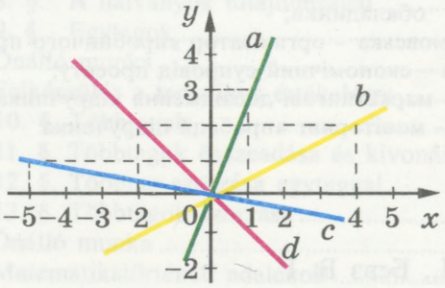
H. P. Bevz, V. H. Bevz

Algebra

Tankönyv az általános oktatási rendszerű tanintézetek 7. osztálya számára

Ajánlotta Ukrajna Oktatási és Tudományos Minisztériuma



Ez a tankönyv a 2007. évi összukrajnai tankönyvpályázat nyertese, amelyet Ukrajna Oktatási és Tudományos Minisztériuma hirdetett meg a tizenkétosztályos iskolák tankönyvellátása céljából

ЛЬВІВ
"СВІТ"
2007

ББК 22.1я721
Б36

Перекладено з видання:

Бевз Г. П., Бевз В. Г. Алгебра: Підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. – К.: Зодіак-ЕКО, 2007.

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України (рішення колегії Міністерства освіти і науки України від 12 квітня 2007 р., протокол № 5/1-19)

Видано за рахунок державних коштів.

Продаж заборонено

ТВОРЧА ГРУПА РОЗРОБНИКІВ ПІДРУЧНИКА

Юрій Кузнецов – керівник проекту, розробник концепцій: структури, дизайну;
Григорій Бевз, Валентина Бевз - автори тексту і методичного апарату;
Олег Костенко – заступник керівника проекту;
Наталія Демиденко – редактор-організатор, контрольне редагування;
Андрій Віксенко – розробник макета, художнього оформлення, художник обкладинки;
Валентина Максимовська – організатор виробничого процесу;
Галина Кузнєцова – економічний супровід проекту;
Роман Костенко – маркетингові дослідження підручника;
Андрій Кузнецов – моніторинг апробації підручника

Бевз Г. П., Бевз В. Г.
Б36 Алгебра: Підручник для 7 кл. загальноосвітніх навчальних закладів з навчанням угорською мовою / Переклад угорською мовою Є. Є. Ґулачі. – Львів: Світ, 2007. – 304 с.: іл.

ISBN 978-966-603-518-2.

ББК22.1я721

© Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, 2007
© Видавництво "Зодіак-ЕКО", 2007
© Художнє оформлення, А. М. Віксенко, 2007
© Концепції: структури, дизайну, Ю. Б. Кузнецов, 2007
© Є. Є. Гулачі, переклад, 2007

ISBN 978-966-603-518-2 (угор.)
ISBN 978-966-7090-46-3 (укр.)

TARTALOMJEGYZÉK

Kedves hetedikesek! 5

1. fejezet



LINEÁRIS EGYVÁLTOZÓS EGYENLETEK

1. §. Az egyenletek általános fogalma 7
2. §. Egyenértékű egyenletek 14
3. §. Lineáris egyenletek 21
4. §. Feladatok megoldása egyenletek segítségével 27

Önálló munka 38
Matematikatörténeti adalékok 39
Az 1. fejezet tananyagának összefoglalása 40
Önellenőrző kérdések 41
Felkészülés a temetikus értékelésre 42

2. fejezet



EGÉSZ KIFEJEZÉSEK

5. §. Változókat tartalmazó kifejezések 45
6. §. Azonos kifejezések 52
7. §. Hatványokat tartalmazó kifejezések 58
8. §. A hatványok tulajdonságai 67
9. §. Egytagok 74

Önálló munka 81
Felkészülés a tematikus értékelésre 82
10. §. Többtagok 84
11. §. Többtagok összeadása és kivonása 91
12. §. Többtag szorzása egytaggal 98
13. §. Többtagok szorzása 105

Önálló munka 112
Matematikatörténeti adalékok 113
A 2. fejezet tananyagának összefoglalása 114
Önellenőrző kérdések 115
Felkészülés a tematikus értékelésre 116

3. fejezet



TÖBBTAGOK TÉNYEZŐKRE BONTÁSA

14. §. A közös tényező kiemelése a zárójel elé 119
15. §. Csoportosítási módszer 126
16. §. Kéttag négyzete 131
17. §. A négyzetek különbsége 140

Önálló munka 147
Felkészülés a tematikus értékelésre 148
18. §. A rövidített szorzás képleteinek alkalmazása 150
19. §. A köbök különbsége és összege 157

20. §. A többtagok tényezőkre bontásának különböző módszerei és alkalmazásuk 164
Önálló munka 172
Matematikatörténeti adalékok 173
A 3. fejezet tananyagának összefoglalása 174
Önellenőrző kérdések 175
Felkészülés a tematikus értékelésre 176

4. fejezet



FÜGGVÉNYEK

21. §. Mi a függvény? 179
22. §. A függvénygörbe 188
23. §. Lineáris függvény 199
Önálló munka 208
Matematikatörténeti adalékok 209
A 4. fejezet tananyagának összefoglalása 210
Önellenőrző kérdések 211
Felkészülés a tematikus értékelésre 212

5. fejezet



LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK

24. §. Kétváltozós egyenletek 215
25. §. A kétváltozós lineáris egyenlet görbéje 221
26. §. Egyenletrendszerek 228
27. §. Behelyettesítő módszer 235
28. §. Egyenlő együtthatók módszere 241
29. §. Feladatok megoldása egyenletrendszerek segítségével 249
Önálló munka 258
Matematikatörténeti adalékok 259
A 5. fejezet tananyagának összefoglalása 260
Önellenőrző kérdések 261
Felkészülés a tematikus értékelésre 262

ISMÉTLŐ FELADATOK ÉS GYAKORLATOK

Egyenletek 264
Egész kifejezések 266
Többtagok tényezőkre bontása 270
Függvények 271
Egyenletrendszerek 272

Emelt szintű feladatok 275

5–6. osztályos matematikai ismeretek 278

Feladatok és gyakorlatok megoldása 289

Tárgymutató 302

Kedves hetedikesek!

