyökei-e az alábbi egyenletnek:
1) 1 és -2 az $x^2 + 2x - 3 = 0$ egyenletnek;
2) -2 és -3 az $x^2 + 5x + 6 = 0$ egyenletnek!
- 667.°** Határozzátok meg az $x^2 + bx + c = 0$ egyenlet b és c együtthatóját, ha az alábbi számok az egyenlet gyökei:
1) -8 és 6 ; 2) 4 és 5 !
- 668.°** Határozzátok meg az $x^2 + bx + c = 0$ egyenlet b és c együtthatóját, ha az alábbi számok az egyenlet gyökei:
1) -2 és $0,5$; 2) -10 és -20 !
- 669.°** Írjatok fel olyan egész együtthatójú másodfokú egyenletet, melynek az alábbi számok gyökei:
1) 2 és 5 ; 3) $-0,2$ és -10 ; 5) 0 és 6 ;
2) $-\frac{1}{3}$ és 2 ; 4) $2 - \sqrt{3}$ és $2 + \sqrt{3}$; 6) $-\sqrt{7}$ és $\sqrt{7}$!
- 670.°** Írj fel olyan egész együtthatójú másodfokú egyenletet, melynek az alábbi számok gyökei:
1) -7 és -8 ; 3) $\frac{1}{2}$ és $\frac{2}{3}$;
2) 5 és $-0,4$; 4) $5 - \sqrt{10}$ és $5 + \sqrt{10}$!
- 671.°** Az $x^2 - 8x + q = 0$ egyenlet egyik gyöke -2 . Határozzátok meg az egyenlet másik gyökét és a q értékét!
- 672.°** Az $x^2 + px - 42 = 0$ egyenlet egyik gyöke 7 . Határozzátok meg az egyenlet másik gyökét és a p értékét!
- 673.°** A $6x^2 - bx + 4 = 0$ egyenlet egyik gyöke $\frac{1}{3}$. Határozzátok meg az egyenlet másik gyökét és a b értékét!
- 674.°** A $4x^2 - 5,6x + m = 0$ egyenlet egyik gyöke $-0,2$. Határozzátok meg az egyenlet másik gyökét és az m értékét!
- 675.** A $2x^2 - 7x - 13 = 0$ egyenlet megoldása nélkül határozzátok meg az $x_1x_2 - 4x_1 - 4x_2$ kifejezés értékét, ha x_1 és x_2 az előbbi egyenlet két gyöke!
- 676.°** Az $5x^2 + 4x - 13 = 0$ egyenlet megoldása nélkül határozzátok meg a $3x_1x_2 - x_1 - x_2$ kifejezés értékét, ha x_1 és x_2 az előbbi egyenlet gyökei!

677.* A b mely értékei mellett lesznek az $x^2 + bx - 17 = 0$ egyenlet gyökei ellentett számok? Határozzátok meg ezeket a számokat!

678.* Oldjátok meg a következő másodfokú egyenleteket! Alkalmazzátok Viète tételét:

- | | |
|-------------------------|--------------------------|
| 1) $x^2 - 5x + 4 = 0$; | 5) $x^2 - 9x + 20 = 0$; |
| 2) $x^2 + 5x + 4 = 0$; | 6) $x^2 - x - 2 = 0$; |
| 3) $x^2 - 4x - 5 = 0$; | 7) $x^2 + 2x - 8 = 0$; |
| 4) $x^2 + 4x - 5 = 0$; | 8) $x^2 - 3x - 18 = 0$! |

679.* Oldjátok meg a következő másodfokú egyenleteket! Alkalmazzátok Viète tételét:

- | | |
|---------------------------|-------------------------|
| 1) $x^2 - 10x + 24 = 0$; | 3) $x^2 - 2x - 8 = 0$; |
| 2) $x^2 + 6x + 8 = 0$; | 4) $x^2 + x - 12 = 0$! |

680.* Az alábbi egyenletek közül melyeknek lesz mind a két gyöke pozitív, mind a két gyöke negatív és melyek gyökei ellenkező előjelűek:

- | | |
|---------------------------|----------------------------|
| 1) $x^2 - 12x + 14 = 0$; | 4) $x^2 + 16x + 10 = 0$; |
| 2) $x^2 + 6x - 42 = 0$; | 5) $x^2 - 24x + 0,1 = 0$; |
| 3) $x^2 - 7x - 30 = 0$; | 6) $x^2 + 20x + 3 = 0$? |

681.** Az $x^2 - 10x + c = 0$ egyenlet gyökei közül az egyik 8-cal nagyobb a másiknál. Határozzátok meg a c értékét és az egyenlet gyökeit!

682.** Az $x^2 + 20x + a = 0$ egyenlet gyökeinek aránya $7 : 3$. Határozzátok meg az a értékét és az egyenlet gyökeit!

683.** Az $x^2 - 7x + m = 0$ egyenlet x_1 és x_2 gyökeire igaz, hogy $2x_1 - 5x_2 = 28$. Határozzátok meg az egyenlet gyökeit és az m értékét!

684.** Az $x^2 + 4x + n = 0$ egyenlet x_1 és x_2 gyökeire igaz, hogy $3x_1 - x_2 = 8$. Határozzátok meg az egyenlet gyökeit és az n értékét!

685.** Viète fordított tételével határozzátok meg az alábbi egyenletek gyökeit:

- | | |
|--------------------------|-----------------------------|
| 1) $2x^2 - 5x + 3 = 0$; | 3) $16x^2 - 23x + 7 = 0$; |
| 2) $2x^2 + 5x + 3 = 0$; | 4) $-8x^2 - 19x + 27 = 0$! |

686.** Viète fordított tételével határozzátok meg az alábbi egyenletek gyökeit:

- | | |
|----------------------------|--------------------------|
| 1) $7x^2 + 11x - 18 = 0$; | 2) $9x^2 - 5x - 4 = 0$! |
|----------------------------|--------------------------|

687.** Az $x^2 - 9x + 6 = 0$ egyenlet gyökei x_1 és x_2 . A gyökök kiszámítása nélkül határozzátok meg az alábbi kifejezések értékét:

- | | | | |
|--------------------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| 1) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; | 2) $x_1^2 + x_2^2$; | 3) $(x_1 - x_2)^2$; | 4) $x_1^3 + x_2^3$. |
|--------------------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|

3. §. A MÁSODFOKÚ EGYENLET

- 688.**** Az $x^2 + 5x - 16 = 0$ egyenlet megoldása nélkül határozzátok meg az alábbi kifejezések értékét, ha x_1 és x_2 az előbbi egyenlet két gyöke:
- 1) $x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1$; 2) $\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$; 3) $|x_2 + x_1|$.
- 689.**** Írjatok fel olyan másodfokú egyenletet, melynek gyökei 2-szer kisebbek az $x^2 + 8x - 3 = 0$ egyenletnek megfelelő gyökeinél!
- 690.**** Írjatok fel olyan másodfokú egyenletet, melynek gyökei 3-mal nagyobbak, mint az $x^2 - 12x + 4 = 0$ egyenletnek megfelelő gyökei!
- 691.**** Írjatok fel olyan másodfokú egyenletet, melynek gyökei 3-szor kisebbek, mint a $2x^2 - 14x + 9 = 0$ egyenletnek megfelelő gyökei!
- 692.**** Írjatok fel olyan másodfokú egyenletet, melynek gyökei 2-szer nagyobbak, mint a $2x^2 - 15x + 4 = 0$ egyenletnek megfelelő gyökei!
- 693.*** A $3x^2 + ax - 7 = 0$ egyenlet gyökeinek összege $\frac{49}{6}$. Határozzátok meg az a értékét!
- 694.*** Az $x^2 - ax + 8 = 0$ gyökeire igaz, hogy $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{5}{2}$. Határozzátok meg az a értékét!
- 695.*** Igazak-e az alábbi állítások:
- 1) a $7x^2 + 4x - a^2 - 1 = 0$ egyenlet gyökei különböző előjelűek az a bármely értéke mellett;
 - 2) az $x^2 + 6x + a^2 + 4 = 0$ egyenlet gyökei ha léteznek, függetlenül az a értékétől, negatív előjelűek?
- 696.*** Határozzátok meg a b összes olyan egész értékét, melyre az alábbi egyenletek gyökei is egészek:
- 1) $x^2 + bx + 6 = 0$; 2) $x^2 + bx - 12 = 0$!
- 697.*** Határozzátok meg a b összes olyan egész értékét, melyre az alábbi egyenletek gyökei is egészek:
- 1) $x^2 + bx + 8 = 0$; 2) $x^2 + bx - 18 = 0$!
- 698.*** Az $x^2 + bx + c = 0$ egyenlet gyökei egyenlők a b és c együtthatóval. Határozzátok meg a b és a c értékét!
- 699.*** Az a mely értékére lesz az $x^2 - 4x + a = 0$ egyenlet gyökeinek négyzetösszege:
- 1) 12; 2) 6?
- 700.*** Az a mely értékére lesz az $x^2 + (a - 1)x - 2a = 0$ egyenlet gyökeinek négyzetösszege 9?

ISMÉTLŐ FELADATOK

701. Egyszerűsítsd az alábbi kifejezéseket:

1) $\frac{4a-16}{a^2-16};$

3) $\frac{c^2+10c+25}{5c+25};$

5) $\frac{n^3-n^5}{n^3-n};$

2) $\frac{12b^3-8b^2}{2-3b};$

4) $\frac{4-m^2}{m^2-4m+4};$

6) $\frac{2-2x^2}{4x^2-8x+4};$

702. Egy gyümölcsösben 48 fát ültettek, soronként azonos mennyiséget. 8-cal kevesebb a sorok száma, mint amennyi fát ültettek egy-egy sorba. Hány fát ültettek egy-egy sorba, és hány sort ültettek?

703. Rajz nélkül határozzátok meg az $y = x^2$ és $y = x + 2$ függvények grafikonjainak metszéspontját! Ábrázoljátok a függvényeket és jelöljétek a meghatározott pontokat!

704. A gyümölcsös 60%-a cseresznye és szilvafa. A cseresznye és szilvafák 30%-a szilvafa. A gyümölcsös hány százaléka szilvafa?

FÉLKÉSZÜLÉS AZ ÚJ TÉMÁHOZ

705. Az alábbi kifejezéseket csoportosítási módszerrel alakítsd szorzattá:

1) $x^2 - 7x + 10;$

3) $a^2 + 8a + 12;$

2) $y^2 + 3y - 4;$

4) $x^2 - x - 6!$

NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREK HASZNÁLATA

706. László három x , y , z számjegyre gondolt. Péter megnevez három számot: a , b és c . László megmondja az $ax + by + cz$ kifejezés értékét. Mely számokat kell megneveznie Péternek ahhoz, hogy a kapott információ alapján meg tudjuk mondani, mely számokra gondolt László?

ELLENŐRIZZÉTEK MAGATOKAT! 5. SZ. TESZTFELADAT

1. Az alábbi egyenletek közül melyik másodfokú?

A) $x^2 = 0;$

C) $x^3 + x = 0;$

B) $x^2 + x = 0;$

D) $x^2 + x - 2 = 0.$

3. §. A MÁSODFOKÚ EGYENLET

2. Oldjátok meg a $9x - x^2 = 0$ egyenletet!
 A) $-3; 0; 3$; B) $0; 3$; C) $-3; 3$; D) $0; 9$.
3. Oldjátok meg az $\frac{x^2-x}{6} - \frac{x-2}{3} = \frac{3-x}{2}$ egyenletet!
 A) $0; 5$; B) 5 ; C) $\sqrt{5}$; D) $-\sqrt{5}; \sqrt{5}$.
4. Az alábbi egyenletek közül melyiknek nincs gyökük?
 A) $x^2 - 5x - 2 = 0$; C) $x^2 - 2x + 5 = 0$;
 B) $x^2 - 5x + 2 = 0$; D) $x^2 + 2x - 5 = 0$.
5. Hány gyöke van a $6x^2 + 13x + 5 = 0$ másodfokú egyenletnek?
 A) kettő; C) egyetlen egy sem;
 B) végtelen sok; D) egy.
6. Határozzátok meg az $x^2 + 4x - 21 = 0$ egyenlet gyökeit!
 A) $7; -3$; B) $-7; 3$; C) $-7; -3$; D) $3; 7$.
7. Mennyi az $x^2 - 10x - 12 = 0$ egyenlet gyökeinek összege?
 A) 10 ; B) -10 ; C) -12 ; D) 12 .
8. Mennyi a $3x^2 - 16x + 6 = 0$ egyenlet gyökeinek szorzata?
 A) 6 ; B) 2 ; C) -16 ; D) $\frac{16}{3}$.
9. Az x mely értékei mellett egyenlők a $(3x - 1)(x + 2)$ és az $(x - 12)(x - 4)$ kifejezések értékei?
 A) $-12,5; 2$; B) $12,5; -2$; C) $-25; 4$; D) $25; -4$.
10. Írjátok fel olyan normál másodfokú egyenletet, melynek gyökei a $3 - \sqrt{2}$ és $3 + \sqrt{2}$!
 A) $x^2 + 6x - 7 = 0$; C) $x^2 + 6x + 7 = 0$;
 B) $x^2 - 6x - 7 = 0$; D) $x^2 - 6x + 7 = 0$.
11. Oldjátok meg az $x|x| - 9x - 10 = 0$ egyenletet!
 A) $-1; 10; \frac{-9-\sqrt{41}}{2}; \frac{-9+\sqrt{41}}{2}$; C) $-1; \frac{-9-\sqrt{41}}{2}$;
 B) $10; \frac{-9-\sqrt{41}}{2}; \frac{-9+\sqrt{41}}{2}$; D) $-1; 10$.
12. A $2x^2 + 9x + c = 0$ egyenlet egyik gyöke -5 . Határozzátok meg a másik gyököt és a c értékét!
 A) $x_2 = 0,5; c = -5$; C) $x_2 = 9,5; c = 22,5$;
 B) $x_2 = -0,5; c = 5$; D) $x_2 = 9,5; c = -22,5$.

20. Másodfokú polinom

Meghatározás. Az $ax^2 + bx + c$ kifejezést **másodfokú polinomnak** nevezzük, ahol x változó, a , b és c bármely szám és $a \neq 0$.

Lássunk néhány példát olyan többtagú kifejezésre, melyek másodfokú polinomok:

$$2x^2 - 3x + 5; x^2 + 7x; x^2 - 5; 3x^2.$$

Jegyezzük meg, hogy a másodfokú egyenlet bal oldala is másodfokú polinom.

Meghatározás. A **másodfokú polinom gyökeinek** nevezzük a változó azon értékét, melyre a kifejezés helyettesítési értéke 0.

Például a 2 gyöke az $x^2 - 6x + 8$ másodfokú polinomnak.

Ahhoz, hogy meghatározzuk az $ax^2 + bx + c$ másodfokú polinom gyökeit, meg kell oldani az $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenletet.

A $D = b^2 - 4ac$ kifejezést az $ax^2 + bx + c$ másodfokú polinom **diszkriminánsának** nevezzük.

Ha $D < 0$, akkor a másodfokú polinomnak nincsenek gyökei, ha $D = 0$ egy gyöke van, ha $D > 0$, akkor két gyöke van.

Csoportosítási módszerrel bontsuk tényezőkre az $x^2 - 3x + 2$ másodfokú polinomot (ilyen volt a 705. feladat, melyet a felkészüléskor oldottunk):

$$\begin{aligned} x^2 - 3x + 2 &= x^2 - x - 2x + 2 = x(x - 1) - 2(x - 1) = \\ &= (x - 1)(x - 2). \end{aligned}$$

Ezt az azonos átalakítást nevezzük az $x^2 - 3x + 2$ kifejezés **lineáris tényezőkre** bontásának.

A másodfokú polinom gyökei és lineáris tényezői közötti összefüggést a következő tétel mondja ki.

20.1. t é t e l. Ha az $ax^2 + bx + c$ másodfokú polinom diszkriminánsa pozitív, akkor a másodfokú polinom szorzattá alakítható:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

ahol x_1 és x_2 a polinom gyökei.

B i z o n y í t á s. ☺ Mivel x_1 és x_2 az $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenlet gyökei, így $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$. Vagyis $a(x - x_1)(x - x_2) = a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = ax^2 + bx + c$. ▲

M e g j e g y e z z ü k, hogy ha a diszkrimináns nulla, akkor úgy tekintjük, hogy a másodfokú polinomnak két egyenlő gyöke van, vagyis $x_1 = x_2$. Ebben az esetben

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2.$$

20.2. t é t e l. Ha az $ax^2 + bx + c$ másodfokú polinom diszkriminánsa negatív, akkor a másodfokú polinom nem bontható lineáris szorzótényezőkre.

B i z o n y í t á s. ☹ Tételezzük fel, hogy az $ax^2 + bx + c$ másodfokú polinom szorzattá alakítható, vagyis $ax^2 + bx + c = a(x - m)(x - n)$. Ebben az esetben viszont m és n a polinom gyökei. Vagyis a diszkrimináns nemnegatív, ami ellentmond a feltételnek. ▲

1. PÉLDA

Bontsuk tényezőkre az alábbi polinomokat:

$$1) x^2 - 14x - 32; \quad 2) -x^2 + 17x - 30; \quad 3) 3x^2 - 7x + 2!$$

Megoldás

1) Meghatározzuk a polinom gyökeit:

$$x^2 - 14x - 32 = 0;$$

$$x_1 = -2, x_2 = 16.$$

$$\text{Tehát, } x^2 - 14x - 32 = (x + 2)(x - 16).$$

2)

$$-x^2 + 17x - 30 = 0;$$

$$x^2 - 17x + 30 = 0;$$

$$x_1 = 2, x_2 = 15.$$

Vagyis $-x^2 + 17x - 30 = -(x - 2)(x - 15)$.

3) Megoldjuk a $3x^2 - 7x + 2 = 0$ egyenletet:

$$x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = 2.$$

Tehát $3x^2 - 7x + 2 = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x - 2) = (3x - 1)(x - 2)$.

2. PÉLDA

Egyszerűsítsük a $\frac{6a^2 - a - 1}{9a^2 - 1}$ törtet!

Megoldás

Bontuk tényezőkre a tört számlálóját:

$$6a^2 - a - 1 = 0;$$

$$a_1 = -\frac{1}{3}; a_2 = \frac{1}{2};$$

$$\begin{aligned} 6a^2 - a - 1 &= 6\left(a + \frac{1}{3}\right)\left(a - \frac{1}{2}\right) = 3\left(a + \frac{1}{3}\right) \cdot 2\left(a - \frac{1}{2}\right) = \\ &= (3a + 1)(2a - 1). \end{aligned}$$

Vagyis

$$\frac{6a^2 - a - 1}{9a^2 - 1} = \frac{(3a + 1)(2a - 1)}{(3a + 1)(3a - 1)} = \frac{2a - 1}{3a - 1}.$$

F e l e l e t: $\frac{2a - 1}{3a - 1}$.

3. PÉLDA

Az m mely értéke mellett lehet a $2x^2 + 9x + m$ másodfokú polinomot olyan szorzatként felírni, melynek egyik tényezője az $(x + 5)$ lineáris kifejezés?

Megoldás

Mivel az egyik szorzótényező az $(x + 5)$ lineáris kifejezés, így a polinom egyik gyöke -5 .

Vagyis:

$$\begin{aligned} 2 \cdot (-5)^2 + 9 \cdot (-5) + m &= 0; \\ m &= -5. \end{aligned}$$

F e l e l e t: $m = -5$



1. Mit nevezünk másodfokú polinomnak?
2. Mi a másodfokú polinom gyöke?

3. §. A MÁSODFOKÚ EGYENLET

3. Mit nevezünk a másodfokú polinom diszkriminánsának?
4. Mikor nincs a másodfokú polinomnak gyöke? Mikor van egy gyöke? Két gyöke?
5. Mikor bontható lineáris tényezőkre egy másodfokú polinom?
6. Írjátok le a másodfokú polinom tényezőkre bontásának képletét!
7. Mely esetben nem lehet tényezőkre bontani a másodfokú polinomot?

707.° Határozzátok meg a következő másodfokú polinomok gyökeit:

- 1) $x^2 - x - 12$; 3) $3x^2 - 16x + 5$; 5) $4x^2 + 28x + 49$;
 2) $x^2 + 2x - 35$; 4) $16x^2 - 24x + 3$; 6) $3x^2 + 21x - 90$!

708.° Tényezőkre lehet-e bontani a következő kifejezéseket:

- 1) $x^2 - 12x + 6$; 3) $2a^2 - 8a + 8$;
 2) $3x^2 - 8x + 6$; 4) $-6b^2 + b + 12$?

709.° Bontsátok lineáris tényezőkre az alábbi polinomokat:

- 1) $x^2 - 7x + 12$; 7) $4x^2 + 3x - 22$;
 2) $x^2 + 8x + 15$; 8) $-3a^2 + 8a + 3$;
 3) $x^2 - 3x - 10$; 9) $\frac{1}{6}b^2 - \frac{5}{6}b + 1$;
 4) $-x^2 - 5x - 6$; 10) $-2x^2 - 0,5x + 1,5$;
 5) $-x^2 + x + 2$; 11) $0,4x^2 - 2x + 2,5$;
 6) $6x^2 - 5x - 1$; 12) $-1,2m^2 + 2,6m - 1$!

710.° Bontsátok lineáris tényezőkre az alábbi polinomokat:

- 1) $x^2 - 3x - 18$; 4) $5x^2 + 8x - 4$; 7) $-\frac{1}{4}x^2 - 2x - 3$;
 2) $x^2 + 5x - 14$; 5) $2a^2 - 3a + 1$; 8) $0,3m^2 - 3m + 7,5$!
 3) $-x^2 + 3x + 4$; 6) $4b^2 - 11b - 3$;

711.° Egyszerűsítsétek a következő törteteket:

- 1) $\frac{x^2 + x - 6}{x + 3}$; 3) $\frac{3x - 15}{x^2 - x - 20}$; 5) $\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 3x}$;
 2) $\frac{x - 4}{x^2 - 10x + 24}$; 4) $\frac{x^2 - 3x + 2}{6x - 6}$; 6) $\frac{x^2 + 4x}{x^2 + 2x - 8}$!