Az a l g e b r a a matematikatudomány része, amely a számtannal és mértannal együtt a legrégebben alakult ki. A korábbi osztályok matematikaóráin elsősorban számtani tudásra tettetek szert, elsajátítottátok a számokkal és a számtani műveletekkel kapcsolatos ismereteket. Mostantól elkezditek az algebra tanulását.

Az algebra ismerete nem csak a legjobb módszereket biztosítja számotokra ahhoz, hogy meg tudjátok oldani a legnehezebb feladatokat is, hanem elősegíti a különböző tudományágak, műszaki területek szakemberei által használt matematikai nyelv elsajátítását. Az algebra tartalmilag rendkívül gazdag és nagyon fontos tudományág. Az iskola befejezéséig fogjátok tanulni, sőt a tovább tanulók a felsőfokú oktatási intézményekben is folytatják a vele való ismerkedést magasabb szinten.

Az iskolai algebra elsajátításában pótolhatatlan segédeszközötök lesz ez a tankönyv. Elméleti részeinek a tanulmányozása során különleges figyelmet kell fordítanotok a *dőlt* betűkkel szedett szavakra. Az így kiemelt szavak matematikai kifejezések. Ezeket tudnotok kell értelmezni, és meg kell jegyeznetek őket. A félkövér betűkkel kiemelt mondatok – szabályok vagy fontos matematikai állítások. Ezeket is meg kell jegyeznetek, és tudnotok kell alkalmazni őket.

Minden paragrafus végén megtalálható a „Szeretnétek többet megtudni?" rubrika, amelyben a matematika iránt komolyabban érdeklődő tanulók találhatnak bővebb ismereteket. Az „Ellenőrizzétek magatokat!" rész kérdéseinek megválaszolásával rögzíthetitek, általánosíthatjátok és rendszerezhetitek az adott témakör tanulása során megszerzett tudásotokat, jártasságaitokat és készségeiteket. Az „Oldjuk meg együtt!" rubrikában a legfontosabb gyakorlati feladatok megoldására találtok példákat. Ezekkel ajánlatos még azt megelőzően megismerkednetek, hogy hozzákezdtek a házi feladat (amit egy  jelöl) elkészítéséhez.

A tankönyv különböző nehézségi fokozatú gyakorlatokat is tartalmaz a szóbeli feladatoktól kezdve a meglehetősen nehéz példákig, feladatokig. Az utóbbiak sorszáma után csillag (*) található. Ezeket a példákat és feladatokat elsősorban azoknak a tanulóknak kell megoldaniuk, akik később matematikai tagozatú osztályban szeretnék folytatni tanulmányaikat. A matematika-tudásotok értékelésére való jó felkészülést és komoly tanulmányi eredmények elérését a megfelelő rubrikák anyagának elsajátítása segíti elő. A „Matematikatörténeti adalékok" című rész minden tanuló látókörének szélesítését szolgálja.

Sok sikert a tanuláshoz!

1. FEJEZET

LINEÁRIS EGYVÁLTOZÓS EGYENLETEK



Az algebrával kezdődhet csak el az igazi matematika-oktatás.

M. I. Lobacsevszkij

Az **egyenlet** nem csak a matematika, hanem sok más alkalmazott tudomány egyik legfontosabb fogalma. Az egyenlet a legjobban alkalmazható matematikai modell, a legnehezebb feladatok megoldásának legjobb eszköze. Képletesen szólva: az egyenlet olyan kulcs, amely az ismeretlenbe nyíló ajtók ezreit nyitja.

Ebben a fejezetben a következőkről lesz szó:

- **az egyenletek általános fogalma;**
- **egyenértékű egyenletek;**
- **lineáris egyenletek;**
- **feladatok megoldása egyenletek segítségével.**

1. §. AZ EGYENLETEK ÁLTALÁNOS FOGALMA



Az algebra évszázadokon át egyenletekkel foglalkozó tudományként fejlődött[1].

Az egyenlet betűkkel jelölt ismeretlen számokat tartalmazó egyenlőség.

Az ismeretlen számokat *változóknak* nevezzük, amelyeket általában x, y, z betűkkel jelölnek, de más betűk is használhatók.

Egyenletek példái: $x + 5 = 0$; $2y - 3 = 7y$; $x^2 = 9$; $y^2(z - 1) = 0$.

Minden egyenletnek van bal és jobb oldali része. Például:

$$\underbrace{5x - 27}_{\text{bal oldali rész}} = \underbrace{3x + 15}_{\text{jobb oldali rész}} \qquad \underbrace{5x,\ -27,\ 3x,\ 15}_{\text{az egyenlet tagjai}}$$

Vizsgáljuk meg a $13x - 30 = 7x$ egyenletet. Ha az x változót 5-tel helyettesítjük, akkor egy igaz számegyenlőséget kapunk: $13 \cdot 5 - 30 = 7 \cdot 5$. Ekkor azt mondjuk, hogy az 5 kielégíti az adott egyenletet.

[1] Történelmi áttekintés az egyenletek fejlődéséről a 16. és 39. oldalon található.

Azt a számot, amely kielégíti az egyenletet, az egyenlet gyökének vagy megoldásának nevezzük.

A $13x - 30 = 7x$ egyenletnek csak egy gyöke van: $x = 5$.

Az $x(x - 2)(x + 3) = 0$ egyenletnek három gyöke van: $x = 0$, $x = 2$, $x = -3$.

Az $x + 7 = x$ egyenletnek nincs egyetlen gyöke sem, mert az x változó bármely értékével az $x + 7$ szám 7-tel nagyobb, mint az x. A $2x + 3 = 1 + 2(x + 1)$ egyenletnek végtelen számú gyöke van

Megoldani az egyenletet azt jelenti, hogy meghatározzák mindegyik gyökét vagy bebizonyítják, hogy nincs megoldása.

A legegyszerűbb egyenletek az összeadandók és az összeg vagy a szorzók és a szorzat közötti ismert összefüggések alapján oldhatók meg.

Példa. Oldjuk meg a $31 - 3x = 19$ egyenletet.