712.° Egyszerűsítsék a következő törtet:

$$1) \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 5}; \quad 2) \frac{2x + 12}{x^2 + 3x - 18}; \quad 3) \frac{x^2 + 9x + 14}{x^2 + 7x} !$$

713.* Egyszerűsítsék az alábbi törtet:

$$1) \frac{4a^2 - 9}{2a^2 - 9a - 18}; \quad 3) \frac{c^2 - 5c - 6}{c^2 - 8c + 12}; \quad 5) \frac{x^2 - 16}{32 - 4x - x^2};$$

$$2) \frac{2b^2 - 7b + 3}{4b^2 - 4b + 1}; \quad 4) \frac{m^3 - 1}{m^2 + 9m - 10}; \quad 6) \frac{4n^2 - 9n + 2}{2 + 9n - 5n^2} !$$

714.* Egyszerűsítsék az alábbi törtet:

$$1) \frac{4x^2 + x - 3}{x^2 - 1}; \quad 3) \frac{a^2 + 5a + 4}{a^2 - a - 20};$$

$$2) \frac{2y^2 + 3y - 5}{y^2 - 2y + 1}; \quad 4) \frac{3 + 20b - 7b^2}{7b^2 - 6b - 1} !$$

715.** A b mely értéke mellett lehet az alábbi polinomokat olyan szorzattá alakítani, melynek egyik tényezője a megadott lineáris kifejezés:

$$1) 2x^2 - 5x + b; (x - 3);$$

$$2) -4x^2 + bx + 2; (x + 1);$$

$$3) 3x^2 - 4x + b; (3x - 2)?$$

716.** A a mely értéke mellett lehet az alábbi polinomokat olyan szorzattá alakítani, melynek egyik tényezője a megadott lineáris kifejezés:

$$1) 2x^2 - 7x + a; (x - 4);$$

$$2) 4x^2 - ax + 6; (2x + 1)?$$

717.** Egyszerűsítsék a következő kifejezéseket:

$$1) \frac{9a^2 - 4}{2a^2 - 5a + 2} \cdot \frac{a - 2}{3a + 2} + \frac{a - 1}{1 - 2a};$$

$$2) \frac{b - 4}{b^2 - b} : \left(\frac{b - 1}{2b^2 + 3b + 1} - \frac{1}{b^2 - 1} \right);$$

$$3) \left(\frac{c + 2}{c^2 - c - 6} - \frac{2c}{c^2 - 6c + 9} \right) : \frac{c^2 + 3c}{(2c - 6)^2};$$

$$4) \left(\frac{3}{m - 4} + \frac{2m}{m + 1} + \frac{4m - 6}{m^2 - 3m - 4} \right) \cdot \frac{4m - 16}{2m - 3} !$$

718.** Igazoljátok, hogy az alábbi kifejezések értéke független az a változó értékétől:

$$1) \frac{25a^2 - 36}{10a^2 - 9a + 2} : \frac{5a + 6}{5a - 2} + \frac{9a - 8}{1 - 2a};$$

$$2) \left(\frac{2a}{a + 3} + \frac{1}{a - 1} - \frac{4}{a^2 + 2a - 3} \right) : \frac{2a + 1}{a + 3} !$$

3. §. A MÁSODFOKÚ EGYENLET

719. ** Ábrázoljátok az alábbi függvények grafikonját:

$$1) y = \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 1};$$

$$2) y = \frac{3x^2 - 10x + 3}{x - 3} - \frac{x^2 - 4}{x + 2};$$

720. ** Ábrázoljátok a következő függvények grafikonját:

$$1) y = \frac{x^2 - 2x - 8}{x - 4};$$

$$2) y = \frac{x^2 - x - 2}{x + 1} - \frac{x^2 - x - 30}{x + 5};$$

721. * Alakítsátok szorzattá az alábbi kifejezéseket:

$$1) x^2 - 6xy + 5y^2;$$

$$3) 3m^2 - 8mn - 3n^2;$$

$$2) a^2 + 5ab - 36b^2;$$

$$4) 4x^2 - 5xy + y^2;$$

722. * Alakítsátok szorzattá az alábbi kifejezéseket:

$$1) a^2 - 14ab + 40b^2;$$

$$2) 12b^2 + bc - 6c^2;$$

723. * Oldjátok meg a következő egyenleteket:

$$1) (a^2 - a - 6)x = a^2 - 9;$$

$$2) (a^2 - 8a + 7)x = 2a^2 - 13a - 7!$$

724. * Oldjátok meg az

$$(a^2 + 7a - 8)x = a^2 + 16a + 64$$

egyenletet!

ISMÉTLŐ FELADATOK

725. Egyszerűsítsetek az alábbi törteket:

$$1) \frac{3 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}};$$

$$3) \frac{2 - \sqrt{6}}{\sqrt{6} - 3};$$

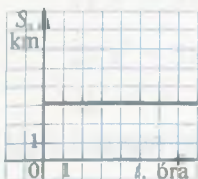
$$5) \frac{9a - b^2}{9a + 6b\sqrt{a + b^2}};$$

$$2) \frac{5 - \sqrt{5}}{\sqrt{10} - 5\sqrt{2}};$$

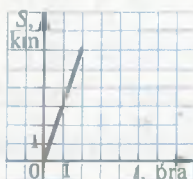
$$4) \frac{4a - 2}{2\sqrt{a} + \sqrt{2}};$$

$$6) \frac{a\sqrt{a} - 8}{a + 2\sqrt{a} + 4};$$

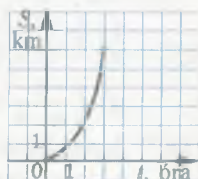
726. A 34. ábra egyik rajzán egy állandó sebességgel haladó gyalogos mozgási grafikonja látható. Határozzátok meg a gyalogos sebességét!



a)



b)



c)

34. ábra

727. 2 l 8%-os zsírtartalmú és 3 liter 6%-os tejet összeöntöttek. Hány százalék a kapott tej zsírtartalma?

FELKÉSZÜLÉS AZ ÚJ TÉMÁHOZ

728. Oldjátok meg a következő egyenleteket:

$$\begin{array}{lll} 1) x^2 = 9; & 3) (4x + 1)^2 = 9; & 5) \sqrt{x} = 9; \\ 2) x^2 = -9; & 4) (x - 1)^2 = 5; & 6) \sqrt{x} = -9! \end{array}$$

729. Oldjátok meg az alábbi egyenleteket:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{4x-1}{x-2} = \frac{x+5}{x-2}; & 3) \frac{5x-3}{x+1} - \frac{4x-2}{x+2} = 1; \\ 2) \frac{2y^2-3y-20}{y-4} - y = 1; & 4) \frac{1}{y-5} - \frac{1}{y+4} = \frac{9}{(y-5)(y+4)}! \end{array}$$

NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREK HASZNÁLATA

730. Milyen téglalapról van több: olyanból, amelynek kerülete 1000 egység vagy olyanból, amelyeknek a kerülete 1002 egység? A feladat feltételében az összes olyan téglalap szerepel, melyek oldalhosszainak mérőszáma természetes szám.

21. Másodfokúra visszavezethető egyenletek megoldása

1. PÉLDA

Oldjuk meg az $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ egyenletet!

Megoldás

Vezessünk be új változót: $x^2 = t$. Akkor $x^4 = t^2$. Ekkor az egyenlet felírható a t változón keresztül:

$$t^2 - 13t + 36 = 0.$$

Az utóbbi egyenletet megoldva kapjuk, hogy $t_1 = 4$, $t_2 = 9$. Mivel $t = x^2$, ezért az

$$x^2 = 4 \text{ és } x^2 = 9$$

egyenletet kell megoldani.

Tehát $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, $x_3 = -3$ és $x_4 = 3$.

F e l e l e t: $-2; 2; -3; 3$.

M e g h a t á r o z á s. Az $ax^4 + bx^2 + c = 0$ alakú egyenletet **b i k v a d r a t i k u s e g y e n l e t n e k** nevezzük, ahol x változó a , b , c valós szám és $a \neq 0$.

3. §. A MÁSODFOKÚ EGYENLET

Az $x^2 = t$ változó cserét alkalmazva a bikvadratikus egyenlet visszavezethető $at^2 + bt + c = 0$ alakú másodfokú egyenletre. Ezt a módszert **változó cserének** nevezzük.

Ezt az elvet nem csak bikvadratikus egyenletek megoldásakor alkalmazhatjuk.

3. PÉLDA

Oldjuk meg a $(2x - 1)^4 + (2x - 1)^2 - 2 = 0$ egyenletet!

Megoldás

Vezessük be a $t = (2x - 1)^2$ változót. Ezt behelyettesítve az egyenletünk $t^2 + t - 2 = 0$ alakú lesz.

Innét $t_1 = -2$ és $t_2 = 1$.

Tehát a

$$(2x - 1)^2 = -2 \text{ és } (2x - 1)^2 = 1$$

egyenleteket kell megoldani.

Az első egyenletnek nincs megoldása. A második egyenletből $2x - 1 = 1$ vagy $2x - 1 = -1$ egyenleteket kapjuk, melyek megoldása az $x_1 = 0$ és $x_2 = 1$.

F e l e l e t: $0; 1$.

3. PÉLDA

Oldjuk meg a $6x + 5\sqrt{x} + 1 = 0$ egyenletet!

Megoldás

Vezessünk be új ismeretlent. Legyen $\sqrt{x} = t$, akkor $t^2 = x$. Így az egyenletünk: $6t^2 + 5t + 1 = 0$ alakú lett.

Ennek az egyenletnek két gyöke van: $t_1 = -\frac{1}{3}$, $t_2 = -\frac{1}{2}$.

Két egyenletet kaptunk: $\sqrt{x} = -\frac{1}{3}$, $\sqrt{x} = -\frac{1}{2}$.

Mivel $\sqrt{x} \geq 0$, ezeknek az egyenleteknek nincs megoldásuk.
F e l e l e t: az egyenletnek nincsenek gyökei.

4. PÉLDA

Oldjuk meg az $\frac{x^2 + 2x}{x - 6} = \frac{5x + 18}{x - 6}$ egyenletet!

Megoldás

Ez az egyenlet ekvivalens az $\begin{cases} x^2 + 2x = 5x + 18, \\ x - 6 \neq 0 \end{cases}$ egyenletrendszerrel.

21. Másodfokúra visszavezethető egyenletek megoldása

Innét

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 18 = 0, \\ x \neq 6; \\ x = -3 \text{ vagy } x = 6, \\ x \neq 6. \end{cases}$$

$$x = -3.$$

F e l e l e t: -3 .

PÉLDA

Oldjuk meg az $\frac{5}{x^2 - 4x + 4} - \frac{4}{x^2 - 4} = \frac{1}{x + 2}$ egyenletet!

Megoldás

Rendezzük az egyenletet: $\frac{5}{(x-2)^2} - \frac{4}{(x-2)(x+2)} - \frac{1}{x+2} = 0$;

$$\frac{5(x+2) - 4(x-2) - (x-2)^2}{(x-2)^2(x+2)} = 0.$$

Ez az egyenlet ekvivalens az alábbi rendszerrel:

$$\begin{cases} 5(x+2) - 4(x-2) - (x-2)^2 = 0, \\ x \neq 2, \\ x \neq -2. \end{cases}$$

Ebből következik, hogy

$$\begin{cases} 5x + 10 - 4x + 8 - x^2 + 4x - 4 = 0, \\ x \neq 2, \\ x \neq -2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 5x - 14 = 0, \\ x \neq 2, \\ x \neq -2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 7 \text{ vagy } x = -2, \\ x \neq 2, \\ x \neq -2. \end{cases}$$

$$x = 7.$$

F e l e l e t: 7 .



Mit nevezünk bikvadartikus egyenletnek?

731.° Oldjátok meg a következő egyenleteket:

- | | |
|--------------------------|----------------------------|
| 1) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0;$ | 4) $x^4 + 14x^2 - 32 = 0;$ |
| 2) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0;$ | 5) $4x^4 - 9x^2 + 2 = 0;$ |
| 3) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0;$ | 6) $3x^4 + 8x^2 - 3 = 0!$ |

732.° Oldjátok meg a következő egyenleteket:

- | | |
|-----------------------------|----------------------------|
| 1) $x^4 - 29x^2 + 100 = 0;$ | 4) $x^4 + 3x^2 - 70 = 0;$ |
| 2) $x^4 - 9x^2 + 20 = 0;$ | 5) $9x^4 - 10x^2 + 1 = 0;$ |
| 3) $x^4 - 2x^2 - 24 = 0;$ | 6) $2x^4 - 5x^2 + 2 = 0!$ |

733.° Oldjátok meg az alábbi egyenleteket:

- | | |
|--|--|
| 1) $\frac{x^2+3x-4}{x+1}=0;$ | 7) $\frac{x^2+4x}{x-5}-\frac{9x+50}{x-5}=0;$ |
| 2) $\frac{x^2-6x-7}{x-7}=0;$ | 8) $\frac{x^2-6x}{x-3}+\frac{15-2x}{x-3}=0;$ |
| 3) $\frac{3x^2-x-2}{1-x}=0;$ | 9) $\frac{x^2-6x}{x-4}=4;$ |
| 4) $\frac{x^2-8}{x+10}=\frac{20}{x+10};$ | 10) $\frac{5x+18}{x-2}=x;$ |
| 5) $\frac{x^2-14}{x+2}=\frac{5x}{x+2};$ | 11) $x+1=\frac{6}{x};$ |
| 6) $\frac{x^2+10x}{x-8}=\frac{12x+48}{x-8};$ | 12) $5-\frac{8}{x^2}=\frac{18}{x}!$ |

734.° Oldjátok meg az alábbi egyenleteket:

- | | |
|--|---|
| 1) $\frac{x^2-5x-6}{x-6}=0;$ | 5) $\frac{x^2+12x}{x+4}-\frac{5x-12}{x+4}=0;$ |
| 2) $\frac{4x^2-7x-2}{x-2}=0;$ | 6) $\frac{x^2-3x}{x+6}=6;$ |
| 3) $\frac{2x^2+6}{x+8}=\frac{13x}{x+8};$ | 7) $\frac{2-33y}{y-4}=7y;$ |
| 4) $\frac{x^2+4x}{x+7}=\frac{5x+56}{x+7};$ | 8) $y-\frac{39}{y}=10!$ |

735.° Oldjátok meg a következő egyenleteket:

- 1) $(x+3)^4 - 3(x+3)^2 - 4 = 0;$
- 2) $(2x+1)^4 - 10(2x+1)^2 + 9 = 0;$
- 3) $(6x-7)^4 + 4(6x-7)^2 + 3 = 0;$
- 4) $(x-4)^4 + 2(x-4)^2 - 8 = 0!$

736.° Oldjátok meg a következő egyenleteket:

- 1) $(3x-1)^4 - 20(3x-1)^2 + 64 = 0;$
- 2) $(2x+3)^4 - 24(2x+3)^2 - 25 = 0!$

737.* Oldjátok meg az alábbi egyenleteket:

- | | |
|--------------------------------|--------------------------------|
| 1) $x - 3\sqrt{x} + 2 = 0$; | 4) $8\sqrt{x} + x + 7 = 0$; |
| 2) $x - \sqrt{x} - 12 = 0$; | 5) $6\sqrt{x} - 27 + x = 0$; |
| 3) $3x - 10\sqrt{x} + 3 = 0$; | 6) $8x - 10\sqrt{x} + 3 = 0$! |

738.* Oldjátok meg az alábbi egyenleteket:

- | | |
|-------------------------------|-------------------------------|
| 1) $x - 6\sqrt{x} + 8 = 0$; | 3) $2x - 3\sqrt{x} + 1 = 0$! |
| 2) $x - 5\sqrt{x} - 50 = 0$; | |

739.* Oldjátok meg a következő egyenleteket:

- | | |
|--|--|
| 1) $\frac{x^2 - 9x + 18}{x^2 - 9} = 0$; | 3) $\frac{x^2 - 12x + 35}{x^2 - 10x + 25} = 0$; |
| 2) $\frac{3x^2 - 14x - 5}{3x^2 + x} = 0$; | 4) $\frac{x^2 - 7x + 6}{x^2 + 2x - 3} = 0$! |

740.* Oldjátok meg a következő egyenleteket:

- | | |
|--|---|
| 1) $\frac{x^2 - 9x - 10}{x^2 - 1} = 0$; | 2) $\frac{x^2 + 5x - 14}{x^2 - 6x + 8} = 0$! |
|--|---|

741.* Oldjátok meg a következő egyenleteket:

- | | |
|--|---|
| 1) $\frac{2y}{y-3} = \frac{3y+3}{y}$; | 3) $\frac{5x+2}{x-1} = \frac{4x+13}{x+7}$; |
| 2) $\frac{3x+4}{x-3} = \frac{2x-9}{x+1}$; | 4) $\frac{2x^2 - 3x + 1}{x-1} = 3x - 4$! |

742.* Határozzátok meg a következő egyenletek gyökeit:

- | | |
|--|--|
| 1) $\frac{2x-13}{x-6} = \frac{x+6}{x}$; | 2) $\frac{3x^2 - 4x - 20}{x+2} = 2x - 5$! |
|--|--|

743.* Határozzátok meg a következő egyenletek gyökeit:

- | | |
|--|--|
| 1) $\frac{10}{x+2} + \frac{9}{x} = 1$; | 6) $\frac{1}{x} - \frac{10}{x^2 - 5x} = \frac{3-x}{x-5}$; |
| 2) $\frac{48}{14-x} - \frac{48}{14+x} = 1$; | 7) $\frac{4x}{x^2 + 4x + 4} - \frac{x-2}{x^2 + 2x} = \frac{1}{x}$; |
| 3) $\frac{x-1}{x+2} + \frac{x}{x-2} = \frac{8}{x^2 - 4}$; | 8) $\frac{6}{x^2 - 36} - \frac{3}{x^2 - 6x} + \frac{x-12}{x^2 + 6x} = 0$; |
| 4) $\frac{x-1}{x+3} + \frac{x+1}{x-3} = \frac{2x+18}{x^2 - 9}$; | 9) $\frac{x}{x+7} + \frac{x+7}{x-7} = \frac{63-5x}{x^2 - 49}$; |
| 5) $\frac{4x-10}{x-1} + \frac{x+6}{x+1} = 4$; | 10) $\frac{4}{x^2 - 10x + 25} - \frac{1}{x+5} = \frac{10}{x^2 - 25}$! |

744. • Oldjátok meg a következő egyenleteket:

$$1) \frac{60}{x} - \frac{60}{x+10} = \frac{1}{5};$$

$$2) \frac{x}{x+2} + \frac{x+2}{x-2} = \frac{16}{x^2-4};$$

$$3) \frac{9}{x+3} + \frac{14}{x-3} = \frac{24}{x};$$

$$4) \frac{2y+3}{2y+2} - \frac{y+1}{2y-2} + \frac{1}{y^2-1} = 0;$$

$$5) \frac{3x}{x^2-10x+25} - \frac{x-3}{x^2-5x} = \frac{1}{x};$$

$$6) \frac{x-20}{x^2+10x} + \frac{10}{x^2-100} - \frac{5}{x^2-10x} = 0!$$

745. • A változó mely értékénél lesz:

$$1) a \frac{24}{x-2} \text{ és a } \frac{16}{x+2} \text{ tört összege } 3;$$

$$2) a \frac{42}{x} \text{ tört értéke } \frac{1}{4}\text{-del több a } \frac{36}{x+20} \text{ tört értékénél?}$$

746. • A változó mely értékénél lesz:

$$1) a \frac{30}{x+3} \text{ tört értéke } \frac{1}{2}\text{-del kevesebb a } \frac{30}{x} \text{ tört értékénél;}$$

$$2) a \frac{20}{x} \text{ tört értéke } 9\text{-cel több a } \frac{20}{x+18} \text{ tört értékénél?}$$

747. •• Oldjátok meg az alábbi egyenleteket:

$$1) \frac{2x-10}{x^3+1} + \frac{4}{x+1} = \frac{5x-1}{x^2-x+1};$$

$$2) \frac{6}{x^2-4x+3} + \frac{5-2x}{x-1} = \frac{3}{x-3};$$

$$3) \frac{4x-6}{x+2} - \frac{x}{x+1} = \frac{14}{x^2+3x+2};$$

$$4) \frac{x}{x^2-4} - \frac{3x-1}{x^2+x-6} = \frac{2}{x^2+5x+6}!$$

748. •• Oldjátok meg a következő egyenleteket:

$$1) \frac{3x+2}{x^2+2x+4} + \frac{x^2+39}{x^3-8} = \frac{5}{x-2};$$

$$2) \frac{x}{x-1} + \frac{x+1}{x+3} = \frac{8}{x^2+2x-3}!$$

749.** Oldjátok meg a következő egyenleteket! Vezessetek be új változót:

1) $(x^2 - 2)^2 - 8(x^2 - 2) + 7 = 0;$

2) $(x^2 + 5x)^2 - 2(x^2 + 5x) - 24 = 0;$

3) $(x^2 - 3x + 1)(x^2 - 3x + 3) = 3;$

4) $(x^2 + 2x + 2)(x^2 + 2x - 4) = -5!$

750.** Oldjátok meg a következő egyenleteket! Vezessetek be új ismeretlent:

1) $\left(\frac{2x-1}{x}\right)^2 - \frac{6(2x-1)}{x} + 5 = 0;$

2) $\frac{3x-1}{x+1} + \frac{x+1}{3x-1} = 3\frac{1}{3}!$

751.** Oldjátok meg az alábbi egyenleteket:

1) $(x^2 - 6x)^2 + (x^2 - 6x) - 56 = 0;$

2) $(x^2 + 8x + 3)(x^2 + 8x + 5) = 63;$

3) $\frac{x^4}{(x-2)^2} - \frac{4x^2}{x-2} - 5 = 0;$

4) $\frac{x+4}{x-3} - \frac{x-3}{x+4} = \frac{3}{2}!$

752.* Oldjátok meg az alábbi egyenleteket! Vegyétek figyelembe, hogy a valós szám:

1) $\frac{x^2 - 8x + 7}{x - a} = 0;$

3) $\frac{x^2 - (3a-2)x + 6a}{x-6} = 0;$

2) $\frac{x-a}{x^2 - 8x + 7} = 0;$

4) $\frac{a(x-a)}{x+3} = 0!$

753.* Az a mely értéke mellett lesz az $\frac{x^2 - ax + 5}{x-1} = 0$ egyenletnek egy gyöke?

ISMÉTLŐ FELADATOK

754. Igaz-e, hogy az

$$(a-1)^2 \left(\frac{1}{a^2-1} + \frac{1}{a^2-2a+1} \right) + \frac{2}{a+1}$$

kifejezés értéke az a bármely értékére pozitív?

755. A $\frac{\sqrt{6}+2}{\sqrt{6}-2} - \frac{\sqrt{6}-2}{\sqrt{6}+2}$ kifejezés értéke racionális vagy irracionális szám?

756. Ábrázoljátok az $y = \begin{cases} -\frac{8}{x^2}, & \text{ha } x < -2, \\ x^2, & \text{ha } x \geq -2 \end{cases}$ függvény grafikonját!

NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREK HASZNÁLATA

757. A számítógép monitorán az 1-gyes számjegy látható. A gép minden másodpercben a monitoron lévő számhoz hozzáadja a szám számjegyeinek összegét. Lehetséges-e hogy bizonyos idő múltán a monitoron a 123 456 789 szám legyen látható?

HA ELKÉSZÜLTÉL A HÁZI FELADATTAL

Egyenletek megoldása új változó bevezetésével

A 21. pontban megismertedtünk az egyenletek megoldásának azzal a módszerével, mikor új változót vezettünk be. Tekintsünk át még néhány példát ennek a módszernek az alkalmazására, melyek igazolják a módszer hatékonyságát.

1. PÉLDA

Oldjuk meg az $\frac{x^2-3x-6}{x} - \frac{8x}{x^2-3x-6} = -2$ egyenletet!

Megoldás

Jelöljük az $\frac{x^2-3x-6}{x}$ kifejezést t -vel, akkor $\frac{8x}{x^2-3x-6} = \frac{8}{t}$. Behelyettesítve az egyenletünk $t - \frac{8}{t} = -2$ alakú lesz, amely ekvivalens a $\begin{cases} t^2 + 2t - 8 = 0, \\ t \neq 0 \end{cases}$ egyenletrendszerrel. Megoldva ezt az egyenletrendszert azt kapjuk, hogy $t_1 = -4$ és $t_2 = 2$.