Megoldás. Itt a kivonandó az ismeretlen. Meghatározásához a kisebbítendőből ki kell vonni a különbséget:

$$3x = 31 - 19, \text{ vagyis } 3x = 12.$$

A kapott egyenletben az x szorzó az ismeretlen. Ennek meghatározására a szorzatot osztjuk az ismert szorzandóval:

$$x = 12 : 3, \; x = 4.$$

Felelet: $x = 4$.

Az egyenlet különleges keresztrejtvény. Csak annak négyzeteibe betűket kell írni, hogy megkapjuk a keresett szót, az egyenletbe a változók helyére pedig számokat helyettesítünk, hogy igaz egyenlőséget kapjunk. Például a $9x + 39 = 5 - 8x$ egyenletet át lehet írni keresztrejtvény alakban:

$$9 \cdot \square + 39 = 5 - 8 \cdot \square.$$

Milyen számot kell a négyzetekbe írni, hogy igaz egyenlőséget kapjunk?

Szeretnétek többet megtudni?

Különféle egyenlettípusok léteznek, amelyekben például az ismeretlen változó négyzeten, köbön vagy modulus jel alatt van. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket!

1) $x^2 - 9 = 0$; 2) $3x^3 = 24$; 3) $|x - 2| = 5$.

1) Feleljünk a következő kérdésre: melyik számot kell négyzetre emelni, hogy 9-et kapjunk? Két ilyen szám a 3 és a –3. Ezek lesznek az adott egyenlet gyökei vagy megoldásai.

2) Osszuk el 3-mal a $3x^3 = 24$ egyenlet mindkét oldalát! Ekkor a következőt kapjuk: $x^3 = 8$. Mely szám köbe 8? Ez a szám a 2. Vagyis az adott egyenlet megoldása: $x = 2$.

3) Ha az $x - 2$ szám modulusa 5-tel egyenlő, akkor ez a szám 5-tel vagy -5-tel egyenlő.

A következőt kapjuk: $x - 2 = 5$, ahonnan $x = 7$ vagy $x - 2 = -5$, ahonnan $x = -3$.

Vagyis az $|x - 2| = 5$ egyenletnek két gyöke van: $x = 7$ és $x = -3$.

Ellenőrizzétek magatokat!

1. Mit nevezünk egyenletnek?
2. Mit nevezünk az egyenlet gyökének vagy megoldásának?
3. Mit értünk azon, hogy „megoldani az egyenletet”?
4. Milyen két részből áll az egyenlet?

Oldjuk meg együtt!

1. Oldjuk meg a $3(1 - 3x) = 75$ egyenletet!

✔ M e g o l d á s.

Első módszer

$3 - 9x = 75,$
$-9x = 72,$
$x = 72 : (-9),$
$x = -8.$

Második módszer

$1 - 3x = 75 : 3,$
$1 - 3x = 25,$
$-3x = 24,$
$x = -8.$

2. Gondoltam egy számot, amit ha megszorzok hárommal, és az eredményből kivonok négyet, akkor ötöt kapok. Milyen számra gondoltam?

✔ M e g o l d á s. Jelöljük a keresett számot x-szel. Ha hárommal megszorozzuk, akkor $3x$-et kapunk. Kivonunk belőle 4-et, az eredmény $3x - 4$. A feladat feltételének megfelelően: $3x - 4 = 5$.

Megoldjuk a kapott egyenletet: $3x = 5 + 4$, $3x = 9$, $x = 3$.

F e l e l e t. A 3-as számra gondoltam.

3. Az a mely értéke mellett lesz az $(a + 5) \cdot x = 12$ egyenlet gyöke $x = 3$-mal egyenlő?

✔ M e g o l d á s.

E l s ő m ó d s z e r. Meghatározzuk az x ismeretlen szorzót, ami nem más, mint 12-nek az ismert $a + 5$ szorzóval való osztásakor kapott hányados:

$$x = 12 : (a + 5).$$

Ha $x = 3$, akkor $12 : (a + 5) = 3$, ahonnan $a + 5 = 12 : 3$, $a = -1$.

M á s o d i k m ó d s z e r. Az $(a + 5) \cdot x = 12$ egyenletben az x változót 3-mal helyettesítjük:

$$(a + 5) \cdot 3 = 12.$$

Megoldjuk a kapott egyenletet az a változó szerint. A következőt kapjuk:

$a + 5 = 12 : 3$, ahonnan $a = -1$.

F e l e l e t. Ha $a = -1$, akkor az $(a + 5) \cdot x = 12$ egyenlet gyöke $x = 3$ lesz.

Oldjátok meg fejben!

1. Oldjátok meg az egyenleteket!

a) $x + 10 = 23$; b) $x - 10 = 15$; c) $x + 7 = 13$;
d) $2x + 10 = 30$; e) $3x - 5 = 40$; f) $4x - 8 = 0$;
g) $10y = 70$; h) $10y = -3$; i) $-y = 15$;
j) $x(x - 3) = 0$; k) $(x + 5)x = 0$; l) $-3{,}5x^2 = 0$.

2. Nevezzétek meg az egyenletek bal és jobb oldali részeit és azok tagjait!

a) $5x + 7 = 3x - 2$; b) $0{,}5x = 4{,}7x + 8$; c) $4y + 12 = 0$.

3. Magyarázzátok meg, miért nincs megoldásuk az alábbi egyenleteknek!

a) $x + 15 = x$; b) $3x - 7 = 3x$; c) $17 - x = 5 - x$.

4. Magyarázzátok meg, miért van végtelen számú megoldásuk az alábbi egyenleteknek!

a) $3x = 2x + x$; b) $6y = 7y - y$; c) $8z + 2 = 3z + 2 + 5z$.

5. Magyarázzátok meg, miért nincs megoldásuk az alábbi egyenleteknek!

a) $x^2 + 1 = 0$; b) $x^2 + 8 = 7$;
c) $2x^2 + 3 = -7$; d) $(x + 2)^2 = -4$.

6. Kielégíti-e a 12 az alábbi egyenleteket?

a) $x - 5 = 7$; b) $x^2 = 144$;
c) $3x + 4 = 40$; d) $0{,}5x + 5 = 11$.

7. Oldjátok meg az alábbi egyenletet!

a) $x^2 = 16$; b) $x^3 = 8$; c) $x^2 = 0{,}01$; d) $2x^2 = 18$.