Tehát az adott egyenlet megoldását visszavezettük két törtes egyenlet megoldására:

$$1) \frac{x^2-3x-6}{x} = -4;$$

$$2) \frac{x^2-3x-6}{x} = 2.$$

Ezeket az egyenleteket oldjátok meg önállóan.

F e l e l e t: $-3; -1; 2; 6$.

2. PÉLDA

Oldjuk meg a $(2x^2 + 3x - 1)^2 - 10x^2 - 15x + 9 = 0$ egyenletet!

Megoldás

Alakítsuk át az egyenletet:

$$(2x^2 + 3x - 1)^2 - 10x^2 - 15x + 5 + 4 = 0;$$

$$(2x^2 + 3x - 1)^2 - 5(2x^2 + 3x - 1) + 4 = 0.$$

Vezessünk be új változót: $2x^2 + 3x - 1 = t$. Ekkor az egyenlet $t^2 - 5t + 4 = 0$ alakban írható fel, melynek megoldása $t_1 = 1$ és $t_2 = 4$.

Vagyis $2x^2 + 3x - 1 = 1$ vagy $2x^2 + 3x - 1 = 4$.

A kapott másodfokú egyenleteket megoldva kapjuk meg az eredeti egyenlet megoldását.

F e l e l e t: $-2; \frac{1}{2}; -\frac{5}{2}; 1$.

3. PÉLDA

Oldjuk meg a $(2x^2 - 3x + 1)(2x^2 + 5x + 1) = 9x^2$ egyenletet!

Megoldás

Könnyen leellenőrizhető, hogy az $x = 0$ érték nem gyöke az adott egyenletnek, ezért osszuk el az egyenlet mindkét oldalát x^2 -tel:

Így az eredeti egyenlettel azonos $\frac{2x^2 - 3x + 1}{x} \cdot \frac{2x^2 + 5x + 1}{x} = 9$ egyenletet kapjuk.

$$\text{Innét } \left(2x - 3 + \frac{1}{x}\right)\left(2x + 5 + \frac{1}{x}\right) = 9.$$

Vezessünk be új változót: $2x + \frac{1}{x} - 3 = t$.

Ekkor $t(t + 8) = 9$. A kapott másodfokú egyenlet gyökei: $t_1 = 1$ és $t_2 = -9$.

Ezeket az értékeket visszahelyettesítve két egyenletet kapunk:

$$1) \quad 2x + \frac{1}{x} - 3 = 1;$$

$$2) \quad 2x + \frac{1}{x} - 3 = -9.$$

Az egyenleteket oldjátok meg önállóan.

F e l e l e t: $\frac{2+\sqrt{2}}{2}, \frac{2-\sqrt{2}}{2}, \frac{-3-\sqrt{7}}{2}, \frac{-3+\sqrt{7}}{2}$.

PÉLDA

Oldjuk meg a $7\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 9$ egyenletet!

Megoldás

Vezessünk be új változót: $x + \frac{1}{x} = t$. Ekkor

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = t^2; \quad x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = t^2; \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2.$$

Az eredeti egyenletbe visszahelyettesítve:

$$7t - 2(t^2 - 2) = 9;$$

$$2t^2 - 7t + 5 = 0.$$

A kapott másodfokú egyenletet megoldva: $t_1 = 1$ és $t_2 = \frac{5}{2}$.

Tehát $x + \frac{1}{x} = 1$ vagy $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$.

Ezeket az egyenleteket oldjátok meg önállóan.

F e l e l e t: $\frac{1}{2}; 2$.

PÉLDA

Oldjuk meg az $(x^2 - 2x + 2)^2 + 3x(x^2 - 2x + 2) = 10x^2$ egyenletet!

Megoldás

Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy az $x = 0$ nem gyöke az egyenletnek. Így az egyenlet felírható

$$\frac{(x^2 - 2x + 2)^2}{x^2} + \frac{3(x^2 - 2x + 2)}{x} = 10$$

alakban, mivel az egyenlet mindkét oldalát elosztottuk x^2 -tel.

Az $\frac{x^2 - 2x + 2}{x} = t$ új változó bevezetésével a

$$t^2 + 3t - 10 = 0$$

másodfokú egyenletet kapjuk.

Fejezzétek be önállóan.

F e l e l e t: $2 - \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2}; -1; -2$.

Ezen példák megoldása közben felmerülhetett bennetek, hogy miért nem alkalmaztunk azonos átalakításokat?

Az igazság az, hogy a kijelölt azonos átalakítások után az $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ alakú egyenletet kapjuk (győződjetek meg róla önállóan). Ha $a \neq 0$, ezeket az egyenleteket **negyedfokú** egyenletnek nevezzük. Ha $a = 0$ és $b \neq 0$, akkor **harmadfokúnak**. Ezen egyenletek részesete a bikvadratikus egyenlet, amikor $b = 0$ és $d = 0$. Ezeket az egyenleteket már meg tudjátok oldani.

Általános esetben a harmadfokú és negyedfokú egyenletek megoldásához ismerni kell a megoldóképletet. A megoldóképlet kivezetésének történetéről olvashatsz a következő értekezésből.

FELADATOK

1. Oldjátok meg a következő egyenleteket:

$$1) \frac{3x^2 - 9x}{2} - \frac{12}{x^2 - 3x} = 3;$$

$$2) \frac{6}{(x+1)(x+2)} + \frac{8}{(x-1)(x+4)} = 1;$$

$$3) x(x+3)(x+5)(x+8) = 100;$$

$$4) (x+2)(x+3)(x+8)(x+12) = 4x^2;$$

$$5) 7\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 9;$$

$$6) 2(x^2 + x + 1)^2 - 7(x - 1)^2 = 13(x^3 - 1);$$

$$7) (x - 6)^4 + (x - 4)^4 = 82!$$

F e l e l e t: 1) $-1; 1; 2; 4$; 2) $-3; 0; \frac{-3 \pm \sqrt{73}}{2}$; 3) $-4 \pm \sqrt{21}$;

4) $-6; -4; \frac{-15 \pm \sqrt{129}}{2}$; 5) $\frac{1}{2}; 2$; 6) $2; 4; -1; -\frac{1}{2}$; 7) $3; 7$.

Scipione del Ferro titkos fegyvere

Könnyen meg tudjátok oldani a következő harmadfokú egyenleteket:

$$x^3 - 8 = 0, \quad x^3 + x^2 = 0, \quad x^3 - x = 0.$$

Ezek az egyenletek részesetei az $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ egyenletnek, ahol x a változó, a, b, c, d valós szám és $a \neq 0$. A harmadfokú

egyenlet megoldóképletének kivezetése nehéz feladat. Nemhiába tekintik a XVI. század egyik kiemelkedő matematikai felfedezésének.

Először Scipione del Ferro (1465–1526) olasz matematikus vezette le az $x^3 + px = q$ egyenletet, ahol p és q pozitív szám. Scipione del Ferro a felfedezését titokban tartotta. Abban a korban egy tudós érvényesülése sokban függött a matematikaversenyeken elért eredményeitől. Ezért volt számára kifizetődő, hogy titokban tartotta felfedezését, mert titkos fegyverként tudta alkalmazni.

Scipione del Ferro halála után egyik tanítványa Fiore, aki ismerte a titkos képletet, kihívta Nikolo Tartagliát, egy velencei számológépmestert (1499–1557) egy tudományos párbajra. Néhány nappal a párbaj előtt Tartaglia is felfedezte a harmadfokú egyenletek megoldásának eljárását és 1535. november 20-án fölényes győzelmet aratott.

Először a titkos képletet Girolamo Cardano (1501–1576) ismert olasz matematikus jelentette meg a *A nagy művészet, avagy az algebrai szabályokról* című könyvében. Ebben a műben találkozunk először a negyedfokú egyenlet megoldási eljárásával is, melyet Ludoviko Ferrari (1522–1565) dolgozott ki.

A XVII – XVIII. századok matematikusai sok energiát fektettek az ötödfokú egyenletek megoldásába. Az elért eredményekhez sokban hozzájárultak Paolo Ruffini (1765–1822) és Niels Henrik Abel (1802–1829) fiatalon elhunyt norvég matematikus. Az eredmény meglepő



Nikolo
Tartaglia



Girolamo
Cardano



Niels Henrik
Abel

volt: bebizonyították, hogy az általános ötödfokú és magasabb fokú egyenletek véges számú algebrai művelettel (összeadás, kivonás, szorzás, osztás és gyökvonás) nem oldhatók meg.

22. A racionális egyenlet, mint a reális problémák matematikai modellje

A 7. pontban már tanultátok a racionális egyenletek alkalmazását a reális problémák megoldására, matematikai modelljére. Nézzünk meg néhány más példát is.

1. PÉLDA

Az A helységről egy kerékpáros indult el, majd 45 perccel később ugyanabba az irányba egy teherautó. A teherautó az A helységről 15 km-re utolérte a kerékpárost. Mekkora átlagsebességgel haladt a kerékpáros és a teherautó, ha a teherautó sebessége 18 km/h-val több volt?

Megoldás

Jelöljük a kerékpáros sebességét x km/h-val, akkor a teherautó sebessége $(x + 18)$ km/h. A kerékpáros a 15 km-es utat $\frac{15}{x}$ óra alatt tette meg, a teherautó $\frac{15}{x+18}$ óra alatt. Mivel a teherautó ezt az utat 45 perccel, $\frac{3}{4}$ órával rövidebb idő alatt tette meg, ezért $\frac{15}{x} - \frac{15}{x+18} = \frac{3}{4}$.

Így:

$$\frac{15}{x} - \frac{15}{x+18} = \frac{3}{4},$$

$$\frac{5}{x} - \frac{5}{x+18} = \frac{1}{4}.$$

3. §. A MÁSODFOKÚ EGYENLET

$$\frac{20x + 360 - 20x - x^2 - 18x}{4x(x+18)} = 0;$$

$$\begin{cases} x^2 + 18x - 360 = 0, \\ x \neq 0, \\ x \neq -18; \end{cases}$$

$$x = 12 \text{ vagy } x = -30.$$

A -30 nem felel meg a feladat feltételeinek.

Tehát a kerekpáros sebessége 12 km/h , a teherautóé pedig $12 + 18 = 30 \text{ (km/h)}$.

F e l e l e t: 12 km/h , 30 km/h .

2. PÉLDA

Az útjavítást 7 órán keresztül egy brigád végezte, majd csatlakozott hozzájuk egy másik brigád. Két óra közös munkával be is fejezték az útkarbantartást. Hány óra alatt végzett volna külön-külön a két brigád az útjavítással, ha az elsőnek 4 órával több időre van szüksége?

Megoldás

Jelöljük x -szel azt az időt, ami alatt az első brigád elkészül az útjavítással, akkor a második brigád $(x - 4)$ óra alatt. 1 óra alatt az első brigád az út $\frac{1}{x}$ -ed részét javítja ki, a második az út $\frac{1}{x-4}$ -ed részét. Az első brigád 9 órát dolgozott, így az út $\frac{9}{x}$ -ed részével végzett, a második brigád 2 órát dolgozott, tehát az út $\frac{2}{x-4}$ -ed részét javította ki. Mivel a munkát közösen fejezték be, így $\frac{9}{x} + \frac{2}{x-4} = 1$.

Az egyenletnek két megoldása van: $x_1 = 12$ és $x_2 = 3$. A második gyök nem felel meg a feladat feltételeinek, mivel akkor a második brigád $x = 3 - 4 = -1$ óra alatt fejezné be a munkát.

Tehát az első brigád 12 óra alatt, a második 8 óra alatt végezné el az útjavítást, ha egyedül dolgozna.

F e l e l e t: 12 óra, 8 óra.

3. PÉLDA

Egy sóoldat 120 gramm vizet tartalmaz. Miután az oldathoz hozzáadtak 10 g sót, az oldat koncentrációja 5%-kal megnőtt. Hány gramm só volt eredetileg az oldatban?

Megoldás

Jelöljük az eredeti oldat sótartalmát x -szel. Akkor az oldat tömege $(x + 120)$ gramm, tehát a töménysége $\frac{x}{x+120}$. Miután az oldathoz 10 g sót adtak, akkor az oldat sótartalma $(x + 10)$, és az oldat tömege $(x + 130)$ gramm, a töménysége pedig $\frac{x+10}{x+130}$. Ez a töménység 5%-kal, azaz $\frac{1}{20}$ -dal több az eredeti oldat töménységénél. Tehát

$$\frac{x+10}{x+130} - \frac{x}{x+120} = \frac{1}{20}.$$

A kapott egyenletnek két gyöke van $x_1 = 30$ és $x_2 = -280$, melyek közül a második nem felel meg a feladat feltételeinek.

Vagyis az eredeti oldatban 30 gramm só volt.

F e l e l e t: 30 g.

- 758.*** Az A és B városok közötti távolság első 150 km-ét egy személygépkocsi meghatározott sebességgel tette meg. Majd a további 240 km-en a sebességét 5 km-rel növelte. Határozzátok meg a személygépkocsi kezdeti sebességét, ha a két város közötti utat a személygépkocsi 5 óra alatt tette meg!
- 759.*** Egy motorkerékpáros a 90 km-es utat 18 perccel rövidebb idő alatt teszi meg, mint egy másik motorkerékpáros, mert a sebessége 10 km/h-val nagyobb. Határozzátok meg a motorkerékpárosok sebességét!
- 760.*** Az egyik helységről a másik helységbe, melyek között a távolság 240 km, egyszerre indult el egy személygépkocsi és egy autóbusz. Az autóbusz átlagsebessége 20 km/h-val kisebb, mint a személygépkocsié, és így 1 órával később érkezett meg. Mekkora a személygépkocsi és az autóbusz átlagsebessége?
- 761.*** Egy vonat 10 perces késését úgy próbálta behozni, hogy az út utolsó 80 km-es szakaszán az átlagsebességét növelte 16 km/h-val. Határozzátok meg a vonat kezdeti sebességét!

- 762.*** A Meggyes és Körtvélyes közötti 15 km-es távolságot egy lovas valamilyen átlagsebességgel tette meg. A visszaúton a sebességét 3 km/h-val növelte, így 15 perccel rövidebb idő alatt ért vissza. Határozzátok meg a lovas kezdeti sebességét!
- 763.*** Egy gépíróőnek meghatározott idő alatt 180 oldalt kellett legépelnie. Ő viszont 5 órával hamarabb végzett a munkával, mert óránként a tervezettnél 3 oldallal többet gépelt le. Hány oldalt gépelt óránként a gépíróő?
- 764.*** Az egyik szivattyú 90 km^3 vizet 1 órával rövidebb idő alatt pumpál át, mint egy másik szivattyú 100 km^3 -t. Mennyi a szivattyúk teljesítménye, ha az első óránként 5 km^3 -rel több vizet pumpál át?
- 765.*** Egy munkásnak 72 alkatrészt kellett meghatározott idő alatt legyártania. Mivel naponta 4 alkatrésszel többet készített, így a munkát a tervezettnél 3 nappal hamarabb fejezte be. Hány nap alatt végzett a feladattal?
- 766.*** Egy sétahajó a folyón lefelé 16 km-t tett meg és felfelé 30 km-t. Az egész út 1 óra 30 percre tartott. Határozzátok meg a hajó átlagsebességét állóvízben, ha a vízfolyás sebessége 1 km/h!
- 767.*** Egy csónak 15 km-t tett meg a folyón lefelé, majd visszafordult. Visszafelé az út 1 órával hosszabb volt. Határozzátok meg a csónak sebességét a folyón lefelé, ha a vízfolyás sebessége 2 km/h!
- 768.*** Az egyik kikötőből a folyón lefelé egy tutaj indult el, majd 4 órával később egy csónak. A csónak a kikötőtől 15 km-re utolérte a tutajt. Határozzátok meg a vízfolyás sebességét, ha a csónak sebessége állóvízben 12 km/h!
- 769.*** Egy sétahajó 4 óra alatt 45 km-t tett meg a folyón lefelé és 28 km-t a folyón felfelé. Határozzátok meg a vízfolyás sebességét, ha a sétahajó sebessége állóvízben 18 km/h!

- 770.* Egy turista az út $\frac{5}{8}$ -át hajón, a többit személygépkocsival tette meg. A személygépkocsi sebessége 20 km/h-val nagyobb a hajó sebességénél. Személygépkocsival 1 óra 30 perccel kevesebbet utazott, mint hajón. Határozzátok meg a személygépkocsi és a hajó átlagsebességét, ha a turista 160 km-t tett meg összesen!
- 771.* A menetrend szerint az autóbussznak 72 km-t kellett megtennie. 24 km megtétele után egy sorompónál az autóbusz 12 perccet várakozott. Hogy tartani tudja a menetrendet, az autóbuszvezető a sebességét 12 km/h-val növelte és így csak 4 perccel késett. Határozzátok meg az autóbusz kezdeti sebességét!
- 772.* Az iskolások egy csoportja turistautat szervezett A városból B városba. Odafele autóbusszal mentek, visszafelé pedig vonaton. Visszafelé az út 30 perccel rövidebb volt. Határozzátok meg a vonat és az autóbusz átlagsebességét, ha a vonat sebessége 20 km/h-val kevesebb a busz átlagsebességénél, és a két város között a műút 160 km, a vasútvonal pedig 150 km!
- 773.* Egy turista kajakkal 4 km-t a tavon és 5 km-t a folyón lefelé ugyanannyi idő alatt tett meg, mint 6 km-t a folyón felfelé. Mekkora sebességgel haladt a kajakos a tavon, ha a vízfolyás sebessége 2 km/h?
- 774.* Egy gőzös 1 óra alatt 16 km-t tett meg a tavon és 18 km-t a tóból eredő folyón. Határozzátok meg a gőzös sebességét állóvízben, ha a folyó sebessége 4 km/h!
- 775.* Egy közönséges tört nevezője 3-mal több a számlálójánál. Ha a tört számlálóját 4-gyel, a nevezőjét pedig 8-cal növeljük, akkor a kapott tört értéke $\frac{1}{6}$ -dal több az eredeti tört értékénél. Határozzátok meg az eredeti törtet!
- 776.* Egy közönséges tört számlálója 5-tel kevesebb a nevezőjénél. Ha a tört számlálóját 3-mal csökkentjük, a nevezőjét pedig 4-gyel növeljük, akkor a kapott tört $\frac{1}{3}$ -dal kisebb az eredeti törtnél. Határozzátok meg az eredeti törtet!

- 777.* Két munkás együtt a kijelölt feladatot 20 nap alatt végzi el. Hány nap alatt készülnének el külön-külön a munkával, ha az egyiküknek 9 nappal több időre van szüksége?
- 778.* Egy épület homlokzatának kifestésére az egyik munkásnak 5 órával több időre volt szüksége, mint egy másik munkásnak. Az egyik munkás 3 órát dolgozott, majd felváltotta őt a másik munkás. Két órával később a homlokzat 40%-a volt kifestve. Hány óra alatt készülne el az egész munkával külön-külön mindkét munkás?
- 779.* Az egyik traktoros 6 órát dolgozott a mezőn. Másik nap besegített neki egy másik traktoros, így 8 órai közös munka után befejezték a szántást. Hány óra alatt szántaná fel külön-külön mindkét traktoros ezt a mezőt, ha az egyiknek erre 3 órával kevesebb időre van szüksége?
- 780.* A 20 gramm sót tartalmazó sóoldathoz 100 g vizet öntöttek, így az oldat töménysége 10%-kal csökkent. Mennyi vizet tartalmazott az oldat eredetileg?
- 781.* Egy 10 kg cinket tartalmazó cink-réz ötvözethez hozzáolvasztottak 10 kg rezet. A kapott ötvözet 5%-kal több rezet tartalmaz, mint az eredeti. Mennyi rezet tartalmazott az eredeti ötvözet?
- 782.** 2 óra 40 perccel később, mint ahogy az A kikötőből elindult egy tutaj, a B kikötőből a folyón felfelé elindult egy motorcsónak. Határozzátok meg a folyóvíz sebességét, ha a tutaj és a motorcsónak az A kikötőtől 14 km-re találkozott! A motorcsónak sebessége állóvízben 12 km/h, és a két kikötő között a távolság 32 km!
- 783.** Egy medencébe két cső vezet. Az egyik csövön keresztül töltik meg a medencét vízzel, a másikon keresztül engedik le a vizet. A víz leengedése 1 órával tovább tart, mint a medence megtöltése. Ha mindkét cső nyitva van, akkor a medence 30 óra alatt telik meg vízzel. Hány óra alatt lehet megtölteni vízzel az üres medencét?

- 784.** Egy medencét három csapon keresztül lehet megtölteni vízzel. Az első csapon keresztül annyi idő alatt telik meg a medence, mint a másik kettőn együtt. Az első csapon keresztül 2 órával gyorsabban telik meg a medence, mint a másodikon és 8 órával hamarabb, mint a harmadikon. Hány óra alatt telne meg a medence az egyes csapokon keresztül?
- 785.** A 400 km-es távolságot egy autóbusz meghatározott átlagsebességgel szeretne volna megtenni. Az első két órában a tervezett sebességgel haladt, de megállt 20 percre pihenni. Ahhoz, hogy idejében megérkezzen, az út hátralévő részén 10 km/h-val nagyobb sebességgel haladt. Mekkora volt az autóbusz tervezett sebessége?
- 786.** Egy munkásnak meghatározott idő alatt 360 alkatrészt kell legyártania. Az első öt napban a tervnek megfelelően dolgozott, majd naponta 4 alkatrésszel növelte termelését, így a határidőre 372 alkatrészt készített el. Hány alkatrészt kellett elkészítenie naponta a terv szerint?
- 787.* Egy meghatározott feladatot az egyik munkás 12 órával gyorsabban fejez be, mint egy másik, és 4 órával később, mintha együtt dolgoznának. Hány óra alatt végzi el a kijelölt munkát az első munkás?

ISMÉTLŐ FELADATOK

788. Számítsátok ki:
- 1) $(27 \cdot 3^{-4})^2$; 2) $\frac{7^{-4} \cdot 7^{-9}}{7^{-12}}$; 3) $(10^9)^2 \cdot 1000^{-6}$!
789. Határozzátok meg az $a^2 - 2\sqrt{5a} + 2$ kifejezés értékét, ha $a = \sqrt{5} - 3$!
790. Ábrázoljátok az $y = -2x + 4$ függvény grafikonját!
- 1) Mi a függvény zérushelye?
- 2) Határozzátok meg x azon értékeit, melyeknél $y > 0$!
- 3) Rajta van-e az $M(-36; 68)$ pont a függvény grafikonján?
791. A k mely értéke mellett illeszkedik az $A(-\sqrt{12}; \sqrt{3})$ pont az $y = \frac{k}{x}$ függvény grafikonjához? Rajzoljátok meg a grafikont!

3. §. A MÁSODFOKÚ EGYENLET

792. Az alábbi egyenlőségek közül melyik igaz? A válaszokat indokoljátok meg!

$$\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} = \sqrt{3}-2 \quad \text{vagy} \quad \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} = 2-\sqrt{3}.$$

793. Egyszerűsítetek az alábbi kifejezéseket:

$$1) \left(\frac{1}{4}a^{-1}b^{-3}\right)^{-2}; \quad 2) \left(\frac{a^4}{b^{-5}}\right)^3; \quad 3) (0,2a^{-1}b^2)^2 \cdot 4a^5b^{-4}!$$

NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREK HASZNÁLATA

794. Egy tányéron 9 különböző tömegű sajtdarab van. Bizonyítsátok be, hogy az egyik darabot ketté lehet osztani úgy, hogy a kapott sajtdarabokat két tányérra rakva azokon egyenlő tömegű sajt legyen!

ELLENŐRIZZÉTEK MAGATOKATI 6. SZ. TESZTFELADAT

- Határozzátok meg az $5x^2 - x - 6$ másodfokú polinom gyökeit!
A) 2; -0,6; B) -2; 0,6; C) 1; -1,2; D) -1; 1,2.
- Alakítsátok szorzattá a $-x^2 - 4x + 5$ polinomot!
A) $(x-1)(x+5)$; C) $-(x-1)(x+5)$;
B) $(x+1)(x-5)$; D) $-(x+1)(x-5)$.
- Egyszerűsítetek az $\frac{x^2+7x+12}{x^2+x-6}$ törtet!
A) $\frac{x+4}{x-2}$; B) $\frac{x-4}{x-2}$; C) $\frac{x+4}{x+2}$; D) $\frac{x-4}{x+2}$.
- Oldjátok meg az $x^4 + 7x^2 - 18 = 0$ egyenletet!
A) -3; 3; B) $-\sqrt{2}$; 2; C) -3; $\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}$; 3; D) $\sqrt{2}$; 3.
- Határozzátok meg az $(x^2 - 4x)^2 - 2(x^2 - 4x) - 15 = 0$ egyenlet gyökeit!
A) -1; 1; 3; 5; B) -1; 5; C) 1; 3; D) 1; 3; 5.
- Oldjátok meg az $x - \sqrt{x} - 12 = 0$ egyenletet!
A) -3; 4; B) -2; 2; C) 16; D) 9; 16.

7. Oldjátok meg az $\frac{x^2-6}{x-3} = \frac{x}{x-3}$ egyenletet!

- A) -2; B) 3; C) -2; 3; D) -3; 2.

8. Oldjátok meg a $\frac{3x-1}{x} - \frac{4}{x-2} = \frac{10-9x}{x^2-2x}$ egyenletet!

- A) $-\frac{4}{3}$; 2; B) $\frac{4}{3}$; -2; C) $-\frac{4}{3}$; D) 2.

9. Az egyik városból a másikba, melyek között a távolság 350 km, egyszerre és egy irányba elindult egy teherautó és egy személygépkocsi. A tehergépkocsi átlagsebessége 20 km/h kisebb a személygépkocsi sebességénél, így 2 órával később érkezik meg. Jelöljük x km/h-val a teherautó sebességét, akkor az alábbi egyenletek közül melyik a feladat matematikai modellje?

A) $\frac{350}{x} - \frac{350}{x+20} = 2$; C) $\frac{350}{x+20} - \frac{350}{x} = 2$;

B) $\frac{350}{x} + \frac{350}{x+20} = 2$; D) $\frac{350}{x} - \frac{350}{x-20} = 2$.

10. Egy gőzös 30 km-t tett meg folyón lefelé, majd visszafordult. Oda-vissza az utat 3 óra 10 perc alatt tette meg. A vízfolyás sebessége 1 km/h. Jelöljük a gőzös sebességét állóvízben x km/h-val. Az alábbi egyenletek közül melyik felel meg a feladat feltételeinek?

A) $\frac{30}{x+1} + \frac{30}{x-1} = 3,1$; C) $\frac{30}{x+1} + \frac{30}{x} = 3\frac{1}{6}$;

B) $\frac{30}{x+1} - \frac{30}{x-1} = 3,1$; D) $\frac{30}{x+1} + \frac{30}{x-1} = 3\frac{1}{6}$.

11. Egy munkásnak meghatározott idő alatt 96 alkatrészt kellett legyártania. Mivel naponta a tervezettnél 2-vel több alkatrészt készített, így a munkát 3 nappal hamarabb fejezte be. Jelöljük x -szel a munkás napi termelékenységét. Az alábbi egyenletek közül melyik felel meg a feladat feltételeinek?

A) $\frac{96}{x} - \frac{96}{x-2} = 3$; C) $\frac{96}{x} - \frac{96}{x-3} = 2$;

B) $\frac{96}{x-2} - \frac{96}{x} = 3$; D) $\frac{96}{x-3} - \frac{96}{x} = 2$.

3. §. A MÁSODFOKÚ EGYENLET

12. Két munkás együtt 10 óra alatt készül el a kijelölt feladattal. Ugyanezt a munkát egyedül, az egyik munkás 15 órával hamarabb végzi el.

Jelöljük x órával azt az időt, ami alatt az egyik munkás egyedül elvégzi a kijelölt feladatot, akkor az alábbi egyenletek közül melyik lesz az adott probléma matematikai modellje?

A) $\frac{15}{x} + \frac{15}{10-x} = 1;$

C) $\frac{10}{x} + \frac{10}{x+15} = 1;$

B) $\frac{15}{x} + \frac{15}{x-10} = 1;$

D) $\frac{10}{x} + \frac{10}{x-15} = 1.$

ÖSSZEFOGLALÁS

Ebben a fejezetben

- az alábbi kifejezéseket vezettük be:
 - elsőfokú egyenlet;
 - másodfokú egyenlet;
 - a másodfokú egyenlet együtthatói;
 - hiányos másodfokú egyenlet;
 - redukált másodfokú egyenlet;
 - a másodfokú egyenlet diszkriminánsa;
 - másodfokú polinom;
 - a másodfokú polinom gyökei;
 - a másodfokú polinom diszkriminánsa;
 - bikvadratikus egyenlet;
- elsajátítottatok:
 - a hiányos másodfokú egyenlet megoldását;
 - másodfokú egyenletek megoldóképletét, gyökképletét;
 - Viete tételének alkalmazását;
 - a nemnegatív diszkriminánsú másodfokú polinomok szorzattá alakítását;
 - másodfokúra visszavezethető racionális egyenletek megoldását;
 - az egyenletek megoldására az új változó bevezetésének módszerét;
- megtanultatok:
 - a hiányos másodfokú egyenletek megoldásának algoritmusát;
 - a másodfokú egyenletek megoldóképletét;
 - Viete tételét és annak megfordítását;
 - a másodfokú polinomok szorzattá alakítását.

Ismétlő feladatok a 8. osztály tananyagához

795. Határozzátok meg az alábbi kifejezések értékét:

1) $\frac{3m-n}{m+2n}$, ha $m = -4$, $n = 3$;

2) $\frac{a^2-2a}{4a+2}$, ha $a = -0,8$!

796. A változó mely értékeire vannak értelmezve az alábbi kifejezések:

1) $7b - 11$;

8) $\frac{x-2}{|x|+7}$;

2) $\frac{9}{x}$;

9) $\frac{4}{x^2-25}$;

3) $\frac{5}{2-y}$;

10) $\frac{3}{|x|-5}$;

4) $\frac{m-3}{7}$;

11) $\frac{x}{8+\frac{4}{x}}$;

5) $\frac{3+t}{4-t}$;

12) $\frac{5}{6-\frac{2}{x}}$;

6) $\frac{2x}{x-1} - \frac{3}{x-6}$;

13) $\frac{1}{(x-3)(x-4)}$;

7) $\frac{5}{x^8+3}$;

14) $\frac{x+8}{(x+8)(x-3)}$?

797. Egyszerűsítsétek a következő kifejezéseket:

1) $(5x - 7y)(5x + 7y) + (7x - 5y)(7x + 5y)$;

2) $(x + 4)^2 - (x - 2)(x + 2)$;

3) $(8a - 3b)(8a + 3b) - (6a - 5b)^2$;

4) $(m - 3)(m + 4) - (m + 2)^2 + (4 - m)(m + 4)$;

5) $0,4a(5a - 1)(5a + 1) - 0,5(5 - 2a)^2 + 0,3(3 + 2a) \times (3 - 2a)$!

798. Írjátok fel az alábbi hányadosokat tört alakban, majd egyszerűsítsétek a kapott törteket:

1) $4mn^2p : (28m^2np^6)$;

2) $-30x^5y^3 : (36x^4y^8)$;

3) $-63xy^9 : (-72xy^7)$!

799. Egyszerűsítsék az alábbi törteket:

1) $\frac{3x-6y}{3x}$;

7) $\frac{a^3+64}{3a+12}$;

2) $\frac{3a+9b}{4a+12b}$;

8) $\frac{xb-5y+5b-xy}{x^2-25}$;

3) $\frac{a^2-49}{3a+21}$;

9) $\frac{7m^2-7m+7}{14m^3+14}$;

4) $\frac{12x^2-4x}{2-6x}$;

10) $\frac{a^2+bc-b^2+ac}{ab+c^2+ac-b^2}$;

5) $\frac{x^2-9}{x^2+6x+9}$;

11) $\frac{20mn^2-20m^2n+5m^3}{10mn-5m^2}$;

6) $\frac{b^7+b^4}{b^2+b^5}$;

12) $\frac{x^2-yz+xz-y^2}{x^2+yz-xz-y^2}$!

800. Határozzátok meg az alábbi kifejezések értékét:

1) $\frac{x^5y^7-x^3y^9}{x^3y^7}$, ha $x = -0,2$, $y = 0,5$;

2) $\frac{4a^2-36}{5a^2-30a+45}$, ha $a = 2$;

3) $\frac{(3a+3b)^2}{3a^2-3b^2}$, ha $a = \frac{1}{3}$, $b = -\frac{1}{6}$;

4) $\frac{20x^2-140xy+245y^2}{4x-14y}$, ha $2x - 7y = -0,5$!

801. Egyszerűsítsék az alábbi kifejezéseket (n természetes szám):

1) $\frac{100^n}{2^{2n+3} \cdot 5^{2n+1}}$;

4) $\frac{18^n}{3^{2n+2} \cdot 2^{n+3}}$;

2) $\frac{2^{2n+1} \cdot 7^{n+1}}{6 \cdot 28^n}$;

5) $\frac{41 \cdot 9^n}{9^{n+2} + 9^n}$!

3) $\frac{5^{n+1} - 5^n}{2 \cdot 5^n}$;

802. Oldjátok meg a következő egyenleteket:

1) $(a+2)x = 7$;

3) $(a+3)x = a^2 + 6a + 9$;

2) $(a+6)x = a+6$;

4) $(a^2-4)x = a-2$!

803. Az alábbi kifejezéseket adjátok meg tört alakban:

1) $\frac{7a}{22} + \frac{4a}{22}$;

3) $\frac{7x-2y}{15p} + \frac{3x+7y}{15p}$;

2) $\frac{8x}{3y} - \frac{5x}{3y}$;

4) $\frac{x+y}{9p} - \frac{x}{9p}$;

$$5) \frac{a}{8} - \frac{a-b}{8};$$

$$8) \frac{x-y}{8} + \frac{x+y}{8};$$

$$6) \frac{7p-17}{5k} + \frac{7-2p}{5k};$$

$$9) \frac{10x-6}{x} - \frac{4x+11}{x};$$

$$7) \frac{6a^2-4a}{15a} - \frac{a^2+a}{15a};$$

804. Egyszerűsítsétek az alábbi kifejezéseket:

$$1) \frac{7y}{y^2-4} - \frac{14}{y^2-4};$$

$$5) \frac{(3a-1)^2}{4a-4} + \frac{(a-3)^2}{4-4a};$$

$$2) \frac{y^2-3y}{25-y^2} - \frac{7y-25}{25-y^2};$$

$$6) \frac{x^2-3x}{(2-x)^2} - \frac{x-4}{(x-2)^2};$$

$$3) \frac{9p+5}{3p+6} - \frac{10p-12}{3p+6} + \frac{9p-1}{3p+6};$$

$$7) \frac{7}{a-2} - \frac{b}{2-a};$$

$$4) \frac{7x+5}{3-x} + \frac{5x+11}{x-3};$$

$$8) \frac{6a}{5-a} - \frac{4a}{a-5};$$

805. Végezzétek el az alábbi összeadásokat és kivonásokat:

$$1) \frac{8}{x} - \frac{5}{y};$$

$$3) \frac{5}{24xy} - \frac{7}{18xy};$$

$$2) \frac{7}{ab} + \frac{5}{b};$$

$$4) \frac{5b^2-8b+1}{a^2b^2} - \frac{2b-1}{a^2b};$$

806. Végezzétek el a kijelölt műveleteket:

$$1) \frac{2a-1}{a-4} - \frac{3a+2}{2(a-4)};$$

$$2) \frac{x+2}{3x+9} - \frac{4-x}{5x+15};$$

$$3) \frac{m+1}{m-3} - \frac{m+2}{m+3};$$

$$4) \frac{x}{x+y} - \frac{2y^2}{y^2-x^2} - \frac{y}{x-y};$$

$$5) \frac{m}{3m-2n} - \frac{3m^2-3mn}{9m^2-12m+4n^2};$$

$$6) \frac{a+3}{a^2-2a} - \frac{a-2}{5a-10} + \frac{a+2}{5a};$$

$$7) \frac{3}{3a-3} - \frac{a-1}{2a^2-4a+2};$$

$$8) 2 - \frac{14}{m-2} - m;$$

$$9) \frac{2x+1}{x^2-6x+9} - \frac{8}{x^2-9} - \frac{2x-1}{x^2+6x+9} !$$

807. Igazoljátok a

$$\frac{2}{(b-c)(c-a)} - \frac{2}{(a-b)(c-b)} + \frac{2}{(a-c)(b-a)} = 0$$

azonosságot!

808. Írjátok fel az alábbi törteteket egy egész és egy törtkifejezés összegeként:

$$1) \frac{a-7}{a}; \quad 2) \frac{a^2+2a-2}{a+2}; \quad 3) \frac{x^2+3x-2}{x-3} !$$

809. Ismeretes, hogy $\frac{x}{y} = 4$. Határozzátok meg az alábbi kifejezések értékét:

$$1) \frac{x+y}{x}; \quad 2) \frac{3x+4y}{x} !$$

810. Határozzátok meg az n azon természetes értékeit, melyekre az alábbi kifejezések értéke is természetes szám:

$$1) \frac{12n^2-5n+33}{n}; \quad 3) \frac{10-4n}{n};$$

$$2) \frac{n^3-6n^2+54}{n^2}; \quad 4) \frac{12-3n}{n} !$$

811. Az alábbi egyenlőségekből fejezd ki az x változót:

$$1) x + \frac{a}{b} = 1; \quad 2) \frac{1}{x} + \frac{1}{a} = b; \quad 3) \frac{a}{b} + \frac{x}{4} = \frac{b}{a} !$$

812. Igazoljátok az alábbi azonosságokat:

$$1) \frac{1}{a^2+12a+36} + \frac{2}{36-a^2} + \frac{1}{a^2-12a+36} = \frac{144}{(a^2-36)^2};$$

$$2) \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} = 1 !$$

813.* Egyszerűsítsétek az

$$\frac{1}{a(a+3)} + \frac{1}{(a+3)(a+6)} + \frac{1}{(a+6)(a+9)} + \frac{1}{(a+9)(a+12)}$$

kifejezést!

814.* Bizonyítsátok be, hogy ha $\frac{a+b+c}{a+b-c} = \frac{a-b+c}{a-b-c}$, akkor $b = 0$ vagy $c = 0$!

815. Végezzétek el az alábbi szorzásokat:

$$1) \frac{9x}{y} \cdot \frac{y}{24x}; \quad 3) \frac{16a^4}{21b^3} \cdot \frac{9b^2}{10a^3};$$

$$2) \frac{m^2n^3}{25t} \cdot \left(\frac{-5t}{mn^2} \right); \quad 4) 26m^2 \cdot \frac{3n^2}{13m^4};$$

$$5) \frac{24u^7}{16u^3} \cdot 34u^5;$$

$$6) \frac{4x^5y^2}{7a^3b} \cdot \frac{21xb^2}{10y^3a^2} \cdot \frac{25a^5y}{3x^4b} !$$

816. Végezzétek el az alábbi szorzásokat:

$$1) \frac{2xy - y^2}{9} \cdot \frac{36}{y^4};$$

$$3) \frac{m^3 - 64}{m^3 - 9m^2} \cdot \frac{m^2 - 81}{m^2 + 8m};$$

$$2) \frac{a^2 - 7ab}{a^2 + 2ab} \cdot \frac{a^2b + 2ab^2}{a^3 - 7a^2b};$$

$$4) \frac{2x^2 - 16x + 32}{3x^2 - 6x + 12} \cdot \frac{x^3 + 8}{4x^2 - 64} !$$

817. Adjátok meg tört alakban az alábbi kifejezéseket! Végezzétek el a hatványra emelést:

$$1) \left(\frac{a^5}{x^4} \right)^2;$$

$$3) \left(-\frac{10x^2y^5}{3a^4b^3} \right)^3;$$

$$2) \left(-\frac{4y}{3m^2} \right)^4;$$

$$4) \left(-\frac{2a^4b^4}{25x^5} \right)^2 \cdot \left(-\frac{5x^2}{4a^2b^3} \right)^3 !$$

818. Végezzétek el az alábbi osztásokat:

$$1) \frac{x^2 - 10x + 25}{x^2 - 100} : \frac{x - 5}{x - 10};$$

$$2) \frac{a^2 - 1}{a - 8} : \frac{a^2 + 2a + 1}{a - 8};$$

$$3) \frac{ab + b^2}{8b} : \frac{ab + a^2}{2a};$$

$$4) \frac{2c - 3}{c - 1} : (2c - 3);$$

$$5) \frac{x^2 - 16y^2}{25x^2 - 4y^2} : \frac{x^2 + 8xy + 16y^2}{25x^2 + 20xy + 4y^2};$$

$$6) \frac{n^2 - 3n}{49n^2 - 1} : \frac{n^4 - 27n}{49n^2 - 14n + 1};$$

$$7) \frac{m^{12} - n^{15}}{2m^{10} - 8n^{14}} : \frac{5m^8 + 5m^4n^5 + 5n^{10}}{3m^5 + 6n^7};$$

$$8) \frac{5a^2 - 20ab}{3a^2 + b^2} : \frac{30(a - 4b)^2}{9a^4 - b^4} !$$

819. Tudjuk, hogy az alábbi törtek egyszerűsíthetetlenek. Helyettesítsétek az x és y változókat olyan egytagú kifejezéssel, hogy az alábbi egyenlőségek azonosságok legyenek:

$$1) \frac{x}{7a^2b^3} \cdot \frac{y}{4c} = \frac{6a^3c^2}{b};$$

$$2) \frac{36m^2n^4}{x} \cdot \frac{y}{35p^6} = \frac{21n}{5mp^3} !$$

820. Ismeretes, hogy $3x - \frac{1}{x} = 8$. Határozzátok meg a $9x^2 + \frac{1}{x^2}$ kifejezés értékét!

821. Ismeretes, hogy $4x^2 + \frac{1}{x^2} = 6$. Határozzátok meg a $2x - \frac{1}{x}$ kifejezés értékét!

822. Egyszerűsítsétek az alábbi kifejezéseket:

- 1) $\frac{x^{3k}}{y^{2n}} : \frac{x^{6k}}{y^{3n}}$, ha k és n is egész szám;
- 2) $\frac{a^{k+5} \cdot b^{k+3}}{c^{3k+2}} : \frac{a^{k+3} \cdot b^{k+2}}{c^{2k+1}}$, ha k egész szám;
- 3) $\frac{(x'' + 3y'')^2 - 12x''y''}{x^{3''} + 27y^{3''}} : \frac{x^{2''} - 9y^{2''}}{(x'' - 3y'')^2 + 12x''y''}$, ha n egész szám!

823. Egyszerűsítsétek az alábbi kifejezéseket:

- 1) $\left(\frac{a+4}{a-1} - \frac{a-4}{a+4}\right) \cdot \frac{16-a^2}{32a^3}$;
- 2) $\left(7x - \frac{4x}{x-3}\right) : \frac{14x-50}{3x-9}$;
- 3) $\frac{2a}{a-2} + \frac{a+7}{8-4a} \cdot \frac{32}{7a+a^2}$;
- 4) $\left(\frac{9c}{c-8} + \frac{7c}{c^2-16c+64}\right) : \frac{9c-65}{c^2-64} - \frac{8c+64}{c-8}$;
- 5) $\left(\frac{a^2}{a+b} - \frac{a^3}{a^2+ab+b^2}\right) : \left(\frac{a}{a-b} - \frac{a^2}{a^2-b^2}\right)$;
- 6) $\left(\frac{b}{b+6} + \frac{36+b^2}{36-b^2} - \frac{b}{b-6}\right) : \frac{6b+b^2}{(6-b)^2}$;
- 7) $\left(\frac{2x}{x^3+1} : \frac{1-x}{x^2-x+1} + \frac{2}{x-1}\right) \cdot \frac{x^2-2x+1}{4} : \frac{x-1}{x+1}$!

824. Igazoljátok, hogy a változók megengedett értékeire az

$$\left(\frac{1}{(a-3)^2} - \frac{6}{9-a^2} + \frac{1}{(a+3)^2}\right) : \frac{4(2a^2-9)}{81-a^4} - \frac{2a^2}{9-a^2}$$

kifejezés értéke állandó!

825. Egyszerűsítsétek a következő emeletes törteket:

- 1) $\frac{a + \frac{25}{a+10}}{\frac{25}{a} - a}$;
- 2) $1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{a+1}}}$!