A szint

Oldjátok meg a 8–10. egyenleteket!

8. a) $25 + x = 37$; b) $x - 12 = 23$; c) $24 - x = 18$;
d) $3{,}7 - x = 1{,}9$; e) $1 = \frac{2}{3} + x$; f) $13 = 74 - x$.

9. a) $6x = 30$; b) $5y = 0$; c) $4z = -8$;
d) $2x + 3 = 19$; e) $3y - 4 = 1$; f) $1 - 3x = 25$.

10. a) $\frac{2}{3}x = 5$; b) $-\frac{5}{7}y = 1$; c) $1 - \frac{3}{4}x = \frac{5}{8}$.

11. Írjátok fel az egyenletek valamennyi tagját!
a) $3x - 5 = 12$; b) $18 - 5x = 4 + 2x$; c) $0{,}8x + 3 = 4{,}6$.

12. Írjátok fel az egyenletek jobb és bal oldali részeit!
a) $2x + 35 = 24$; b) $47y - 15 = 83$; c) $34z - 15 = 28z + 3$.

13. Milyen számokat kell a négyzetekbe írni, hogy igazi egyenlőséget kapjatok?
a) $3 \cdot \square + 11 = 32$; b) $2 \cdot \square - 9 = 15 - \square$.

14. Igazoljátok, hogy a következő egyenletek esetében!
a) $x - 2 = 3x$ – a megoldás $x = -1$;
b) $8z - 5 = 5z$ – a megoldás $z = \frac{5}{3}$.

15. Igazoljátok, hogy a következő egyenletek esetében!
a) $x(x - 3) = 0$ – a megoldás $x = 0$ és $x = 3$;
b) $z(z - 2)(z + 3) = 0$ – a megoldás $z = 0$, $z = 2$ és $z = -3$.

16. A –2, –1, 0, 1, 2 számok közül melyek elégítik ki az alábbi egyenleteket?
a) $x(3x - 1) = 0$; b) $(2n + 2)n = 0$.

17. Oldjátok meg az alábbi egyenleteket, és ellenőrizzétek a megoldásokat!
a) $x - (3 - 2x) = 9$; b) $8 - (3x - 2) = 13$; c) $3(x - 2) = 27$.

Oldjátok meg a 18–23. egyenleteket!

18. a) $2(x - 3) = 36$; b) $4(5 - x) = 12$; c) $0{,}1(x + 1) = 1$.

19. a) $3(x + 5) = 27$; b) $5(x - 3) = 15$; c) $8(3 - x) = 40$.

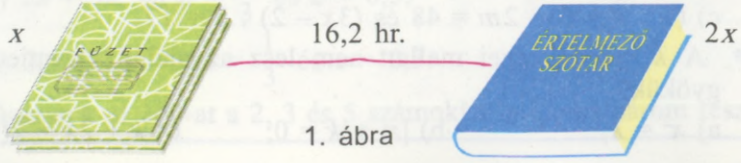
20. a) $4(x + 1) + 11 = 31$; b) $16 + 3(z - 2) = 1$;
c) $5(y - 3) - 12 = 73$; d) $47 + 2(x + 4) = 7$.

21. a) $5(2x - 3) = 50$; b) $37(8x - 23) = 37$;
c) $52(17 - 8x) = 52$; d) $84(37 - 17z) = 168$.

22. a) $3x + (7 - x) = 10$; b) $2x - (3 - x) = 18$;
c) $8z - (5 - 3z) = 17$; d) $12y + (5 - 2y) = -15$.

23. a) $2x - (x - 3) = 20$; b) $5 - (4y - y) = 10$;
c) $4z - (7 + 3z) = 2$; d) $17y + (8 - 15y) = 4$.

24. Állítsatok fel egyenletet az alábbi ábra alapján, és oldjátok meg azt!



1. ábra

Oldjátok meg a 25–26. feladatokat egyenletek segítségével!

25. Ha egy gondolt számot megszoroztok 3-mal, majd hozzáadtok 18-at, akkor 63-at kaptok. Keressétek meg a gondolt számot!

26. Gondoltam egy számot. Ha megszorzom 7-tel, s a kapott szorzatból kivonok 16-ot, akkor 33-at kapok. Milyen számra gondoltam?

B szint

Oldjátok meg a 27–29. egyenleteket!

27. a) $\frac{2}{3}(6 - 9x) = 15$; b) $\frac{3}{4}(12 - x) = \frac{3}{2}$; c) $\frac{2}{5}(8 - 5x) = \frac{1}{5}$.

28. a) $(3x - 2) : 2 = 18$; b) $(5x - 3) : 3 = 9$; c) $(41 - x) : 9 = 4$.

29. a) $2(3x - 2) + 4 = 30$; b) $3(2 - x) + 25 = 28$;
c) $\frac{2}{3}(x - 4) + \frac{1}{3} = 5$; d) $\frac{3}{7}(1 - 2x) + \frac{1}{7} = -2$.

Aránypárok alkalmazásával oldjátok meg a 30–32. egyenleteket!

30. a) $6x : 8 = 3 : 2$; b) $5 : (2x) = 3 : 18$; c) $1 : (3x) = 4 : 12$.

31. a) $(x - 5) : 2 = 3 : 4$; b) $5 : (c - 3) = 2 : 3$; c) $7 : 4 = 5x : 3$.

32. a) $2 : m = m : 8$; b) $x : 10 = 0{,}1 : x$; c) $2n : 9 = 2 : n$.

Oldjátok meg a 33–35. egyenleteket, és ellenőrizzétek a megoldásaikat!

33. a) $|x| + 5 = 12$; b) $|x| - 8 = -3$; c) $2|x| + 3 = 25$.

34. a) $|x + 4| = 0$; b) $|x - 2| = 12$; c) $|x - 1| + 7 = 3$.

35. a) $|2x - 3| = 5$; b) $|2x| - 3 = 5$; c) $2|x - 3| = 5$.

36*. Az a mely értékei mellett igazak az alábbi állítások?

a) $3ax + 96 = 0$ egyenlet gyöke $x = -8$;

b) $1 - \frac{a}{4}x = -\frac{1}{2}$ egyenlet gyöke $x = 2$;

c) $4(a - 3)x = 72$ egyenlet gyöke $x = 6$.