826. Oldjátok meg az alábbi egyenleteket:

- 1) $\frac{2x+6}{x+3} = 2$;
- 2) $\frac{x^2-16}{x+4} = -8$;

$$3) \frac{2x-9}{2x+5} + \frac{3x}{3x-2} = 2; \quad 4) \frac{5x^2+8}{x^2-16} = \frac{2x-1}{x+4} - \frac{3x-1}{4-x} !$$

827. Oldjátok meg az alábbi egyenleteket:

$$1) \frac{x+2}{x+a} = 0; \quad 2) \frac{x-a}{x-1} = 0 !$$

828. Határozzátok meg a következő kifejezések értékét:

$$1) 2^{-3} + 4^{-2}; \quad 3) \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2;$$

$$2) \left(\frac{3}{5}\right)^{-2} + (-1,8)^0 \div 5^{-1}; \quad 4) 2^{-3} - 6^{-1} + 3^{-2}!$$

829. Az alábbi törtet írjátok fel olyan alakban, melyben nincs se negatív se nulla hatványkitevő:

$$1) \frac{3x^{-8}y^5z^{-12}}{7a^0b^{-3}c^4}; \quad 2) \frac{1,001^0 m^{-15} n^{-7} p^{-4}}{2^{-3} a^{-11} b^{16} c^{-22}} !$$

830. Az alábbi kifejezéseket írjátok fel hatványalakban vagy hatványok szorzataként:

$$\begin{array}{ll} 1) a^{-7} \cdot a^{10}; & 9) (a^{-12})^{-2}; \\ 2) a^{-9} \cdot a^5; & 10) (a^{-3})^4 : (a^{-2})^5 : (a^{-1})^{-7}; \\ 3) b^{17} \cdot b^{-4} \cdot b^{-11}; & 11) (m^{-3}n^4p^7)^{-4}; \\ 4) x^{-2} : x^3; & 12) (a^{-1}b^{-2})^{-3}; \\ 5) a^{12} : a^4; & 13) (x^3y^{-4})^5 \cdot (x^{-2}y^{-3})^3; \end{array}$$

$$6) a^{-7} : a^{-11}; \quad 14) \left(\frac{a^{11}b^{-7}}{c^{-3}d^4}\right)^{-3};$$

$$7) a^{-12} : a^{-10} \cdot a^4; \quad 15) \left(\frac{a^{-7}}{b^5}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{a^4}{b^{-7}}\right)^{-5} !$$

$$8) (a^3)^{-5};$$

831. Határozzátok meg a következő kifejezések értékét:

$$\begin{array}{ll} 1) 11^{-23} \cdot 11^{25}; & 4) 10^{-15} : 10^{-14} \cdot 10^{-2}; \\ 2) 3^{17} \cdot 3^{-14}; & 5) (14^{-10})^5 \cdot (14^{-6})^{-8}; \end{array}$$

$$3) 4^{-16} : 4^{-12}; \quad 6) \frac{3^{-12} \cdot (3^{-6})^{-3}}{(3^{-3})^{-4} \cdot (3^{-4})^2} !$$

832. Határozzátok meg az alábbi kifejezések értékét:

$$1) 25^{-3} \cdot 5^8; \quad 4) \frac{(-27)^{-12} \cdot 9^5}{81^{-4} \cdot 3^{-7}};$$

$$2) 64^{-3} : 32^{-3}; \quad 5) \frac{15^4 \cdot 5^{-6}}{45^{-3} \cdot 3^9};$$

$$3) 10^{-10} : 1000^{-3} \cdot (0,001)^{-5}; \quad 6) \frac{(0,125)^{-8} \cdot 16^{-7}}{32^{-2}} !$$

833. Egyszerűsítsétek a következő kifejezéseket:

- 1) $\frac{3}{5}x^{-3}y^5 \cdot \frac{5}{9}x^4y^{-7}$;
- 2) $0,2a^{12}b^{-9} \cdot 50a^{-10}b^{10}$;
- 3) $-0,3a^{10}b^7 \cdot 5a^8b^6$;
- 4) $0,36a^{-5}b^6c^3 \cdot \left(-2\frac{2}{9}\right)a^4b^{-4}c^{-5}$;
- 5) $2x^7 \cdot (-3x^{-2}y^3)^3$;
- 6) $(a^2b^9)^{-3} \cdot (-2a^4b^{10})$;
- 7) $(-5a^{-3}b^2c^{-2})^{-2} \cdot (0,1a^2b^{-3}c)^{-3}$;
- 8) $0,1m^{-5}n^4 \cdot (0,01m^{-3}n)^{-2}$;
- 9) $-6\frac{1}{4}a^{-7}b^4 \cdot \left(\frac{5}{2}a^{-2}b^2\right)^{-3}$;
- 10) $-(4a^{-4}b^3)^{-2} \cdot \left(-\frac{1}{8}a^3b^{-1}\right)^{-3}$;
- 11) $\frac{19a^{-15}}{33b^{-14}} \cdot \frac{11b^{-11}}{76a^{-17}}$;
- 12) $\left(\frac{9x^{-3}}{5y^{-2}}\right)^{-2} \cdot (27x^{-2}y^4)^2$!

834. Egyszerűsítsétek a következő kifejezéseket:

- 1) $(a^{-5} - 1)(a^{-5} + 1) - (a^{-5} - 2)^2$;
- 2) $\frac{y^{-2} - x^{-2}}{x + y}$;
- 3) $\frac{a^{-3} - 3b^{-6}}{a^{-6} - 2a^{-3}b^{-6} + b^{-12}} - \frac{a^{-3} + 3b^{-6}}{a^{-6} - b^{-12}}$;
- 4) $\frac{m^{-4} + n^{-4}}{n^{-10}} : \frac{m^{-4}n^{-6} + n^{-10}}{n^{-2}}$;
- 5) $\frac{x^{-2}}{x^{-2} - y^{-2}} : \left(\frac{x^{-2}}{x^{-2} - y^{-2}} - \frac{x^{-2} + y^{-2}}{x^{-2}}\right)$;
- 6) $\frac{x^{-10} - 4}{x^{-5}} \cdot \frac{1}{x^{-5} + 2} - \frac{x^{-5} + 2}{x^{-5}}$;
- 7) $\left(\frac{4c^{-6}}{c^{-6} + 1} - \frac{c^{-6}}{c^{-12} + 2c^{-6} + 1}\right) : \frac{4c^{-6} + 3}{c^{-12} - 1} + \frac{2c^{-6}}{c^{-6} + 1}$!

835. Végezzétek el a kijelölt műveleteket! Adjátok meg az eredményt normálalakban:

1) $1,3 \cdot 10^4 + 1,8 \cdot 10^5$; 3) $5,6 \cdot 10^3 - 3,2 \cdot 10^2$;

2) $1,5 \cdot 10^2 - 2,8 \cdot 10^{-2}$; 4) $4,8 \cdot 10^{-3} + 6 \cdot 10^{-4}$!

836. Egyszerűsítsétek a következő törteket (n egész szám):

1) $\frac{9^{n-1}}{3^{2n-3}}$;

5) $\frac{a^{-3} + a^{-2} + a^{-1}}{a^3 + a^2 + a}$;

2) $\frac{7^{n+1} \cdot 2^{n-1}}{14^n}$;

6) $\frac{6^{n+2} - 6^n}{35}$;

3) $\frac{2^{2n-1} \cdot 3^{n+1}}{12^n}$;

7) $\frac{5^{n+2} - 5^{n-2}}{5^n}$;

4) $\frac{a^6 + a^{11}}{a^{-4} + a}$;

8) $\frac{2^{-n} + 1}{2^n + 1}$!

837. Az $y = -\frac{24}{x}$ képlettel megadott függvényre határozzátok meg:

1) a függvény helyettesítési értékeit a -4 ; 8 ; $1,2$ argumentum helyen;

2) azon argumentum értéket, melynél a függvényérték 24 ; -18 ; 60 !

838. Az $y = \frac{6}{x}$ képlettel megadott függvényre határozzátok meg:

1) a függvény helyettesítési értékeit a 2 ; $-1,5$; 4 argumentum helyen;

2) azon argumentum értéket, melynél a függvényérték -2 ; 3 ; $-4,5$;

3) azon argumentum értékeket, melyeknél a függvényérték negatív!

839. Ábrázoljátok az $y = \frac{5}{|x|}$ függvény grafikonját!

840. Közös koordináta-rendszerben rajzoljátok meg az $y = \frac{4}{x}$ és $y = x - 3$ függvények grafikonját! Olvassátok le a metszéspontok koordinátáit!

841. Határozzátok meg a p értékét, ha ismert, hogy az alábbi pontok rajta vannak az $y = \frac{p}{x}$ függvény grafikonján: 1) $A(-3; 2)$; 2)

$B(-\frac{1}{7}; 3)$; 3) $C(-0,4; 1,6)$!

842. Ábrázoljátok a következő függvények grafikonját:

$$1) y = \begin{cases} -\frac{12}{x}, & \text{ha } x \leq -3, \\ 1 - x, & \text{ha } x > -3; \end{cases}$$

$$2) y = \begin{cases} 3x - 1, & \text{ha } x < 2, \\ \frac{10}{x}, & \text{ha } 2 \leq x < 5, \\ x - 3, & \text{ha } x \geq 5. \end{cases}$$

843. Ábrázoljátok a következő függvények grafikonját:

$$1) y = \frac{4x + 12}{x^2 + 3x};$$

$$2) y = \frac{32 - 2x^2}{x^3 - 16x} !$$

844. Határozzátok meg a következő kifejezések értékét:

$$1) 0,4\sqrt{625} - \frac{1}{4}\sqrt{144};$$

$$4) \sqrt{1\frac{11}{25}} + \sqrt{3\frac{6}{25}} - 0,04\sqrt{10\,000};$$

$$2) \sqrt{64} \cdot \sqrt{0,25} + \sqrt{2^4 + 9};$$

$$5) \frac{1}{5}\sqrt{625} - \frac{3}{17}\sqrt{289} !$$

$$3) 3\sqrt{0,25} - \sqrt{7^2 + 24^2};$$

845. Határozzátok meg a következő kifejezések értékét:

$$1) (\sqrt{3})^2 - \sqrt{1,69};$$

$$2) (3\sqrt{15})^2 - (15\sqrt{3})^2;$$

$$3) 50 \cdot \left(-\frac{1}{5}\sqrt{7}\right)^2 - \frac{1}{4} \cdot (3\sqrt{2})^2;$$

$$4) \sqrt{1089} - \left(\frac{1}{6}\sqrt{216}\right)^2;$$

$$5) \frac{4}{9}\sqrt{39,69} - \frac{5}{49}\sqrt{59,29} + \left(-\frac{1}{5}\sqrt{75}\right)^2;$$

$$6) \frac{1}{2}\sqrt{17^2 - 15^2} + \left(2\sqrt{5\frac{1}{2}}\right)^2 - 0,3\sqrt{900} !$$

846. Oldjátok meg a következő egyenleteket:

$$1) \sqrt{x} = 2;$$

$$4) 2\sqrt{x} - 7 = 0;$$

$$2) \sqrt{x} = \frac{1}{4};$$

$$5) \sqrt{x} + 5 = 0;$$

$$3) \sqrt{x} - 3 = 0;$$

$$6) \frac{1}{4}\sqrt{x} + 5 = 0;$$

7) $\sqrt{7x-4}=0$;

10) $\frac{28}{\sqrt{x}}=7$;

8) $\sqrt{7x-4}=0$;

11) $\frac{15}{\sqrt{x+4}}=3$;

9) $\sqrt{7x-4}=2$;

12) $\sqrt{4+\sqrt{3+x}}=5$!

847. Vonjatok gyököt az alábbi kifejezésekből:

1) $\sqrt{9 \cdot 100}$;

5) $\sqrt{\frac{25}{196}}$;

2) $\sqrt{0,49 \cdot 16}$;

6) $\sqrt{18 \frac{1}{16}}$;

3) $\sqrt{676 \cdot 0,04}$;

7) $\sqrt{\frac{9}{64} \cdot \frac{1024}{1089}}$;

4) $\sqrt{0,64 \cdot 0,25 \cdot 12}$;

8) $\sqrt{3 \frac{13}{36} \cdot 4 \frac{29}{49}}$!

848. Vonjatok gyököt az alábbi kifejezésekből:

1) $\sqrt{75 \cdot 234}$;

3) $\sqrt{1,6 \cdot 12,1}$;

2) $\sqrt{2 \cdot 800}$;

4) $\sqrt{2890 \cdot 2,5}$!

849. Határozzátok meg az alábbi kifejezések értékét:

1) $\sqrt{108} \cdot \sqrt{3}$;

4) $\sqrt{0,4} \cdot \sqrt{4,9}$;

2) $\sqrt{52} \cdot \sqrt{13}$;

5) $\frac{\sqrt{288}}{\sqrt{2}}$;

3) $\sqrt{160} \cdot \sqrt{250}$;

6) $\frac{\sqrt{90}}{\sqrt{0,225}}$!

850. Határozzátok meg az alábbi kifejezések értékét:

1) $\sqrt{(17,1)^2}$;

5) $\sqrt{11^4}$;

2) $\sqrt{(-1,17)^2}$;

6) $\sqrt{(-23)^4}$;

3) $\frac{1}{2}\sqrt{(62)^2}$;

7) $\sqrt{2^6 \cdot 7^4}$;

4) $-2,4\sqrt{(-4)^2}$;

8) $\sqrt{(-3)^4 \cdot 2^6 \cdot (-0,1)^2}$!

851. Egyszerűsítétek az alábbi kifejezéseket:

1) $\sqrt{q^2}$, ha $q > 0$;

- 2) $\sqrt{t^2}$, ha $t \leq 0$;
- 3) $\sqrt{49m^2n^8}$; ha $m \geq 0$;
- 4) $\sqrt{0,81a^6b^{10}}$, ha $a \geq 0$, $b \leq 0$;
- 5) $\frac{1}{5}x\sqrt{100x^{26}}$, ha $x \leq 0$;
- 6) $\frac{\sqrt{a^6b^{20}c^{34}}}{ab^8c^{12}}$, ha $a > 0$, $c < 0$;
- 7) $\frac{1,2x^3}{y^5}\sqrt{\frac{y^{14}}{x^{10}}}$, ha $y > 0$, $x < 0$;
- 8) $-0,1x^2\sqrt{1,96x^{18}y^{16}}$, ha $x \leq 0$!

852. Egyszerűsítsék az alábbi kifejezéseket:

- 1) $\sqrt{(10-\sqrt{11})^2}$;
- 2) $\sqrt{(\sqrt{10}-11)^2}$;
- 3) $\sqrt{(\sqrt{10}-\sqrt{11})^2}$;
- 4) $\sqrt{(3-\sqrt{6})^2} + \sqrt{(2-\sqrt{6})^2}$;
- 5) $\sqrt{(\sqrt{24}-5)^2} - \sqrt{(\sqrt{24}-4)^2}$!

853. Egyszerűsítsék az alábbi kifejezéseket:

- 1) $\sqrt{18+8\sqrt{2}}$;
- 2) $\sqrt{38-12\sqrt{2}}$;
- 3) $\sqrt{16+6\sqrt{7}} + \sqrt{23-8\sqrt{7}}$;
- 4) $\sqrt{26-6\sqrt{17}} - \sqrt{66-14\sqrt{17}}$;
- 5) $\sqrt{46+10\sqrt{21}} + \sqrt{46-10\sqrt{21}}$!

854. Emeljetek ki tényezőt a gyökjel alól:

- 1) $\sqrt{24}$; 3) $\sqrt{700}$; 5) $\frac{1}{7}\sqrt{196}$; 7) $-1,6\sqrt{50}$;
- 2) $\sqrt{63}$; 4) $\sqrt{0,32}$; 6) $-2,4\sqrt{600}$; 8) $\frac{5}{8}\sqrt{3\frac{21}{25}}$!

855. Emeljetez ki tényezőt a gyökjel alól:

- | | |
|-------------------------------------|--|
| 1) $\sqrt{10a^2}$, ha $a \geq 0$; | 4) $\sqrt{36m^2n}$, ha $m \leq 0$; |
| 2) $\sqrt{15b^2}$, ha $b \leq 0$; | 5) $\sqrt{4x^6y^8}$, ha $x \geq 0$; |
| 3) $\sqrt{x^{11}y^{12}}$; | 6) $\sqrt{700a^5b^{22}}$, ha $b \leq 0$! |

856. Vigyetek be tényezőt a gyökjel alá:

- | | | | |
|-------------------|------------------------------|-----------------------------|----------------------|
| 1) $3\sqrt{10}$; | 3) $0,3\sqrt{3}$; | 5) $\frac{2}{7}\sqrt{98}$; | 7) $-0,5\sqrt{30}$; |
| 2) $2\sqrt{13}$; | 4) $\frac{1}{5}\sqrt{175}$; | 6) $-5\sqrt{7}$; | 8) $4\sqrt{a}$! |

857. Vigyetek be tényezőt a gyökjel alá:

- | | |
|-------------------|----------------------------------|
| 1) $a\sqrt{5}$; | 3) $x\sqrt{x^7}$; |
| 2) $b\sqrt{-b}$; | 4) $n\sqrt{m}$, ha $n \leq 0$! |

858. Hasonlítsátok össze az alábbi számokat:

- | | |
|---------------------------------|--|
| 1) $5\sqrt{6}$ és $6\sqrt{5}$; | 3) $0,3\sqrt{3\frac{1}{2}}$ és $\sqrt{0,3}$; |
| 2) $\sqrt{55}$ és $3\sqrt{6}$; | 4) $\frac{3}{7}\sqrt{16\frac{1}{3}}$ és $\frac{3}{4}\sqrt{5\frac{1}{3}}$! |

859. Egyszerűsítsetek az alábbi kifejezéseket:

- 1) $\sqrt{64a} + \sqrt{4a} - \sqrt{121a}$;
- 2) $\sqrt{45} + \sqrt{20} - \sqrt{320}$;
- 3) $6\sqrt{125a} - 2\sqrt{80a} + 3\sqrt{180a}$!

860. Végezzétek el az alábbi szorzásokat:

- 1) $(\sqrt{80} - \sqrt{45})\sqrt{5}$;
- 2) $(2\sqrt{6} + \sqrt{54} - \sqrt{96})\sqrt{6}$;
- 3) $(12 - \sqrt{10})(3 + \sqrt{10})$;
- 4) $(2\sqrt{5} + \sqrt{7})(2\sqrt{7} - \sqrt{5})$;
- 5) $(\sqrt{19} - \sqrt{13})(\sqrt{19} + \sqrt{13})$;
- 6) $(4\sqrt{m} + 9\sqrt{n})(4\sqrt{m} - 9\sqrt{n})$;
- 7) $(\sqrt{5x} + \sqrt{11y})^2$;
- 8) $(3\sqrt{11} - 2\sqrt{10})^2$!

861. Egyszerűsítsék az alábbi törteket:

1) $\frac{x^2-19}{x+\sqrt{19}}$;

4) $\frac{29-\sqrt{29}}{\sqrt{29}}$;

2) $\frac{\sqrt{x}-6}{x-36}$;

5) $\frac{a-6\sqrt{ab}+9b}{a-9b}$, ha $a > 0$, $b > 0$;

3) $\frac{m+8\sqrt{m}}{m-64}$;

6) $\frac{11-\sqrt{33}}{\sqrt{33}-3}$!

862. Gyöktelenítsék az alábbi törtek nevezőjét:

1) $\frac{a^3}{\sqrt{b}}$;

4) $\frac{6}{\sqrt{3}}$;

7) $\frac{6}{\sqrt{21}+\sqrt{15}}$;

2) $\frac{7}{a\sqrt{a}}$;

5) $\frac{n+9}{\sqrt{n+9}}$;

8) $\frac{18}{\sqrt{47}-\sqrt{29}}$!

3) $\frac{2}{\sqrt{13}}$;

6) $\frac{3}{\sqrt{13}-2}$;

863.* Gyöktelenítsék az alábbi törtek nevezőjét:

1) $\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}+1}$;

2) $\frac{2}{\sqrt{10}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}$!

864. Határozzátok meg a következő kifejezések értékét:

1) $\frac{5}{4-3\sqrt{2}} - \frac{5}{4+3\sqrt{2}}$;

2) $\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{15}+1} - \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{15}-1}$;

3) $(\sqrt{5-2\sqrt{6}} + \sqrt{5+2\sqrt{6}})^2$!

865. Egyszerűsítsék az alábbi kifejezéseket:

1) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{x}{x-9}$;

2) $\left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}}\right) : \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$!

866.* Egyszerűsítsék az alábbi kifejezéseket:

1) $\sqrt{(\sqrt{x}+5)^2} - 20\sqrt{x} + \sqrt{(\sqrt{x}-4)^2} + 16\sqrt{x}$;

2) $\sqrt{a+2\sqrt{a+3}+4} + \sqrt{a-2\sqrt{a+3}+4}$!

867.* Egyszerűsítsék az $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{8}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{50}+\sqrt{47}}$ kifejezést!

869. Rendezzék növekvő sorrendbe az alábbi számokat: 13 ; $\sqrt{165}$; $12,7$; $\sqrt{171}$; $13,4$!

870. Ábrázoljátok közös koordináta-rendszerben az $y=\sqrt{x}$ és $y=x-6$ függvények grafikonját! Jelöljétek a metszéspontot!

871. Az alábbi számok melyik két egész szám szomszédai: 1) $\sqrt{17}$;
2) $\sqrt{67}$; 3) $\sqrt{103}$; 4) $-\sqrt{51,25}$?

872. Mely egész számok vannak az alábbi számok között:

1) 6 és $\sqrt{67}$; 3) $-\sqrt{53}$ és $-4,9$;
2) $\sqrt{14}$ és $\sqrt{52}$; 4) $-\sqrt{31}$ és $2,7$?

873. Adott az $f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{x}, & \text{ha } x < 0, \\ 3, & \text{ha } 0 \leq x \leq 4, \\ \sqrt{x}, & \text{ha } x > 4 \end{cases}$ függvény.

1) Határozzátok meg $f(-0,5)$, $f(0)$, $f(4)$, $f(9)$ helyettesítési értéket!

2) Ábrázoljátok a függvény grafikonját!

874. Oldjátok meg a következő egyenleteket:

- 1) $x^2 - 4x - 32 = 0$;
- 2) $x^2 - 10x + 21 = 0$;
- 3) $6x^2 - 5x + 1 = 0$;
- 4) $8x^2 + 2x - 3 = 0$;
- 5) $x^2 + 6x - 15 = 0$;
- 6) $3x^2 - x - 5 = 0$;
- 7) $4x^2 + 28x + 49 = 0$;
- 8) $x^2 - 16x + 71 = 0$!

875. Oldjátok meg a következő egyenleteket:

- 1) $(x - 4)(x + 2) - 2(3x + 1)(x - 3) = x(x + 27)$;
- 2) $(4x - 3)^2 + (3x - 1)(3x + 1) = 9$;
- 3) $(x + 4)(x^2 + x - 13) - (x + 7)(x^2 + 2x - 5) = x + 1$;
- 4) $\frac{2(x^2 - 9)}{5} - \frac{x + 1}{2} = \frac{x - 41}{4}$;
- 5) $\frac{x^2 + 5x}{3} - \frac{x + 3}{2} = \frac{2x^2 - 2}{8}$!

876. Oldjátok meg az alábbi egyenleteket:

$$1) x^2 + (5a - 1)x + 4a^2 - a = 0;$$

- 2) $x^2 - (2a + 3) + 6a = 0$;
 3) $a^2x^2 - 10ax + 16 = 0$!
877. Oldjátok meg az alábbi egyenleteket:
 1) $|x^2 - 2x - 6| = 6$; 3) $x|x| + 2x - 15 = 0$;
 2) $x^2 - 6|x| - 16 = 0$; 4) $||x^2 - 6x - 4| - 3| = 1$!
878. Oldjátok meg a következő egyenleteket:
 1) $x^2 - 6x + \frac{2}{x-2} = \frac{2}{x-2} - 8$;
 2) $(\sqrt{x} - 5)(15x^2 - 7x - 2) = 0$;
 3) $(x^2 + 6x)(\sqrt{x} - 4)(x^2 - 8x - 48) = 0$!
879. Oldjátok meg a következő egyenleteket:
 1) $\sqrt{x^2 + 3x - 4} + \sqrt{x^2 + 6x + 8} = 0$;
 2) $x^2 - 4x + 4 + |x^2 - 3x + 2| = 0$;
 3) $\sqrt{25 - x^2} + |x^2 + 8x - 20| = 0$!
880. A diszkrimináns kiszámítása nélkül határozzátok meg az a azon értékét, melynél az alábbi egyenleteknek egy gyökük van:
 1) $x^2 + 22x + a = 0$; 2) $x^2 - ax + 81 = 0$.
 Számítsátok ki ezt a gyököt!
881. A b mely értéke mellett lesznek az $x^2 + bx - 23 = 0$ egyenlet gyökei ellentett számok? Határozzátok meg ezeket a gyököket!
882. $-\frac{1}{3}$ gyöke a $12x^2 - bx + 5 = 0$ egyenletnek. Határozzátok meg a b értékét és az egyenlet másik gyökét!
883. 0,2 gyöke a $8x^2 - 3,2x + k = 0$ egyenletnek. Határozzátok meg a k értékét és az egyenlet másik gyökét!
884. Az $x^2 - bx + 20 = 0$ egyenlet x_1 és x_2 gyökeire igaz, hogy $x_1 = 5x_2$. Határozzátok meg a b együtthatót és az egyenlet gyökeit!
885. Írjátok fel olyan másodfokú egyenletet, melynek a gyökei 1-gyel kisebbek az $x^2 - 3x - 5 = 0$ egyenlet megfelelő gyökeinél!
886. Oldjátok meg a következő egyenleteket:
 1) $\frac{x^2 - 7x}{x+1} = \frac{8}{x+1}$;
 2) $\frac{3x^2 + 4x}{x^2 - 9} = \frac{3 - 4x}{x^2 - 9}$;
 3) $\frac{4 - x}{4x - 3} = \frac{2x - 2}{7 - x}$;

$$4) \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-6} = \frac{7}{12};$$

$$5) \frac{63}{x^2+3x} - \frac{2}{x^2-3x} = \frac{7}{x};$$

$$6) \frac{2x}{x-2} + \frac{3}{x+4} = \frac{4x-2}{(x+4)(x-2)};$$

$$7) \frac{1}{x^2+2x} - \frac{2}{x^2-4} = \frac{x+4}{5x(2-x)};$$

$$8) \frac{2}{x^2-2x+1} - \frac{1}{x^3-1} = \frac{3}{x^2+x+1}!$$

887. Oldjátok meg a következő egyenleteket:

$$1) \frac{x-1}{x+5} + \frac{x+5}{x-1} = \frac{10}{3};$$

$$2) \frac{x^2-3x+6}{x} + \frac{2x}{x^2-3x+6} = 3;$$

$$3) \frac{x^2}{(3x-1)^2} - \frac{4x}{3x-1} - 5 = 0;$$

$$4) \frac{24}{x^2+2x-8} - \frac{15}{x^2+2x-3} = 2!$$

888.* Az a mely értékei mellett lesz az $\frac{x^2-2ax+3}{x-2} = 0$ egyenletnek egy gyöke?

889. Igazak-e a alábbi állítások:

1) ha m és n az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet gyökei, $a \neq 0$ és $c \neq 0$, akkor a $-m$ és $-n$ gyökei az $ax^2 - bx + c = 0$ egyenletnek;

2) ha m és n az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet gyökei, $a \neq 0$ és $c \neq 0$, akkor az $\frac{1}{m}$ és $\frac{1}{n}$ gyökei a $cx^2 + bx + a = 0$ egyenletnek? A feleletet indokoljátok meg!

890.* Határozzátok meg a b azon egész értékeit, melyeknél az alábbi egyenlet gyökei is egész számok:

$$1) x^2 + bx - 6 = 0; \quad 2) x^2 + bx + 21 = 0!$$

891.* x_1 és x_2 az $x^2 - (2a-5)x + a^2 - 7 = 0$ egyenlet gyökei. Az a mely értéke mellett igaz, hogy $2x_1 + 2x_2 = x_1x_2$?

892.* Az a mely értéke mellett lesz az $x^2 + (a+9)x + a^2 + 2a = 0$ egyenlet gyökeinek szorzata 15?

893. Egy autóbusznak 255 km-t kellett megtennie. Miután megtette az út $\frac{7}{17}$ -ét, 1 órára leparkolt. Az út hátralévő részén a sebességét 5 km/h-val csökkentette és így 9 óra múlva érkezett meg. Mekkora volt az autóbusz kezdeti sebessége?
894. Egy réz-cink ötvözetben 20 kg cink van. Az ötvözethez hozzáolvasztottak 3 kg rezet és 4 kg cinket. Az így nyert ötvözet 5%-kal több rezet tartalmaz, mint az eredeti. Mennyi rezet tartalmazott az eredeti ötvözet?

A 7. osztályban tanultak ismétlése

Egész kifejezések

1. Változót tartalmazó kifejezések.

Egész racionális kifejezések.

A kifejezés helyettesítési értéke

Azokat a kifejezéseket, melyekben változók (vagy csak változó, ha egy van), számok, zárójel van, melyekre a négy alpműveletet véges sokszor alkalmazták, változót tartalmazó kifejezéseknek nevezzük.

Ha a változók helyére behelyettesítünk konkrét számokat, akkor számkifejezést kapunk. Ennek a számkifejezésnek az értékét nevezzük a változót tartalmazó kifejezés helyettesítési értékének.

A számkifejezéseket és a változót tartalmazó kifejezéseket algebrai kifejezéseknek nevezzük.

Azokat a kifejezéseket, melyek nem tartalmaznak változóval való osztást egész kifejezésnek nevezzük.

Az $\overline{ab}$ jelölést azokra a kétjegyű számokra alkalmazzuk, melyekben a tízes és b egyes van, tehát $\overline{ab} = 10a + b$. Hasonlóképpen, $\overline{abc}$ -vel jelöljük azokat a háromjegyű számokat, melyekben a százasként van, b tízes és c egyes, vagyis $\overline{abc} = 100a + 10b + c$.

2. Azonosan egyenlő kifejezések. Azonosságok

Azok a kifejezések, melyek bármely helyen vett helyettesítési értéke egyenlő, azonosan egyenlő kifejezéseknek nevezzük.

Azt az egyenlőséget, amely a változók bármely értékére teljesül, azonosságnak nevezzük.

Ha egy kifejezést vele azonosan egyenlő kifejezéssel helyettesítünk, akkor azonos átalakítást végzünk.

Azonosság bizonyítása annyit jelent, hogy igazolni kell az adott egyenlőségről azt, hogy az azonosság.

Az alább felsorolt lehetőségekkel igazolhatunk azonosságot:

- azonos átalakítással az egyik oldalt olyan alakra hozzuk, amilyen a másik oldal;
- azonos átalakítással mind a két oldalt egyenlő alakra hozzuk;
- igazoljuk, hogy a két oldal különbsége nulla.

Ahhoz, hogy bebizonyítsuk egy egyenlőségről, hogy nem azonosság, elegendő felhozni egy ellenpéldát: megnevezni a változónak egy olyan értékét, melyre az egyenlőség nem teljesül.

3. Természetes kitevőjű hatvány

Az a szám n -edik hatványának nevezzük azt az n tényező szorzatot, melyben minden tényező a , $a \neq 0$.

Az a szám n -edik hatványának jelölése: a^n (olv. a n -edik hatványa, a az n -ediken). A 2. és 3. hatványra külön szavunk van: négyzet és köb.

A szám első hatványa maga a szám.

Az előbbi meghatározások alapján:

$$a^n = \underbrace{aa \dots a}_{n \text{ tényező}}, n > 1,$$

$$a^1 = a.$$

Bármely nemnegatív szám hatványa nemnegatív.

Negatív szám páros kitevőjű hatványa pozitív, páratlan kitevőjű hatványa negatív.

4. Természetes kitevőjű hatványozás azonosságai

Bármely a számra és természetes m és n számra igaz, hogy:

$$a^m a^n = a^{m+n},$$

azonos alapú hatványok szorzásakor a hatványalapot a kitevők összegére emeljük.

Bármely a számra és természetes m és n számra, ha $m > n$ igaz, hogy:

$$a^m : a^n = a^{m-n},$$

azonos alapú hatványok szorzásakor a hatványalapot a kitevők különbségére emeljük.

Bármely a számra és természetes m és n számra igaz, hogy:

$$(a^m)^n = a^{mn},$$

hatványok hatványozásakor az alap új kitevője a kitevők szorzata lesz.

Bármely a és b számra és természetes n számra igaz, hogy:

$$(ab)^n = a^n b^n,$$

a szorzat n -edik hatványa a tényezők n -edik hatványainak szorzatával egyenlő.

5. Egytagú kifejezések

Azokat a kifejezéseket, melyekben számok és változók szorzással vannak összekapcsolva egytagú kifejezéseknek nevezzük.

Azt az egytagú kifejezést melyben csak egy számtényező van, ami az első helyen áll, a többi tényező pedig különböző alapú hatvány, az egytagú kifejezés normálalakjának nevezzük.

A nulla is egytagú kifejezés. A nullával azonosan egyenlő egytagú kifejezéseket nulla értékű kifejezésnek nevezzük. Nem soroljuk őket a normálalakú egytagú kifejezések közé.

Az egytagú kifejezések számtényezőjét együtthatónak nevezzük.

Azokat az egytagú kifejezéseket, melyek legfeljebb együtthatóikban különböznek, egynemű kifejezéseknek nevezzük.

Az egytagú kifejezések fokszámának nevezzük a benne szereplő változók hatványkitevőinek összegét. Azon egytagú kifejezések fokszámát, melyek nullától különböző számok, nullának tekintjük.

A nulla értékű kifejezéseknek nincs fokszámuk.

Két egytagú kifejezés szorzata is egytagú kifejezés. Egytagú kifejezés hatványa egytagú kifejezés.

6. Többtagú kifejezések

Egytagú kifejezések összegét többtagú kifejezésnek (polinomnak) nevezzük.

A többtagú kifejezés összeadandóit tagoknak nevezzük.

Azokat a polinomokat, melyeknek két tagja van, kéttagú kifejezésnek, melyeknek három tagja van, háromtagú kifejezésnek nevezzük. Az egytagú kifejezések a többtagú kifejezések részesete. Ezek olyan polinomok, melyeknek egy tagja van.

A többtagú kifejezések, egytagú kifejezések és a számok viszonyát a 35. ábra szemlélteti.

Ha a többtagú kifejezések tagjai között vannak egyneműek, akkor ezeket a tagokat a polinom egynemű tagjainak nevezzük.

Az egynemű tagok összevonásával a többtagú kifejezés helyettesíthető egy egyszerűbb, kevesebb tagból álló vele azonosan egyenlő kifejezéssel.

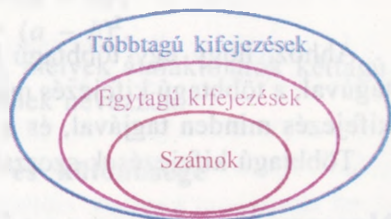
Ahhoz, hogy összeadjunk két többtagú kifejezést, a kifejezéseket zárójelbe vesszük és közéjük plusz jelet teszünk, majd a zárójel felbontása után összevonjuk az egynemű tagokat (ha van ilyen).

Ahhoz, hogy kivonjunk két többtagú kifejezést, a kifejezéseket zárójelbe vesszük és közéjük mínusz jelet teszünk, majd a zárójel felbontása után összevonjuk az egynemű tagokat (ha van ilyen).

A többtagú kifejezés szorzattá alakításának nevezzük azt az eljárást, amikor a kifejezést több tényező szorzatára bontjuk.

A szorzattá alakításra nincs univerzális szabály. Viszont alkalmazható az alábbi algoritmus:

- 1) ha lehetséges, közös tényezőt kell kiemelni;
- 2) nevezetes azonosságot kell alkalmazni;
- 3) ha nem lehetséges nevezetes azonosságot alkalmazni, akkor a csoportosítás módszerét alkalmazzuk a szorzattá alakításhoz.



35. ábra

7. Egytagú kifejezés szorzása többtagúval

Ahhoz, hogy egy egytagú kifejezést megszorozzunk egy többtagúval, a többtagú kifejezés minden tagját meg kell szorozni az egytagú kifejezéssel és a kapott szorzatokat össze kell adni.

Az egytagú és többtagú kifejezések szorzására érvényes a szorzás felcserélhetőségi törvénye. Ezért az előbb megfogalmazott szabályt alkalmazhatjuk abban az esetben is, ha egy többtagú kifejezést szorzunk egytagúval.

8. Többtagú kifejezés szorzása többtagúval

Ahhoz, hogy egy többtagú kifejezést megszorozzunk egy többtagúval, a többtagú kifejezés minden tagját meg kell szorozni a másik kifejezés minden tagjával, és a kapott szorzatokat össze kell adni.

Többtagú kifejezések szorzata is többtagú kifejezés.

Nevezetes azonosságok

9. Két tag összegének és különbségének szorzata

Egy kéttagú különbség és ugyanazon tagok összegének szorzata egyenlő az első és a második tag négyzetének különbségével:

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2.$$

10. Két tag négyzetének különbsége

Két tag négyzetének különbsége egyenlő ezen tagok összegének és különbségének szorzatával:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

11. Kéttagú összeg és különbség négyzete

Egy kéttagú összeg négyzete megegyezik az első tag négyzetének, az első és második tag kétszeres szorzatának és a második tag négyzetének összegével:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Két tag különbségének négyzetét megkapjuk, ha az első tag négyzetéből kivonjuk az első és a második tag kétszeres szorzatát, és hozzáadjuk a második tag négyzetét:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 .$$

12. Többtagú kifejezések átalakítása kéttagú összeg vagy különbség négyzetévé

Az alábbi képletek lehetőséget adnak a háromtagú kifejezések kéttagú kifejezés négyzetévé „tömörítésére”:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2,$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2.$$

Azokat a háromtagú kifejezéseket, melyek átalakíthatók kéttagú kifejezések négyzetévé, teljes négyzetnek nevezzük.

13. Két tag köbeinek összege és különbsége

Két tag köbeinek összege egyenlő a tagok összegének, valamint a tagok négyzetei összegének és szorzatuk különbségének szorzatával:

$$a^3 + b^3 = (a + b) (a^2 - ab + b^2).$$

Két tag köbeinek különbsége egyenlő a tagok különbségének és a tagok négyzeteinek, valamint szorzatuk összegének szorzatával:

$$a^3 - b^3 = (a - b) (a^2 + ab + b^2).$$

Egyenletek

14. Az egyenlet gyöke

Az egyenlet gyökének nevezzük a változó azon értékét, melyre az egyenlőség teljesül.

Az egyenlet megoldása olyan eljárás, amellyel meghatározzuk az egyenlet gyökeit, vagy igazoljuk, hogy nincs megoldás.

Gyakran a szöveges feladatok reális problémák felvetése. A feltételek alapján felírt egyenletet a probléma matematikai modelljének nevezzük. Ezért az egyenlet gyöke nem minden esetben lesz a feladat megoldása. Ellenőrizni kell, hogy a kapott érték nem mond-e ellent a feladat feltételeinek.

Szöveges feladatok megoldásánál célszerű az alábbi algoritmust követni:

- 1) a feladat feltétele alapján írjunk fel egyenletet (állítsuk össze a feladat matematikai modelljét);
- 2) oldjuk meg a felírt egyenletet;
- 3) ellenőrizzük le, hogy az egyenlet gyökei megfelelnek-e a feladat feltételeinek.

15. Az egyenletek azonos átalakításai

Az egyenlet gyökei nem változnak, ha az egyenlet mindkét oldalához hozzáadjuk (vagy mindkét oldalából kivonjuk) ugyanazt a számot.

Ha egy olyan egyenlet mindkét oldalához, melynek nincsenek gyökei, hozzáadjuk vagy mindkét oldalából kivonjuk ugyanazt a számot, olyan egyenletet kapunk, melynek szintén nincsenek gyökei.

Az egyenlet gyökei nem változnak, ha az egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk (vagy mindkét oldalát elosztjuk) ugyanazzal a nullával nem egyenlő számmal.

Az egyenlet gyökei nem változnak, ha az egyenlet egyik oldaláról átviszünk a másik oldalra egy tagot ellenkező előjellel.

16. Egyismeretlenes lineáris egyenletek

Egyismeretlenes lineáris egyenletnek az $ax = b$ alakú egyenletet nevezzük, ahol x az ismeretlen, a és b adott számok.

Ha $a \neq 0$, akkor az egyenlet mindkét oldala elosztható a -val. Az egyenletnek egy megoldása van: $x = \frac{b}{a}$.

Ha $a = 0$, akkor az $0x = b$ alakú egyenletet kapjuk, és két részesetet kell figyelembe venni: $b = 0$ vagy $b \neq 0$.

Az első esetben az $0x = 0$ alakú egyenletet kapjuk. Tehát, ha $a = 0$ és $b = 0$, akkor az $ax = b$ alakú egyenletnek minden szám a megoldása, végtelen sok megoldása van.

A másik esetben, ha $b \neq 0$, akkor az x bármely értékére a $0x = b$ egyenlőség hamis. Tehát, ha $a = 0$ és $b \neq 0$, akkor az $ax = b$ egyenletnek nincs megoldása.

$ax = b$ alakú egyenlet	$a \neq 0$	$a = 0$ és $b = 0$	$a = 0$ és $b \neq 0$
	$x = \frac{b}{a}$	x – bármely szám	nincs megoldás

Függvények

17. A függvény.

A függvény értelmezési tartománya és értékkészlete

Ha a független változó minden értékéhez meghatározott szabály szerint csak egy érték tartozik, akkor az ilyen megfeleltetést egyértelmű hozzárendelésnek, függvénynek nevezzük.

A független változót általában x -szel, a függő változót y -nal, a hozzárendelési szabályt f -fel jelöljük. Ha az y és az x változók között egyértelmű a hozzárendelés, akkor az $y = f(x)$ jelölést használjuk (olv. y egyenlő f az x helyen).

A független változót argumentumnak nevezzük.

Az f függvény minden x argumentumához az y függő változó egy értéke tartozik, amit a függvény helyettesítési értékének nevezünk és $f(x)$ -szel jelöljük.

Az argumentum összes értéke alkotja a függvény értelmezési tartományát. A függő változó által felvett összes érték alkotja a függvény értékkészletét.

Néhány függvény jelölése:

$y = [x]$ *egészrész függvény*. A függvényérték egyenlő az argumentum értékénél nem nagyobb egész számmal.

$y = \{x\}$ – *törtrész függvény*: $\{x\} = x - [x]$.

18. A függvény megadási módjai

Egy függvényt adottnak tekintünk, ha ismerjük az értelmezési tartományát és a hozzárendelési szabályt.

Mivel a függvény a egy egyértelmű hozzárendelés, ezért megadható szavakkal, körülírással.

A leggyakoribb megadási mód az analitikus, vagyis képlettel.

Ha egy függvény olyan képlettel van megadva, melynek jobb oldala egész kifejezés és nincs meghatározva az értelmezési tartománya, akkor úgy tekintjük, hogy a függvény értelmezési tartománya minden szám.

A függvények még egy megadási módja a táblázat. Egy ilyen táblázat két sorból áll. Az első sorban szereplő számok alkotják a függvény értelmezési tartományát. Az oszlopok tartalmazzák a *független változó* – *függő változó* értékpárokat. Ezt a módot akkor célszerű alkalmazni, ha az értelmezési tartomány néhány szám.

Ha az értelmezési tartomány szomszédos értékei között a különbség 1, akkor azt mondjuk, hogy a táblázat 1 lépésközzel van összeállítva.

19. A függvény grafikonja

Az f függvény grafikonja olyan görbe, mely a koordinátasík azon és csakis azon pontjaiból áll, melyek abszcisszája egyenlő a függvény argumentumával, ordinátája pedig az f függvény helyettesítési értékével.

Ha egy görbe az f függvény grafikonja, akkor az alábbi két feltétel teljesül:

- 1) ha x_0 a függvény valamely argumentuma és az $f(x_0)$ a hozzá tartozó függvényérték, akkor az $(x_0; f(x_0))$ koordinátájú pont illeszkedik a grafikonra;
- 2) ha a grafikon valamely pontjának koordinátái $(x_0; y_0)$, akkor x_0 és y_0 megfelelően a függvény függő és független változói, vagyis $y_0 = f(x_0)$.

A koordinátasíkon ábrázolt alakzat nem lehet egy függvény grafikonja, ha az argumentumnak létezik olyan értéke, melyre az y értékét nem lehet egyértelműen meghatározni.

Egy görbe akkor tekinthető egy függvény grafikonjának, ha az abszcisszára bocsátott bármelyik merőleges egyenesnek az adott görbével csak egy közös pontja van.

20. A lineáris függvény, grafikonja és tulajdonságai

Az $y = kx + b$ képlettel megadott függvényt lineáris függvénynek nevezzük, ahol k és b adott szám, x a független változó.

A lineáris függvény értelmezési tartománya bármely szám, grafikonja egyenes. Mivel az egyenest egyértelműen meghatározza két különböző pontja, így a lineáris függvény grafikonjának ábrázolásához elegendő választani két különböző argumentum értéket és kiszámítani a hozzájuk tartozó függvényértéket, majd a két meghatározott és a koordinátasíkon feltüntetett ponton keresztül meghúzni az egyenest.

Az $y = kx$, $k \neq 0$ képlettel megadott függvényt egyenes arányosságnak nevezzük.

Az egyenes arányosság a lineáris függvények részesete (ezt az összefüggést szemlélteti a 36. ábra).

Az egyenes arányosság grafikonja olyan egyenes, ami átmegy az origón. Ezért az egyenes arányosság grafikonjának ábrázolásához elegendő meghatározni egy, az origótól különböző pontot, meghúzni ezen a ponton és az origón $O(0; 0)$ keresztül egy egyenest.

Ha az $y = kx + b$ képletbe $k = 0$ értéket helyettesítünk, akkor $y = b$. Ebben az esetben a függvényérték változatlan bármely argumentum helyen. A függvény grafikonja olyan egyenes, amely párhuzamos az abszcisszatengellyel.



36. ábra

Kétismeretlenes lineáris egyenletrendszer

21. Kétismeretlenes egyenlet

A két változót tartalmazó egyenlőséget kétismeretlenes egyenletnek nevezzük.

A változók azon értékpárjait, melyre az egyenlőség teljesül, a kétismeretlenes egyenlet gyökeinek nevezzük.

Ha $x = a$ és $y = b$ érték az egyenlet megoldása akkor ez $(a; b)$ alakban is felírható. A zárójelben első helyen az x változó, második helyen az y változó értékét írjuk. Ha az egyenletben a változókat nem x -szel és y -nal jelölték, akkor meg kell beszélni, hogy melyik változó értékét tüntetjük fel a számpárként megadott feleletben az első helyen, és melyiket a másodikon. Általában a latin ábécé sorrendjének megfelelően járunk el.

A kétismeretlenes egyenlet megoldása azt jelenti, hogy meghatározzuk azokat a számpárokat, melyekre teljesül az egyenlőség vagy igazoljuk, hogy nincs ilyen számpár.

A kétismeretlenes egyenletekre érvényesek azok az azonos átalakítások, melyek az egyismeretlenes egyenletekre is (lásd a 15. pontot a 230. oldalon).

A kétismeretlenes egyenlet grafikonja a koordinátasík azon, és csakis azon pontjai, melyek koordinátái (számpárok) az egyenlet gyökei.

Ha egy görbe az egyenlet grafikonja, akkor az alábbi két tulajdonság teljesül:

- 1) az egyenlet gyökei olyan pontok koordinátái, melyek illeszkednek a grafikonra;
- 2) a grafikon bármely pontjának koordinátái olyan számpár, ami az egyenlet gyöke.

22. Kétismeretlenes lineáris egyenlet grafikonja

Kétismeretlenes lineáris egyenletnek nevezzük az $ax + by = c$ alakú egyenletet, ahol x és y ismeretlen, a , b és c adott számok.