37*. Az m mely értékei mellett lesznek közös gyökeik az alábbi egyenleteknek?

a) $2(x + 3) = 36$ és $x : 3 + 2m = 19$;

b) $(8 - x) \cdot 7 = 28$ és $5(2x - 3m) = 0$;

c) $(x : 3 + 8) \cdot 2m = 48$ és $(3x - 2) : 2 = 17$.

38*. A k mely értékei mellett nem lesz az alábbi egyenleteknek gyökük?

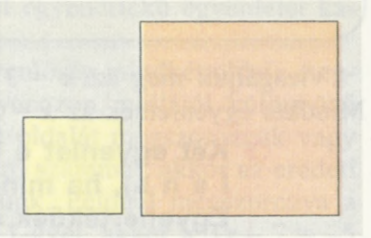
a) $x^2 = k$; b) $|x| + k = 0$; c) $k + 2x = 2(x - 3)$.

Oldjátok meg a 39–44. feladatokat egyenletek segítségével!

39. Határozzátok meg a téglalap szélességét, ha az háromszor rövidebb a hosszánál, a kerülete pedig 60 cm!

40. Határozzátok meg a téglalap hosszát, ha az kétszer hosszabb a szélességénél, a kerülete pedig 50 cm!

41. Az egyik négyzet oldala kétszer rövidebb a másik négyzet oldalánál, míg kerületeik különbsége 50 cm-rel egyenlő. Határozzátok meg a nagyobb négyzet oldalhosszát (2. ábra)!



2. ábra

42. Hány éves nagyapó, ha azt állítja, hogy amennyiben még egyszer és még félszer annyit élne, mint eddig, akkor kereken 200 éves lenne?

43. Az apa 34 éves, a lánya 12. Hány év múlva lesz a lány kétszer fiatalabb az apjánál?

44. *Ókori egyiptomi feladat.* A 70 tehenet terelő pásztortól megkérdezték: „A gulyád hányad részét tereled?" A pásztor erre azt felelte: „A szarvasmarháim harmadának kétharmadát hajtom." Hány tehene volt a pásztornak? Oldjátok meg a feladatot többféle módszerrel és a 3. ábra felhasználásával!



3. ábra

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

45. Végezzétek el az alábbi műveleteket!

a) $3{,}7 - 1{,}2 : 0{,}4$; b) $2{,}8 + 8{,}1 : 2{,}7$; c) $(7 - 8{,}5) : 0{,}5$;
d) $-4{,}9 : (2{,}3 - 1{,}6)$; e) $3 : 0{,}2 + 8 \cdot 2{,}5$; f) $12{,}1 : 0{,}11 + 1 : (-0{,}2)$;
g) $0{,}2^3 + 0{,}3^2$; h) $(-0{,}4)^2 - 1{,}2^2$; i) $(3 - 1{,}4) : 0{,}2^2$.

46. Határozzátok meg az alábbi kifejezések értékét!

a) $2a + 5$, ha $a = 2$; b) $2{,}3 - 3m$, ha $m = 8$;

c) $2a + 3c$, ha $a = \frac{1}{3}$ és $c = 0{,}5$;

d) $2(a + 3c)$, ha $a = \frac{1}{3}$ és $c = 0{,}5$.

47. Osszatok el 300-at a 2, 3 és 5 számokkal arányos három részre!

2. §. EGYENÉRTÉKŰ EGYENLETEK



Vizsgáljuk meg az $x - 3 = 2$ és az $x + 7 = 12$ egyenleteket! Mindkét egyenletnek az $x = 5$ az egyetlen megoldása.

Két egyenlet egyenértékű (ekvivalens), ha mindkettőnek ugyanaz a megoldása. Egyenértékűek azok az egyenletek is, melyeknek nincs megoldásuk.

Például az

$$x + 5 = x \text{ és } 2 - x = 3 - x.$$

A bonyolult egyenlet megoldásához tudni kell az adott egyenletet egyszerűbb, de az eredetivel egyenértékű egyenlettel helyettesíteni. Bemutatjuk, hogyan kell ezt elvégezni.

A szorzás széttagolási törvényéből következik, hogy az x bármely értékénél a $2x + 5x$ és a $7x$ kifejezések értéke egyenlő. Ezért egyenértékűek a következő egyenletek is: $2x + 5x = 28$ és $7x = 28$.

A szorzás széttagolási törvényéből következik, hogy az x valamennyi értékére a $3(x - 5)$ és $3x - 15$ kifejezések értéke egyenlő. Ezért egyenértékűek a következő egyenletek is:

$$3(x - 5) + 7 = 16 \text{ és } 3x - 15 + 7 = 16.$$

Általában, ha az egyenlet bármely részében összevonjuk az egynemű tagokat vagy felbontjuk a zárójeleket, akkor az eredetivel egyenértékű egyenletet kapunk.

Ha a számegyenlőség mindkét oldalához hozzáadjuk egy és ugyanazt a számot, igaz egyenlőséget kapunk. Ehhez hasonlóan a mérleg serpenyőire helyezett egyenlő tömegű testek nem borítják fel annak egyensúlyát (4. ábra).



4. ábra

Ebből következik, hogy ha például a $23y = 10y + 39$ egyenlet mindkét oldalához hozzáadunk $-10y$-t, akkor a $23y - 10y = 39$ egyenletet kapjuk, amely egyenértékű az előzővel. A $-10y$ hozzáadása az egyenlet mindkét oldalához ugyanaz, mintha átvinnénk az egyenlet jobb oldaláról $10y$-t a bal oldalra ellenkező előjellel. Összefoglalva: ha az egyenlet bármelyik tagját az egyik oldalról ellenkező előjellel átvisszük a másikra, akkor az eredetivel egyenértékű egyenletet kapunk.