Bármely esetben, ha $b \neq 0$ vagy $b = 0$ és $a \neq 0$ az $ax + by = c$ egyenlet grafikonja egyenes.

Ha $a = b = 0$ az $ax + by = c$ egyenletben, akkor a $0x + 0y = c$ egyenletet kapjuk.

Ha $c \neq 0$, akkor ennek az egyenletnek nincs megoldása, vagyis nem létezik a koordinátasíkon olyan pont, mely szolgálhatna az egyenlet grafikonjaként.

Ha $c = 0$, akkor a

$$0x + 0y = 0$$

egyenletet kapjuk. Ebben az esetben az egyenlet megoldása az egész koordinátasík.

Az alábbi táblázat összefoglalja az $ax + by = c$ egyenlet grafikonjának minden rész esetét:

Egyenlet	Az a , b és c értékei	Grafikon
$ax + by = c$	$b \neq 0$, a és c bármely szám	nem merőleges egyenes
$ax + by = c$	$b = 0$, $a \neq 0$, c bármely szám	merőleges egyenes
$ax + by = c$	$a = b = c = 0$	az egész koordinátasík
$ax + by = c$	$a = b = 0$, $c \neq 0$	nincs megoldás

23. Kétismeretlenes lineáris egyenletrendszer

Ha több egyenlet közös megoldását kell meghatározni, akkor azt mondjuk, hogy egyenletrendszert kell megoldani.

Az egyenletek rendszerbe foglalásához kapcsos zárójelet használunk.

A kétismeretlenes egyenletrendszer megoldásának nevezzük a változók azon értékeit, melyekre egyidejűleg teljesül mindkét egyenlet.

A kétismeretlenes egyenletrendszer megoldása azt jelenti, hogy meghatározzuk azokat a számpárokat, melyekre teljesül az egyenlőség, vagy igazoljuk, hogy nincs megoldás.

24. A kétismeretlenes lineáris egyenletrendszer grafikus megoldása

Az egyenletrendszer grafikus megoldása abban rejlik, hogy:

- közös koordináta-rendszerben ábrázoljuk a rendszer mindkét egyenletének grafikonját;
- meghatározzuk a grafikonok metszéspontjainak koordinátáit;

- a meghatározott számpárok lesznek a rendszer megoldásai.

A grafikus módszert akkor célszerű alkalmazni, ha a gyökök számát keressük.

Ha a rendszerben foglalt egyenletek grafikonjai egyenesek, akkor a rendszer megoldása az egyenesek kölcsönös helyzetétől függ:

- ha az egyenesek metszik egymást, akkor a rendszernek egy megoldása van;
- ha az egyenesek illeszkednek egymásra, akkor az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van;
- ha az egyenesek párhuzamosak, akkor az egyenletrendszernek nincs megoldása.

25. A kétismeretlenes lineáris egyenletrendszer megoldása behelyettesítő módszerrel

Ezzel a módszerrel a kétismeretlenes lineáris egyenletrendszer megoldása visszavezethető az egyismeretlenes lineáris egyenlet megoldására.

Ahhoz, hogy a kétismeretlenes egyenletrendszert behelyettesítő módszerrel oldjuk meg, a következő lépéseket kell elvégezni:

- 1) kifejezzük az egyik egyenletből az egyik változót a másikon keresztül;
- 2) az így kapott kifejezést behelyettesítjük a másik egyenletbe a változó helyére;
- 3) megoldjuk az így kapott egyismeretlenes egyenletet;
- 4) visszahelyettesítjük a változó meghatározott értékét az első lépésben kapott kifejezésbe;
- 5) kiszámítjuk a második változó értékét;
- 6) felírjuk a megoldást.

26. A kétismeretlenes lineáris egyenletrendszer megoldása egyenlő együtthatók módszerével

Ezzel a módszerrel a kétismeretlenes lineáris egyenletrendszer megoldása visszavezethető az egyismeretlenes lineáris egyenlet megoldására.

Ahhoz, hogy a kétismeretlenes egyenletrendszert az egyenlő együtthatók módszerével oldjuk meg, a következő lépéseket kell elvégezni:

- 1) megfelelő szorzótényezőket választunk úgy, hogy ha megszorozzuk az egyik egyenletet, vagy mindkét egyenletet ezzel a számmal, valamelyik változó együtthatói egyenlők legyenek;
- 2) tagonként kivonjuk az így kapott egyenletek jobb és bal oldalát;
- 3) megoldjuk a második lépés eredményeként kapott egyismeretlenes egyenletet;
- 4) visszahelyettesítjük a változó meghatározott értékét az eredeti rendszer valamelyik egyenletébe;
- 5) kiszámítjuk a másik változó értékét;
- 6) felírjuk a gyököket.

A szám abszolút értéke

27. A szám abszolút értéke

Az a szám abszolút értékének nevezzük a számegyenesen az a számot jelölő pont és az origó távolságát.

Az a szám abszolút értékének jelölése: $|a|$ (olv. az a szám abszolút értéke).

A pozitív szám abszolút értéke magával a számmal, a negatív szám abszolút értéke pedig ellentettjével egyenlő.

$$|0| = 0.$$

Kapcsos zárójelet alkalmazva az abszolút érték tulajdonsága így írható fel:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{ha } a \geq 0, \\ -a, & \text{ha } a < 0. \end{cases}$$

Az abszolút érték nem negatív.

Ellentett számok abszolút értéke egyenlő:

$$|a| = |-a|.$$

Koordinátasík

28. Derékszögű koordináta-rendszer

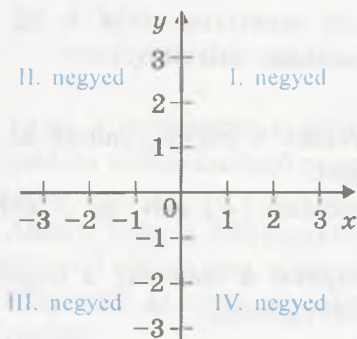
Húzzunk a síkon két egymásra merőleges számegyeneset, úgy hogy az origók egybeessenek. Ezeket az egyeneseket koordinátatengelyeknek, a metszéspontot, az O pontot a számlálás kezdőpontjának (ori-

gónak) nevezzük. A vízszintes tengely az abszcisszatengely, melyet x -szel jelölünk, a függőleges tengely az ordinátatengely és y -nal jelöljük.

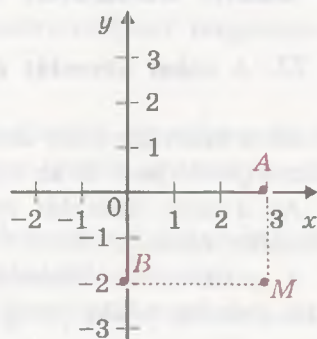
Az abszcisszatengelyt x tengelynek, az ordinátatengelyt y tengelynek is szoktuk nevezni. E két tengely együtt alkotja a derékszögű koordináta-rendszert, melyet Descartes-féle koordináta-rendszernek is nevezünk.

Azt a síkot, melyen koordináta-rendszer van, koordinátasíknak nevezzük.

A koordinátatengelyek négy részre osztják a síkot, melyeket koordináta-negyedeknek nevezünk, és a 37. ábrán látható módon számozzuk.



37. ábra



38. ábra

Jelöljük a koordinátasíkon az M pontot (38. ábra). Az M ponton átmenő az abszcisszatengelyre merőleges egyenes az abszcisszatengelyt az A pontban metszi, az ordinátatengelyre merőleges egyenes ezt a tengelyt a B pontban metszi. Az A pont koordinátája az x tengelyen 3, a B pont koordinátája az y tengelyen -2 .

A 3-as számot az M pont abszcisszájának, a -2 -t az M pont ordinátájának nevezzük. Ezért ezeket a számokat az M pont koordinátáinak nevezzük. Jelölése: $M(3; -2)$.

A pont koordinátáinak felírásakor első helyre az abszcisszát, másodikra az ordinátát írjuk.

Ha egy pont az abszcisszatengelyen van, akkor az ordinátája nulla, ha az ordinátatengelyen van, akkor az abszcisszája nulla.

Feleletek és útmutatások

50. 0,3. 51. 5. 53. $\frac{1}{2}$. 54. Nem. *Útmutatás.* Írjuk fel az adott törtet $\frac{(a-1)^2}{a^2+1}$ alakban. 58. 1) x – bármely szám, kivéve a -1 -et; 2) nincs megoldása; 3) nincs megoldása. 59. 1) nincs megoldása; 2) -7 . 60. 1) Ha $a = 0$, akkor nincs megoldása; ha $a \neq 0$, akkor $x = \frac{1}{a}$; 2) ha $a = 0$, akkor x bármely szám; ha $a \neq 0$, akkor $x = 1$; 3) ha $a = 6$, akkor x – bármely szám; ha $a \neq 6$, akkor $x = a - 6$; 4) ha $a = -2$, akkor nincs megoldás; ha $a = 2$, akkor x – bármely szám; ha $a \neq -2$ és $a \neq 2$, akkor $x = \frac{1}{a+2}$. 61. 1) Ha $a = -3$, akkor nincs megoldás; ha $a \neq -3$, akkor $x = \frac{3}{a+3}$; 2) ha $a = 0$, akkor nincs megoldás; ha $a = 9$, akkor x – bármely szám; ha $a \neq 0$ és $a \neq 9$, akkor $x = \frac{a-9}{a}$. 64. -4 , ha $a = 2b$. 65. 48 km/h, 60 km/h. 76. 1) $-\frac{1}{2}$; 2) $\frac{3}{m+2}$; 3) $\frac{1}{1-k}$. 77. 1) $\frac{3}{4}$; 2) $\frac{a-5}{a+5}$. 78. 1) $\frac{1}{1-a}$; 2) $\frac{3}{b-2}$; 3) $\frac{m}{n-5}$. 79. 1) $\frac{1}{(x-7)^2}$; 2) $\frac{y+6}{y+2}$. 87. 2) 5; 3) $4\frac{1}{4}$. 88. 2) -3 ; 3) $-4,5$. 89. 1) 1; 2; 3; 6; 2) 1; 2; 7; 14; 3) 1; 2; 8. 90. 1) 1; 3; 9; 2) 1; 2; 4; 8; 3) 2. 91. 15 km/h, 12 km/h. 92. 1) -2 ; 2) nincs megoldás. 112. 6) $\frac{5}{p-5}$; 7) $\frac{16}{16y-y^3}$; 8) $\frac{2b+1}{12b-6}$. 113. 5) $\frac{1}{x}$; 6) $\frac{8}{y+2}$. 116. 2) 4. 117. 1) $\frac{1}{6}$; 2) 2,5; 3) 0,1. 118. 1) 1,2; 2) $\frac{7}{17}$. 121. 2) $\frac{3}{b^2-3b+9}$. 122. 1) $\frac{2n^3}{9m^2-n^2}$; 2) $\frac{2-2b}{8b^3+1}$. 124. 1) $-\frac{a+b}{ab}$; 2) $\frac{1}{2x}$; 3) $\frac{100b^2}{(a^2-25b^2)^2}$; 4) $\frac{1}{y-2}$. 128. $\frac{3}{(a-1)(a-4)}$. *Útmutatás.* Írjátok fel az összeadandókat két tört különbségeként. Például $\frac{1}{(a-1)(a-2)} = \frac{1}{a-2} - \frac{1}{a-1}$. 129. $\frac{3}{(a-7)(a-1)}$. 132. *Útmutatás.* A bal oldalon minden

- törthöz adjatok hozzá 1-et, a jobb oldalon 3-at. **135.** 270 km. **160.** 1) -5 ;
 2) $0,9$; 3) -5 ; 4) $-3,2$. **161.** 1) $\frac{40}{21}$; 2) $\frac{4}{11}$. **162.** 83. **163.** 10.
164. 7 vagy -7 . **165.** 2 vagy -2 . **166.** 1) 1; 2) 1. **167.** 1) $\frac{(a-5)^2}{(a+5)^2}$;
 2) 1. **170.** 1) $0,5$; 2) x – bármely szám. **172.** 1,2 óra. **173.** 50 liter,
 30 liter. **174.** 5 férfi, 1 nő, 6 gyerek. **178.** 1) $\frac{3}{1-a}$; 2) $\frac{2}{b-3}$; 3) $\frac{12}{3c-1}$;
 4) $\frac{1}{a-2b}$; 5) $\frac{2}{a+5}$; 6) $\frac{x-3}{x+3}$. **179.** 1) $\frac{2}{3-b}$; 2) -1 ; 3) $x+y$; 4) $\frac{a+2}{a-2}$.
180. 1) $\frac{x+8}{x-8}$; 2) $\frac{a-4}{2a}$; 3) $\frac{1}{b}$; 4) $\frac{a-1}{a}$; 5) 2; 6) $a-2$. **181.** 1) $\frac{7+x}{7-x}$;
 2) $c-5$; 3) -2 ; 4) $\frac{y+2}{6}$. **184.** 1) Nem; 2) igen. **186.** 1) $\frac{1}{a}$; 2) $a-3$;
 3) $a+1$; 4) $\frac{a+b}{a}$. **187.** 1) $\frac{a^2+b^2}{b^2}$; 2) $-a$. **188.** 1) $-\frac{a+b}{2ab}$; 2) $\frac{1}{a}$.
189. $-y$. **192.** 1) $\frac{a^2}{b^2}$; 2) 1. **193.** 1) $-1\frac{1}{3}$; 2) $\frac{3}{4}$. **195.** Útmutatás.
 Írjátok fel a kifejezést $10 \cdot 3^n - 5 \cdot 2^n$ alakban. **196.** 480 kg. **197.** 500
 hrivnya, 700 hrivnya. **198.** 2 óra. **199.** 9 alkatrész. **200.** 9 veréb, 10
 galamb, 11 pacsirta. **207.** 2) nincs megoldás; 3) -2 ; 4) x bármely
 szám, kivéve a 2-t; 5) x bármely szám; 6) 3; 7) $0,5$; 8) nincs megoldás;
 9) $-\frac{1}{3}$; 10) 17; 11) 12; 12) $1\frac{3}{4}$; 13) -4 ; 14) 0; 15) 4. **208.** 1) -1 ;
 2) nincs megoldás; 3) 10; 4) nincs megoldás; 5) 4; 6) x bármely szám,
 kivéve a 0-át; 7) 6; 8) x bármely szám, kivéve a $-0,5$ -et; 9) -3 ; 3.
209. 7. **210.** 10. **212.** 1) $\frac{13}{4}$; 2) nincs megoldás; 3) 7; 4) 0; -2 ;
 5) nincs megoldás; 6) -17 ; 7) 0; 8) nincs megoldás. **213.** 1) 10; 2) $-0,5$;
 3) -3 ; 4) -4 ; 5) nincs megoldás; 6) -5 . **214.** 2 km/h. **215.** 29 km/h.
216. 9 km/h. **217.** 1) nincs megoldás; 2) 9; 3) 0. **218.** 1) $0,6$; 2) 0.
219. 1) Ha $a \neq 1$, akkor $x = 1$; ha $a = 1$, akkor nincs megoldás;
 2) ha $a \neq -5$, akkor $x = a$; ha $a = -5$, akkor nincs megoldás; 3) ha
 $a = 0$, akkor x – bármely szám, kivéve a 3-at; ha $a \neq 0$ és $a \neq 3$,
 akkor $x = a$; ha $a = 3$, akkor nincs megoldás; 4) ha $a \neq 7$, akkor
 $x = a$ vagy $x = 6$; ha $a = 7$, akkor $x = 6$; 5) ha $a \neq 4$ és $a \neq -2$,
 akkor $x = 4$ vagy $x = -2$; ha $a = 4$, akkor $x = -2$; ha $a = -2$, akkor
 $x = 4$; 6) ha $a \neq 4$ és $a \neq -2$, akkor $x = a$; ha $a = 4$ vagy $a = -2$,

akkor nincs megoldás. **220.** $a = 2$ vagy $a = -2$. **221.** $a = -9$ vagy $a = -3$ vagy $a = 0$. **222.** 70 000 lakos. **223.** 60 km. **251.** 1) 2,7; 2) $9\frac{47}{125}$. **258.** 5. **259.** 6. **265.** 31 darab vastömb. **266.** 80 000 lakos. **267.** 2 km. **280.** 6) $-\frac{1}{6}$; 7) $\frac{4}{9}$; 8) $\frac{4}{7}$. **281.** 5) 16; 6) 144. **291.** 1) -3; 2) -5; 3) -2; 4) -7; 5) 0; 6) 2. **292.** 1) 4; 2) 1; 3) -1; 4) 6. **295.** 8 perc. **296.** 5,34 kg. **297.** 81-szer. **298.** 1) $\frac{1}{a+b}$; 2) $-4b^2$; 3) $15c^3 + 5$; 4) $-\frac{1}{m^4}$. **299.** 1) $\frac{2a^2}{3a^2-1}$; 2) $\frac{1-6b}{2}$. **300.** 1) -1 vagy 0; 2) 3 vagy 4; 3) 4 vagy 5; 4) 2 vagy 3. **301.** 1) 6 vagy 7; 2) 4 vagy 5; 3) 4 vagy 5; 4) 4 vagy 5. **302.** 28; 8. **303.** 31,6%-kal. **304.** 5 óra 45 perc. **305.** Igen, 5 darab 5 hrvnyás címlet és 3 darab 2 hrvnyás címlet. **331.** 1) 2; 2) -1; 3) 3) nincs megoldás. **332.** 1) 2; 4) 2) -1; 1; 3) nincs megoldás. **345.** Nincs megoldás. **346.** 9%-kal csökkent. **347.** 36 érme, 24 érme. **348.** 12 km/h. **353.** 1) Nincs megoldás; 2) -1; 3) 3) 2. **354.** 1) -3; -1; 2) nincs megoldás; 3) -1. **369.** 4. **371.** 5 km/h, 3 km/h. **397.** 1) -10; 2) 25; 3) -23,8; 4) 13; 5) 216; 6) -20. **398.** 1) 13,4; 2) 21; 3) -20. **399.** 2) $x \leq 0$; 3) x - bármely szám; 4) $x = 0$; 5) $x \geq 8$; 6) $x \leq 8$; 9) x - bármely szám kivéve a 8-at; 10) $x \geq 0$ és $x \neq 9$; 11) $x \geq 0$; 12) $x = 0$; 13) x -nek nem létezik olyan értéke; 14) x - bármely szám; 15) $x = 0$; 16) x - bármely szám, kivéve a 0-t. **400.** 2) $y \leq 0$; 3) $y \geq 0$; 4) $y \leq 0$; 5) $y = 0$; 6) $y > 0$; 7) $y \geq 0$ és $y \neq 1$. **401.** 6) -10; 10. **402.** 4) -7; 7. **405.** 1) 167; 2) 2116; 3) nincs megoldás. **406.** 1) 4900; 2) nincs megoldás. **407.** 1) Ha $a \neq 0$ és $b \neq 0$, akkor a és b azonos előjelűek; ha $a = 0$, akkor b - bármely szám; ha $b = 0$, akkor a bármely szám; 3) ha $b \neq 0$, akkor $a \geq 0$; ha $b = 0$, akkor a bármely szám; 5) ha $a \neq 0$, akkor $b \leq 0$; ha $a = 0$, akkor b bármely szám. **408.** 2) *Útmutatás.* $x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1$. **409.** *Útmutatás.* $-x^2 + 6x - 12 = -(x - 3)^2 - 3$. **410.** 2) kifejezés. **411.** 1) 0; 2) nincs megoldás; 3) 1; 4) -2; 5) -1; 1; 6) 1. **412.** 1) 0; 2) nincs megoldás; 3) 1; 4) 3. **413.** 1) $a > -1$; 2) $a = -1$; 3) $a < -1$. **416.** 1) ha $a = 0$, akkor $x \geq 1$, ha $a \neq 0$, akkor $x = 1$; 2) ha $a = 1$, akkor x - bármely szám; ha $a \neq 1$, akkor $x = 0$; 3) ha $a = 0$, akkor $x \geq 1$; ha $a \neq 0$, akkor $x = 2$; 4) ha $a < 0$, akkor nincsenek gyökök; ha $a \geq 0$, akkor $x = a^2 + 2$. **417.** $a < 0$ vagy $a = 1$. **418.** 13. **419.** $\frac{a+10}{5-a}$. **420.** 10 darab

- 5 hrvnyás címlet, 20 hrvnyásból 21 címlet. **438. Útmutatás.** Legyen $\frac{m}{n}$ és $\frac{p}{q}$ az adott racionális szám. Akkor az összegük $\frac{mq+np}{nq}$, vagyis $\frac{s}{t}$, ahol $s \in \mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{N}$. **439. Útmutatás.** Ha feltételezzük, hogy az adott összeg racionális szám, akkor az adott irracionális szám megadható két racionális szám különbségeként. **440.** 1) Nem, például $\sqrt{3} + (-\sqrt{3}) = 0$; 2) nem, például $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = (\sqrt{3})^2 = 3$; 3) nem, például $\sqrt{3} \cdot 0 = 0$. **441.** A harmadik lépcsőházban, a hatodik emeleten. **442.** $\frac{b^2}{a}$. **444.** 18 l. **474.** 1) Nem létezik olyan x érték; 2) 3; 3) -1; 3. **475.** 1) -4; 2) 2. **476.** -4. **477.** 120 ha. **506.** 1) $6\sqrt{2}$; 2) $11\sqrt{2}$; 3) $10\sqrt{3}$; 4) $9\sqrt{5a}$; 5) $-a\sqrt{ab}$; 6) 0. **507.** 1) $-6\sqrt{3}$; 2) $6\sqrt{7b}$; 3) $10a^3\sqrt{a}$. **509.** 1) $16+\sqrt{3}$; 2) $-10\sqrt{5}-5$; 3) 1; 4) 1; 5) 4. **510.** 1) $10-4\sqrt{2}$; 2) 74; 3) 4; 4) 32. **517.** 1) $\sqrt{a}-2$; 2) $\frac{6}{m-2\sqrt{m}}$; 3) $\frac{4}{\sqrt{xy}}$; 4) $\frac{4\sqrt{a}}{16-a}$; 5) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{b}}$; 6) $\frac{\sqrt{ab}}{2}$; 7) $\frac{3\sqrt{c}}{\sqrt{c}+5}$; 8) $\sqrt{a}-1$; 9) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$; 10) $\sqrt{x}$. **518.** 1) $\frac{4}{a+\sqrt{a}}$; 2) $-\frac{1}{\sqrt{ab}}$; 3) $\frac{3}{\sqrt{y}}$; 4) $\sqrt{\frac{n}{m}}$; 5) $\sqrt{x}$; 6) $\frac{22}{9-a}$. **519.** 1) $m^4\sqrt{-m}$; 2) $a^2b^2\sqrt{b}$; 3) $T-2x^3\sqrt{y}$; 4) $m^3n^2\sqrt{mn}$; 5) $-3xy^7\sqrt{5x}$; 6) $8ab^4\sqrt{b}$; 7) $-11m^5b^9\sqrt{2m}$; 8) $mnp^7\sqrt{-p}$; **520.** 1) $-m^9\sqrt{-m}$; 2) $a^{11}b^{12}\sqrt{a}$; 3) $-7a\sqrt{b}$; 4) $a^4b^4\sqrt{ab}$; 5) $-3x^7y^{13}\sqrt{3x}$; 6) $-5m^3n^3p^3\sqrt{-2p}$. **521.** 2) Mivel a feltételek szerint $b \leq 0$, ezért $b\sqrt{-b} = -\sqrt{-b^3}$; 3) $\sqrt{c^7}$; 5) $-\sqrt{x^3y^5}$; 8) $\sqrt{a^3b^3}$. **522.** 2) $-\sqrt{54n^2}$; 3) $\sqrt{p^5}$; 6) $-\sqrt{5a^9b}$. **524.** 1) $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; 2) $\sqrt{a}$. **525.** 1) $\sqrt{2}+1$; 2) $\sqrt{3}+2$; 3) $\sqrt{6}+\sqrt{5}$. **526.** 1) $\sqrt{7}+1$; 2) $\sqrt{6}+3$; 3) $\sqrt{5}+\sqrt{2}$. **527.** 9. **530.** 1) $4+\sqrt{2}$; 2) $3\sqrt{3}+1$. **531.** 180 alkatrész. **532.** 25%-kal. **533.** 6 km/h, 2 km/h. **534.** 17 vagon. **552.** 1) 0; 1; 2) 0; 1; 3) nincs megoldás; 4) 1; 5) 4; 6) 1. **554.** 4) $5-2\sqrt{3}$. **555.** 2) $-\sqrt{2}$. **556.** 0. **Útmutatás.** Az egyenlet bal oldala csak nemnegatív értéket vesz fel, a jobb oldala csak nem

- pozitív. **561.** 1) $\sqrt{7}-1$; 2) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$; 3) $3-\sqrt{3}$; 4) $6-\sqrt{2}$.
562. 1) $\sqrt{5}-2$; 2) $\sqrt{5}-\sqrt{2}$; 3) $5-2\sqrt{3}$. **563.** Ha $a \geq 0$, akkor egy
gyök van, ha $a < 0$, akkor nincs megoldás. **564.** $2\sqrt{a}+1$, ha $a > 0$;
3, ha $0 \leq a \leq 1$. **565.** 12, ha $a > 36$; $2\sqrt{a}$, ha $0 \leq a \leq 36$.
566. 63 kg. **567.** 3 km/h. **569.** 1 óra 12 perc. **586.** 6; 7. **587.** 9; 10.
589. 1) 0; 14; 2) nincs megoldás. **590.** 1) 0; $\frac{4}{3}$; 2) $-2\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$.
596. -3; -2 vagy 3; 4. **597.** -1; 0 vagy 0; 1. **598.** 1) 4; 2) 0; -8;
3) -9; 9. **603.** 1) 0; -3; 3; 2) 0; 1; 3) 1; 4) -2; 2. **604.** 1) 0; 7;
-7; 2) 0; 5; -7; 3) -1,5; 1,5. **605.** 1) 2; 2) 3; 3) 0,5; -2; 4) nem létezik
ilyen érték. **606.** 1) $a = 4$, $x_2 = -4$; 2) $a = 0$, $x_2 = 2$ vagy $a = -1$,
 $x_2 = \frac{9}{4}$; $a = 3$, $x_2 = -2$. **610.** 35. **617.** 1) 1; $-\frac{7}{6}$; 2) 1; 9; 3) $\frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$.
618. 1) 2; $-\frac{7}{3}$; 2) -3; $\frac{1}{7}$. **619.** 1) 4; -3,5; 2) 1; $-\frac{1}{25}$; 3) 2; $\frac{4}{3}$;
4) $-3 \pm \sqrt{15}$; 5) 3; 6) $\frac{3 \pm \sqrt{21}}{6}$. **620.** 1) 3; 9; 2) $\frac{-2 \pm \sqrt{14}}{2}$; 3) nincs
megoldás. **621.** 7. **622.** 38 cm. **623.** 6 és 14 vagy -14 és -6.
624. 10; 11. **625.** 13; 14. **626.** 1) $\sqrt{5}$; $-\frac{3\sqrt{5}}{2}$; 2) -1; $\sqrt{6}$; 3) 6; $-\frac{2}{3}$;
4) -1; $\frac{31}{22}$. **627.** 1) $-\sqrt{2}$; $-2\sqrt{2}$; 2) 2; $\sqrt{3}$; 3) 1; $\frac{3}{8}$. **628.** -20; 4.
629. 1; $-\frac{4}{3}$. **630.** 8 cm. **631.** 6 cm vagy 12 cm. **632.** 16 cm, 30 cm.
633. 9 cm, 40 cm. **634.** 9; 11; 13. **635.** 4; 6; 8; 10. **637.** 16 majom
vagy 48 majom. **638.** 9 csapat. **639.** 15 oldal. **640.** 1) -8; -7; 0; 1;
2) -1; 1; 0,6; -0,6; 3) $-3 + \sqrt{14}$; 4) -2; 2; 5) 3; 5; -3; -5; 6) 2;
-2. **641.** 1) -12; 2; -2; -8; 2) 3; 3) 15; $-7 \pm \sqrt{34}$; 4) 9; -9.
642. 1) -10; 2) 3. **643.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) 3. **644.** 1) $b = -2$; 2) $b = -12$ vagy
 $b = 12$. **645.** 1) $b = 13,5$; 2) $b = -8$ vagy $b = 8$. **649.** 1) $x = 2a + 1$
vagy $x = a$; 2) $x = 2a$ vagy $x = 4$; 3) ha $a \neq 0$, akkor $x = \frac{25}{a}$ vagy
 $x = -\frac{1}{a}$; ha $a = 0$, akkor nincs megoldás; 4) ha $a = \frac{1}{2}$, akkor $x = \frac{1}{3}$,
ha $a \neq \frac{1}{2}$, akkor $x = \frac{1}{3}$ vagy $x = \frac{1}{2a-1}$. **650.** 1) $x = 3a - 5$ vagy

- $x = -a$; 2) $x = -3a$ vagy $x = 4$; 3) ha $a = 0$, akkor $x = 1$; ha $a \neq 0$, akkor $x = 1$ vagy $x = x = \frac{1}{a}$. **651.** 1) $b = 0$ vagy $b = -\frac{9}{7}$; 2) $b = -5$ vagy $b = 2\sqrt{6}$ vagy $b = -2\sqrt{6}$; 3) $b = 19$. **652.** 1) $b = 0$ vagy $b = -0,5$ vagy $b = 0,5$; 2) $b = -3$ vagy $b = -5$. **653.** $\frac{a-b}{a}$. **654.** 9. **655.** 4, $\sqrt{17}$, $3\sqrt{2}$. **656.** 45 tonna, 75 tonna. **657.** 14 lap. **671.** $x_2 = 10$, $q = -20$. **672.** $x_2 = -6$, $p = -1$. **673.** $x_2 = 2$, $b = 14$. **674.** $x_2 = 1,6$, $m = -1,28$. **675.** $-20,5$. **676.** -7 . **681.** $x_1 = 1$, $x_2 = 9$, $c = 9$. **682.** $x_1 = 14$, $x_2 = -6$, $a = 84$. **683.** $x_1 = 9$, $x_2 = -2$, $m = -18$. **684.** $x_1 = 1$, $x_2 = -5$, $n = -5$. **687.** 1) 1,5; 2) 69. *Útmutatás.* $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$; 3) 57; 4) 567. **688.** 1) 80; 2) $-\frac{57}{16}$; 3) $\sqrt{89}$. *Útmutatás.* $|x_2 - x_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2}$. **689.** $x^2 + 12x + 17 = 0$. **690.** $x^2 - 18x + 49 = 0$. **691.** $6x^2 - 14x + 3 = 0$. **692.** $x^2 - 15x + 8 = 0$. **693.** $a = 2$ vagy $a = -2$. **694.** $a = 6$ vagy $a = -6$. **696.** 1) 7; -7; 5; -5; 2) -11; 11; -1; 1; -4; 4. **697.** 1) -9; 9; -6; 6; 2) -17; 17; -7; 7; -3; 3. **698.** $b = c = 0$ vagy $b = 1$, $c = -2$. **699.** 1) $a = 2$; 2) nincs ilyen értéke az a -nak. **700.** $a = 2$. **702.** 4 sor, minden sorban 12 fa. **704.** 18%. **713.** 1) $\frac{2a-3}{a-6}$; 2) $\frac{b-3}{2b-1}$; 3) $\frac{c+1}{c-2}$; 4) $\frac{m^2+m+1}{m+10}$; 5) $-\frac{x+4}{x+8}$; 6) $\frac{1-4n}{5n+1}$. **714.** 1) $\frac{4x-3}{x-1}$; 2) $\frac{2y+5}{y-1}$; 3) $\frac{a+1}{a-5}$; 4) $\frac{3-b}{b-1}$. **715.** 1) -3; 2) -2; 3) $\frac{4}{3}$. **716.** 1) -4; 2) -14. **717.** 1) 1; 2) $\frac{2b+1}{b^2}$; 3) $-\frac{4}{c}$; 4) 4. **721.** 1) $(x-y)(x-5y)$; 2) $(a+9b)(a-4b)$; 3) $(3m+n)(m-3n)$; 4) $(4x-y)(x-y)$. **722.** 1) $(a-4b)(a-10b)$; 2) $(3b-2c)(4b+3c)$. **723.** 1) Ha $a = 3$, akkor x -bármely szám, ha $a = -2$, nincs megoldás, ha $a \neq 3$ és $a \neq -2$, akkor $x = \frac{a+3}{a+2}$; 2) ha $a = 7$, akkor x -bármely szám, ha $a = 1$, akkor nincs megoldás, ha $a \neq 7$ és $a \neq 1$, akkor $x = \frac{2a+1}{a-1}$. **724.** Ha $a = -8$, akkor x - bármely szám, ha $a = 1$, akkor nincs megoldás, ha $a \neq -8$ és $a \neq 1$, akkor $x = \frac{a+8}{a-1}$. **727.** 6,8%.

729. 1) nincs megoldás; 2) -4 ; 3); 4) y – bármely szám, kivéve $a - 4$ -et és az 5 -öt. 733. 1) -4 ; 1; 2) -1 ; 3) $-\frac{2}{3}$; 4) -2 ; 10; 5) 7; 6) -6 ; 7) -5 ; 10; 8) 5; 9) 2; 8; 10) -2 ; 9; 11) -3 ; 2; 12) 4; $-0,4$. 734. 1) -1 ; 2) $-0,25$; 3) $0,5$; 6; 4) 8; 5) -3 ; 6) -3 ; 12; 7) -1 ; $\frac{2}{7}$; 8) -3 ; 13. 739. 1) 6; 2) 5; 3) 7; 4) 6. 740. 1) 10; 2) -7 . 741. 1) $3 \pm \sqrt{18}$; 2) -23 ; 1; 3) -27 ; -1 ; 4) 3. 742. 1) 4; 9; 2) 5. 743. 1) -1 ; 18; 2) -98 ; 2; 3) $-1,5$; 4) -2 ; 5) -3 ; 4; 6) -3 ; 7) 2; 8) 9; 9) 1; 10) 9. 744. 1) -60 ; 50; 2) -3 ; 3) -9 ; 24; 4) 2; 5) -20 ; 2; 6) 15. 745. 1) $-\frac{2}{3}$; 14; 2) -56 ; 60. 746. 1) -15 ; 12; 2) -20 ; 2. 747. 1) -5 ; 2) nincs megoldás; 3) $3\frac{1}{3}$; 4) 1. 748. 1) -15 ; 1; 2) $1,5$. 749. 1) $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; -3 ; 3; 2) -6 ; -4 ; -1 ; 1; 3) 0; 3; 4) -1 ; -3 ; 1. 750. 1) $-\frac{1}{3}$; 1; 2) $0,5$. 751. 1) -1 ; 7; 2; 4; 2) -6 ; -2 ; $-4 \pm \sqrt{20}$; 3) -2 ; 1; 4) $-\frac{5}{3}$; 10. 752. 1) Ha $a = 1$, akkor $x = 7$; ha $a = 7$, akkor $x = 1$; ha $a \neq 1$ és $a \neq 7$, akkor $x = 1$ vagy $x = 7$; 2) ha $a \neq 1$ és $a \neq 7$, akkor $x = a$; ha $a = 1$ vagy $a = 7$, akkor nincs megoldás; 3) ha $a \neq 2$ és $a \neq \frac{2}{3}$, akkor $x = 3a$ vagy $x = 2$; ha $a = 2$ vagy $a = \frac{2}{3}$, akkor $x = 2$; 4) ha $a = 0$, akkor x – bármely szám, kivéve $a - 3$ -t; ha $a = -3$, akkor nincs megoldás; ha $a \neq 0$ és $a \neq -3$, akkor $x = a$. 753. $a = 2\sqrt{5}$ vagy $a = -2\sqrt{5}$ vagy $a = 6$. 758. 75 km/h. 759. 50 km/h, 60 km/h. 760. 80 km/h, 60 km/h. 761. 80 km/h. 762. 12 km/h. 763. 12 oldal. 764. 30 m³, 25 m³. 765. 6 nap. 766. 31 km/h. 767. 10 km/h. 768. 3 km/h. 769. 2 km/h vagy 2,25 km/h. 770. 60 km/h, 40 km/h. 771. 60 km/h. 772. 60 km/h. 773. 8 km/h. 774. 32 km/h. 775. $\frac{1}{4}$. 776. $\frac{7}{12}$. 777. 45 nap, 36 nap. 778. 15 óra, 10 óra. 779. 21 óra, 24 óra. 780. 80 g. 781. 30 kg. 782. 3 km/h. 783. 5 óra. 784. 4 óra, 6 óra, 12 óra. 785. 80 km/h.

786. 24 alkatrész. 787. 12 óra. 789. 6. 804. 3) $\frac{8}{3}$. 810. 4) 1, 2, 3.

813. $\frac{4}{a(a+12)}$. 814. Útmutatás. Vizsgáljátok a két oldal különbségét!

867. $\frac{\sqrt{50}-\sqrt{2}}{3}$. 890. 1) -5; 5; -1; 1; 2) -10; 10; -22; 22. 891. $a = 1$.

892. $a = 3$.

Az Ellenőrizték magatokat! feladatsorok megoldása

A tesztek száma	A tesztfeladatok sorszáma											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	B	C	A	A	D	A	C	D	C	D	B	C
2	B	D	B	D	A	A	C	B	C	B	C	A
3	C	D	C	B	C	A	B	B	D	A	A	D
4	C	B	B	C	C	A	C	D	C	C	A	B
5	C	D	D	C	A	B	A	B	A	D	B	A
6	D	C	A	B	A	C	A	C	A	D	B	C

Tárgymutató

A			
alaptulajdonság		– természetes számoké	108
– racionális törtkifejezése	11	– racionális számoké	109
arányosság	78	– valós számoké	111
– egyenes	78	hatvány	
– fordított	79	– egész kitevőjű	63
azonosság	11	– negatív egész kitevőjű	62
		– nulla kitevőjű	62
		hiperbola	81
		– ágai	81
D			
diszkrimináns		K	
– egyenleté	177	kifejezések	
– másodfokú polinomé	177	– azonosan egyenlő	11
		– egész	6
		– tört	5
E			
Egyenlet		M	
– bikvadrátikus	149	másodfokú egyenlet	
– ekvivalens	52	– diszkriminánssa	157
– grafikus megoldása	82	– gyökképlete	158
– másodfokú	149	– megoldóképlete	150
– – redukált	150		
– – hiányos	150		
– racionális	53		
GY		N	
gyökvonás	97	négyzetgyök	97
gyök alatti kifejezés	97	négyzetgyökjel	97
gyökképlet, másodfokú		nevező gyöktelenítése	129
egyenleté	157	normálalak	63
H		P	
halmaz		parabola	92
– egész számoké	108	– ágai	92
		– csúcsa	92

polinom		T	
– lineáris tényezőkre		tényező bevitele a gyökjel	
bontása	177	alá	126
– másodfokú	157	tényező kiemelése a gyökjel	
		alól	126
R		tizedestört	
raciónalis kifejezések	6	–, végtelen	110
raciónalis tört	6	–, – szakaszos	110
részhalmaz	109	–, – nem szakaszos	111
		tört alatti kifejezés	97
		tört szakasza	109
SZ		V	
szám normálalakja	63	valós számok halmaza	111
számok		változók megengedett	
– egész	108	értékei	6
– irracionális	110	Viete tétele	167
– racionális	109	– megfordítása	168
– természetes	108		
– valós	111		
számtani négyzetgyök	97		

Melléklet. Tanmenetjavaslat

Sorszám	Tananyag	Óraszám
I. Algebrai törtkifejezések (32. óra)		
1	Törtkifejezések	2
2	A törtkifejezések alaptulajdonsága	2
3	Azonos nevezőjű törtkifejezések összeadása és kivonása	2
4	Különböző nevezőjű törtkifejezések összeadása és kivonása	4
5	1. számú témazáró dolgozat	1
6	Törtkifejezések osztása és szorzása. Törtkifejezés hatványra emelése	3
7	Törtkifejezések azonos átalakításai	5
8	2. számú témazáró dolgozat	1
9	Azonosan egyenlő, ekvivalens egyenletek. Törtes egyenletek	2
10	Negatív egész kitevőjű hatvány	3
11	Az egész kitevőjű hatvány azonosságai	3
12	Az $y = \frac{k}{x}$ függvény és grafikonja	3
13	3. számú témazáró dolgozat	1
II. Négyzetgyök. Valós számok (14 óra)		
14	Az $y = x^2$ függvény és grafikonja	2
15	Négyzetgyök. Számtani négyzetgyök	2
16	Számhalmazok	2
17	A számtani négyzetgyökkvonás azonosságai	2
18	Négyzetgyökös kifejezések azonos átalakításai	3
19	Az $y = \sqrt{x}$ függvény és grafikonja	2
20	4. számú témazáró dolgozat	1

A táblázat folytatása

Sorszám	Tananyag	Óraszám
III. Másodfokú egyenletek (18 óra)		
21	Másodfokú egyenletek. Hiányos másodfokú egyenletek megoldása	2
22	A másodfokú egyenlet megoldóképlete	4
23	Viete tétele	2
24	5. számú témazáró dolgozat	1
25	Másodfokú polinom	2
26	Másodfokúra visszavezethető egyenletek megoldása	3
27	Egyenlettel megoldható szöveges feladatok (Az egyenlet, mint egy valós probléma matematikai modellje)	3
28	6. számú témazáró dolgozat	1
A tananyag ismétlése és rendszerezése (6 óra)		

Tartalomjegyzék

A szerzőktől	3
--------------------	---

1. §. RACIONÁLIS KIFEJEZÉSEK

1. Racionális törtek	5
2. A racionális törtek alaptulajdonsága	10
3. Egyenlő nevezőjű racionális törtek összeadása és kivonása	21
4. Különböző nevezőjű racionális törtek összeadása és kivonása	26
<i>Ellenőrizték magukat! 1. sz. tesztfeladat</i>	34
5. Racionális törtek szorzása és osztása. Racionális törtek hatványozása	36
6. Racionális kifejezések azonos átalakításai	43
<i>Ellenőrizték magukat! 2. sz. tesztfeladat</i>	50
7. Ekvivalens (egyenértékű) egyenletek. Racionális egyenletek	52
8. Negatív egész kitevős hatvány	61
9. Az egész kitevőjű hatvány tulajdonságai	70
10. Az $y = \frac{k}{x}$ képlettel megadott függvény és grafikonja	78
<i>Ellenőrizték magukat! 3. sz. tesztfeladat</i>	88

2. §. NÉGYZETGYÖK. VALÓS SZÁMOK

11. A másodfokú függvény $y = x^2$ és grafikonja	91
12. Négyzetgyök. Számítási négyzetgyök	96
• Teremhetnek-e a veteményesekben gyökök?	107
13. Számhalmazok	108
• Az irracionalitás felfedezése	116
14. A számítási négyzetgyök tulajdonságai. A gyökvonás azonosságai	118

15. Négyzetgyökök tartalmazó kifejezések azonos átalakításai	126
16. A négyzetgyökfüggvény és grafikonja	139
<i>Ellenőrizték magatokat! 4. sz. tesztfeladat</i>	146

3. §. A MÁSODFOKÚ EGYENLET

17. Másodfokú egyenletek.	
A nem teljes másodfokú egyenletek megoldása	149
18. A másodfokú egyenlet megoldóképlete	157
19. Viete tétele	167
<i>Ellenőrizték magatokat! 5. sz. tesztfeladat</i>	175
20. Másodfokú polinom	177
21. Másodfokúra visszavezethető egyenletek megoldása	183
• Egyenletek megoldása új változó bevezetésével	190
• Scipione del Ferro titkos fegyvere	193
22. A racionális egyenlet, mint a reális problémák matematikai modellje	195
<i>Ellenőrizték magatokat! 6. sz. tesztfeladat</i>	202
Ismétlő feladatok a 8. osztály tananyagához	206
A 7. osztályban tanultak ismételése	224
Feleletek és útmutatók	239
<i>Az Ellenőrizték magatokat! feladatsorok megoldása</i> ...	247
Tárgymutató	248
Melléklet.	
Tanmenetjavaslat	250



A SZERZŐKRŐL

Arkagyij Merzljak, több mint 40 matematika-tankönyv és segédkönyv szerzője, Ukrajna kiváló oktatási dolgozója, módszertani szakember, a Kijev-Pecszerszki 171. számú *Lider* líceum matematika-tanára.

Vitalij Polonszkij, több mint 50 matematika-tankönyv, könyv és cikk szerzője, Ukrajna érdemes tanára, a Kijev-Pecszerszki 171. számú *Lider* líceum matematika-tanára.

Mihajlo Jakir, több mint 50 matematika-tankönyv, könyv és cikk szerzője, Ukrajna érdemes tanára, *Kimagasló érdem*kért érdemrend II. és III. fokozatának kitüntetettje, a Kijev-Pecszerszki 171. számú *Lider* líceum matematika-tanára.

Навчальне видання

МЕРЗЛЯК Аркадій Григорович
ПОЛОНСЬКИЙ Віталій Борисович
ЯКІР Михайло Семенович

АЛГЕБРА

*Підручник для 8 класу
загальноосвітніх навчальних закладів України
з навчанням угорською мовою*

*Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України*

Видано за рахунок державних коштів.

Продаж заборонено

Переклад з української:
Юдит Імрїївна Кулін

Угорською мовою

Зав. редакцією *А. А. Варга*

Редактор *Б. Б. Ковач*

Художник *С. Е. Кулинич*

Коректор *І. О. Петро*

Підписано до друку 17.09.2008. Формат 60×90/16. Гарнітура Таймс.

Папір офс. Друк офс. Умов. друк. арк. 16.0.

Обл.-вид. арк. 15,95. Тираж 2260. прим. Зам. _____

Видавництво „Оріяна-Нова”

79017 м. Львів.

вул. Коциловського, 10.

Друк ТОВ “Папірус-Ф”

88000 м. Ужгород. вул. Лермонтова. 25.

Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С.

М52 Алгебра: Підруч. для 8 кл. загальноосвітніх навчальних закладів України з навчанням угорською мовою / Переклад угорською мовою Ю. І. Кулін – Львів: Оріяна-Нова, 2008. – 256 с.

ISBN 978-966-2128-13-0.

УДК 373:512
ББК 22.141.я721