Emlékezzünk vissza, hogy a számegyenlőség mindkét oldala megszorozható vagy eloszthatő egy és ugyanazon, nullától különböző számmal. Ezért ha az egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk vagy elosztjuk egy és ugyanazon nullától eltérő számmal, akkor az eredeti egyenlettel egyenértékű egyenletet kapunk. Például megszorozva a $-3x + 7 = 5$ egyenlet mindkét oldalát -1-gyel, akkor a $3x - 7 = -5$ egyenletet kapjuk, melynek ugyanaz a gyöke, mint az előzőnek. Ha a $20x + 100 = 200$ egyenlet mindkét oldalát elosztjuk 20-szal, akkor az eredetivel egyenértékű $x + 5 = 10$ egyenletet kapjuk.

Az egyenletek következő alaptulajdonságai mindig igazak:

1. Az egyenlet bármely oldalán össze lehet vonni az egynemű összeadandókat vagy fel lehet bontani a zárójeleket.
2. Az egyenlet bármely tagját át lehet vinni a másik oldalra, de az előjelét eközben az ellenkezőjére kell változtatni.
3. Az egyenlet mindkét oldalát meg lehet szorozni, vagy el lehet osztani egy és ugyanazon, nullától különböző számmal.

Az ilyen átalakítások után az eredetivel egyenértékű egyenletet kapunk.

A fenti tulajdonságokat gyakran alkalmazzák egyenletek megoldásakor. Példaként megoldjuk az alábbi egyenletet:

$$\frac{2}{3}x + 5 = x - \frac{1}{6}.$$

M e g o l d á s. Az egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk 6-tal:

$$4x + 30 = 6x - 1.$$

A $4x$-et átvisszük a jobb oldalra, a -1-et pedig a bal oldalra ellenkező előjellel:

$$30 + 1 = 6x - 4x.$$

Összevonjuk az egynemű tagokat:

$$31 = 2x.$$

Az egyenlet mindkét oldalát elosztjuk 2-vel:

$$x = 15{,}5.$$

F e l e l e t. $x = 15{,}5$.

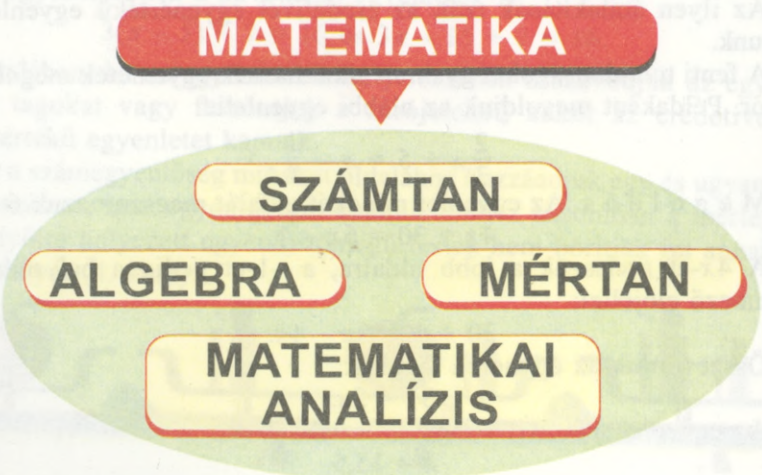
Szeretnétek többet megtudni?



Mohamed ibn Musa al-Kvarizmi (787–kb. 850)

Honnan származik az *algebra* tudomány elnevezése? A IX. században élt üzbég matematikus, Mohamed ibn Musa al-Kvarizmi egyenletekről szóló könyvének „Hisab al-dzsabr walmukabala" (szó szerint „Könyv a helyreállításról, valamint a törlésről") címétől ered. Azokban a régi időkben a negatív számokat nem tekintették valósaknak. Így amikor az egyenlet negatív tagját az egyenlet egyik oldaláról átvitték a másikra, az pozitívvá változott, mivel úgy vélték, hogy az átvitel során ismét visszanyerte valós voltát. Al-Kvarizmi ezt az átalakulást *helyreállításnak* (al-dzsabrnak) nevezte. Az egyenletek másik tulajdonságát, hogy mindkét oldalon törölni lehet az egyforma tagokat, *törlésnek* (walmukabala) nevezte el. Művét később latin nyelvre fordították, de a címéből csak egy szó, az *Algebr* került át. Innen ered az algebra tudományág elnevezése. Az „al-dzsabr" átalakulás felfedezése fontos lépést jelentett az algebra fejlődésében, mert leegyszerűsítette az egyenletek megoldását.

Az algebra, a számtan, a mértan, a matematikai analízis a matematikatudomány fő összetevői (5. ábra). A számtannal, a számokról és számolásról szóló tudománnyal már megismerkedtetek a matematikaórákon. A 7–9. osztályokban algebrát és mértant fogtok tanulni. A matematikai analízissel a felső tagozatos osztályokban fogtok megismerkedni.



5. ábra

Ellenőrizzétek magatokat!

1. Milyen egyenleteket nevezünk egyenértékűeknek?
2. Fogalmazzátok meg az egyenletek alaptulajdonságait!
3. Az egyenletek mely tulajdonságát nevezték régen „al-dzsabr"-nak?
4. Honnan ered az „algebra" tudomány elnevezése?
5. Az algebrán kívül még milyen matematikai tudományokat ismertek?

Oldjuk meg együtt!

1. Egyenértékűek-e a következő egyenletek?

a) $3(2x - 1) = 25 - x$ és $6x - 3 = 25 - x$;

b) $2(3x + 5) = x + 15$ és $x = 3$.

✔ M e g o l d á s.

a) Ha az első egyenletben felbontjuk a zárójelet, megkapjuk a második egyenletet. Vagyis az egyenletek egyenértékűek.

b) Megoldjuk az első egyenletet:

$6x + 10 = x + 15$, $5x = 5$, ahonnan $x = 1$. Tehát az adott egyenletek nem egyenértékűek.

F e l e l e t. a) egyenértékűek; b) nem egyenértékűek.

2. Oldjátok meg az egyenletet!

$$2(3x - 2) + 7 - x = 3(5 + x).$$

✔ M e g o l d á s.

Felbontjuk a zárójelet, elvégezzük az összeadást:

$$6x - 4 + 7 - x = 15 + 3x, \qquad 5x + 3 = 15 + 3x.$$

A 3-at átvisszük az egyenlet jobb, a $3x$-et pedig a bal oldalára, ellenkezőjükre változtatva az előjeleiket:

$$5x - 3x = 15 - 3, \qquad 2x = 12.$$

Az egyenlet mindkét oldalát elosztjuk 2-vel. A következőt kapjuk: $x = 6$.

F e l e l e t. $x = 6$.

3. Határozzátok meg az alábbi egyenlet gyökét!

$$\frac{3x-2}{3} = 2 + \frac{2x+1}{3}.$$

✔ M e g o l d á s.

Megszorozzuk 3-mal az egyenlet mindkét oldalát. A következőket kapjuk:

$3x - 2 = 6 + 2x + 1$ vagy $3x - 2x = 7 + 2$, ahonnan $x = 9$.

F e l e l e t. $x = 9$.

Oldjátok meg fejben!

48. Egyenértékűek-e az alábbi egyenletek?
a) $4x + 5x = 18$ és $9x = 18$; b) $7x - x = 24$ és $6x = 24$;
c) $2(x + 3) = 16$ és $2x + 6 = 16$; d) $0{,}4 \cdot (y - 2) = 1$ és $0{,}4y - 0{,}8 = 1$.

49. Az alábbi egyenletek közül melyek egyenértékűek a $3x = 15$ egyenlettel?
a) $6x = 30$; b) $9x = 45$; c) $3x - 15 = 0$;
d) $3x - 1 = 14$; e) $3x + 5 = 20$; f) $3x + 15 = 18$.

50. Egyszerűsítsétek az alábbi egyenleteket úgy, hogy mindkét oldalukat elosztjátok ugyanazzal a számmal!
a) $30x + 40 = 50$; b) $12y - 24 = 48$; c) $15z - 25 = 10$.

51. Egyszerűsítsétek az alábbi egyenleteket úgy, hogy mindkét oldalukat megszorozzátok ugyanazzal a számmal!
a) $\frac{1}{2}x = 3$; b) $0{,}1x = 2{,}5$; c) $\frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$; d) $\frac{x-3}{5} = 2$.

A szint

52. Egyenértékűek-e az alábbi egyenletek?
a) $5 + (x - 4) = 5$ és $x - 4 = 0$; b) $(x - 5)(x + 1) = 0$ és $x - 5 = 0$;
c) $(x - 3)(x + 3) = 0$ és $|x| = 3$; d) $(x - 5)(x + 1) = 0$ és $|2 - x| = 3$.

53. Az alábbi egyenletek mindegyikéhez írjatok egyenértékű egyenletet!
a) $7x + 8 = 10$; b) $12 - 3x = 0$; c) $5x - 2 = 2x - 5$;
d) $\frac{x+3}{5} = 3 - x$; e) $\frac{1}{2}(3 - 6x) = \frac{3}{4}$; f) $\frac{1}{3} + 3x = x$.

54. Vigyétek át a változós tagokat az egyenletek jobb oldaláról a balra, a változó nélkülieket pedig fordítva!
a) $12x - 3 = x + 2$; b) $15z + 8 = 2z$, c) $\frac{1}{2}m - \frac{2}{3} = 3 - \frac{1}{2}m$.

55. Vigyétek át a változós tagokat az egyenletek bal oldaláról a jobbra, a változó nélkülieket pedig fordítva!
a) $7x + 4 = 9x$; b) $38 - 2n = 2n$; c) $1 - 0{,}5z = 1{,}5z$.

Oldjátok meg az 56–59. egyenleteket!

56. a) $12y + 3 = y - 7$; b) $5x + 2x + 5 = 4x$; c) $0{,}7 - 2c = 3c + 1{,}7$.

57. a) $2x - 1 = 3x$; b) $5y + 6 = 2y$; c) $0{,}8z - 1 = 0{,}3z$;
d) $2 + 37t = 40t$; e) $1 - 0{,}5c = 0{,}5c$; f) $3 + 4{,}7x = 4{,}7x$.

58. a) $3(x - 5) = 2x - 7$; b) $4(l - 0{,}9) = 1{,}2 + 2l$;
c) $7x - 4(x - 3) = 12$; d) $16 - (2 - 5x) = 29$.

59. a) $\frac{1}{3}x = 12 - x$; b) $\frac{2}{3}y = 9 - y$; c) $\frac{1}{6}z = \frac{1}{3} + z$;
d) $5y = -\frac{5}{8} + y$; e) $\frac{2}{3}x + 8 = 8$; f) $-4c = \frac{1}{7} - \frac{1}{7}c$.

60. Találjatok olyan x számot, amely esetében:
a) a $2x - 3$ különbség az $x + 17$ összeggel egyenlő;
b) az $x + 37$ összeg kétszer nagyobb az $x - 15$ különbségnél!

B szint

Oldjátok meg a 61–68. egyenleteket!

61. a) $\frac{1}{5}(2x - 3) = 1$; b) $\frac{1}{9}(4 + 3x) = \frac{1}{3}$; c) $\frac{3}{7}(2 - 3x) = \frac{1}{7}$.

62. a) $\frac{2x}{3} + \frac{7}{9} = 1$; b) $\frac{3c}{5} - \frac{c}{10} = 7$; c) $\frac{n}{4} - \frac{3n}{8} = -2$.

63. a) $\frac{2}{9} + \frac{x-2}{3} = \frac{5}{9}$; b) $\frac{3}{8} - \frac{y+5}{2} = -2\frac{1}{4}$; c) $\frac{x-3}{3} - \frac{2x}{9} = 2$.

64. a) $5(0{,}6m - 2) = 2(m - 3{,}6)$; b) $3(1{,}2n + 8) = 4(5 - 0{,}1n)$;
c) $2(11 - 6x) - 3(7 - 4x) = 1$; d) $7(y + 6) = 4(3y - 5) - 3$;
e) $\frac{1}{3}(6 + x) = \frac{2}{3}(2x - 15)$; f) $\frac{1}{2}(7 - 2x) = \frac{3}{4}(8x + 4\frac{2}{3})$.

65. a) $\frac{3}{5}(x - 2) = \frac{2}{5}(5x - 24)$; b) $\frac{5}{6}(x + 2) = \frac{1}{6}(7x + 12)$;
c) $0{,}4(6x - 1) = 0{,}1(12x + 5)$; d) $0{,}5(7x + 8) = 1{,}5(7x + 8)$;
e) $5x - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}(3x + 4)$; f) $y - \frac{3}{4}(2y - 5) = 1\frac{1}{4} - 2y$.

66. a) $2{,}5(y + 6) = y + 1{,}5(y - 10)$;
b) $0{,}75(4 - x) - 0{,}5x = 5(0{,}05x + 3)$.

67. a) $\frac{3x+7}{4} - \frac{x-3}{2} = \frac{5x+2}{8}$; b) $\frac{5x-4}{3} = \frac{7-x}{2} + \frac{3x+1}{6}$.

68. a) $\frac{8-3y}{5} - \frac{1-2y}{2} = \frac{6y+17}{10}$; b) $\frac{2-4x}{5} = \frac{1-2x}{3} - \frac{x+3}{4}$.

69. Mely számot kell kivonni a 135-ből és 83-ból, hogy az első esetben a különbség kétszerese legyen a másodiknak?

70. Mely számot kell hozzáadni a 207-hez és 33-hoz, hogy az első esetben az összeg négyszerese legyen a másodiknak?

71. Két szám összege 120-szal egyenlő. Ha az egyik számot elosztjuk 5-tel, a másikat pedig 3-mal, akkor az első hányados egyenlő lesz a másodikkal. Határozzátok meg ezeket a számokat!

72. Két szám különbsége 12-vel egyenlő. Ismeretes, hogy az első 0,3 része egyenlő a második 0,7 részével. Határozzátok meg ezeket a számokat!

73. Két szám összege 425-tel egyenlő. Ismeretes, hogy az első 20%-a második 30%-ával egyenlő. Határozzátok meg ezeket a számokat!

74. Az egyik raktárban 2-szer annyi szenet tárolnak, mint a másodikban. Ha az első raktárba további 84 t szenet szállítanak, a másodikba pedig 140 tonnát, akkor a két raktárban kiegyenlítődik a szén mennyisége. Hány tonna szén van a raktárakban külön-külön?

75. Az egyik benzintartályban kétszer annyi benzin van, mint a másikban. Ha az első tartályból 17 litert áttöltenek a másodikba, akkor a két tartályban kiegyenlítődik a benzin mennyisége. Hány liter benzin van mindegyik tartályban?

76*. Az a mely értékei mellett lesznek egyenértékűek az alábbi egyenletek?

a) $2(x - 1) = 4 - x$ és $ax = x + a$;

b) $(1 - a)x = x$ és $x^2 = 0$.

77*. A $\frac{3(x+a)}{2} + 0{,}5x + 3$ kifejezés 4-gyel egyenlő, ha $x = 1$. Mennyivel lesz egyenlő a kifejezés, ha $x = 5$?

78*. A $9x - \frac{m-4}{5}x + 2$ kifejezés 16-tal egyenlő, ha $x = 1\frac{2}{3}$. Mennyivel lesz egyenlő a kifejezés, ha $x = -\frac{1}{6}$?

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

79. Töltsétek ki a bűvös négyzetet (6. ábra)! Az üres kockákba írjatok olyan számokat, hogy az összegük egyenlő legyen minden sorban, minden oszlopban és minden átlóban!

80. Bontsátok tényezőkre az alábbi számokat!

a) 80; b) 1024; c) 1001.

81. Számítsátok ki az alábbi példát!

$$\left(4{,}3 \cdot \frac{3}{43} + 11\frac{3}{5} \cdot 2{,}25\right) : 2{,}75.$$

		7
	6	
5		9

6. ábra

82. Írjátok le kifejezés alakjában!
a) az m és n számok összegének felét;
b) a $2x$ és $3z$ különbségének felét.

83. Hány százalékkal nagyobb 40, mint 32? Hány százalékkal kevesebb 32, mint 40?

3. §. LINEÁRIS EGYENLETEK



Az $ax = b$ alakú egyenletet, ahol a és b tetszőleges számokat jelöl, x változós lineáris egyenletnek nevezzük.

Az a és b számokat az egyenlet *együtthatóinak (koefficienseinek)* nevezzük. Az a számot az x változó *együtthatójának*, a b számot az egyenlet *szabad tagjának* nevezzük.

Az $ax = b$ egyenletet, ha $a \neq 0$, *egyváltozós elsőfokú egyenletnek* nevezzük. Ennek a gyöke: $x = \frac{b}{a}$.

Minden egyváltozós elsőfokú egyenletnek csak egy gyöke van. A lineáris egyenletnek általában egy gyöke van, de előfordul, hogy nincs egyetlen gyöke sem, esetenként a gyökök száma végtelen.

Az $ax = b$ egyenletnek:

- egy gyöke van, ha $a \neq 0$;
- végtelen számú gyöke van, ha $a = 0$ és $b = 0$;
- nincs gyöke, ha $a = 0$ és $b \neq 0$.

Például a $0x = 5$ egyenletnek egyetlen megoldása sincs, mert nincs olyan szám, amelyet nullával szorozva 5-öt kapunk. Az $0x = 0$ egyenletnek végtelen számú gyöke van, mert az x változó bármilyen értéke kielégíti azt.

Az egyenleteket úgy oldjuk meg, hogy először egyszerűsítjük, vagyis átalakítjuk lineáris egyenletté. Ezt a következő sorrendben végezzük:

1. Megszabadulunk a nevezőktől (ha léteznek);
2. Felbontjuk a zárójeleket (ha léteznek).

3. Átvisszük a változókat tartalmazó tagokat az egyenlet bal oldalára, a többi tagot pedig a jobb oldalára;

4. Összevonjuk az egynemű tagokat.

Az átalakítás eredményeként az eredetivel egyenértékű egyenletet kapunk, amelynek gyökei megegyeznek az eredeti egyenlet gyökeivel.

1. példa. Oldjátok meg az alábbi egyenletet!

$$\frac{2x+5}{4} + \frac{x}{12} = \frac{x}{3} - 1\frac{1}{2}.$$

M e g o l d á s. Beszorozzuk az egyenlet mindkét oldalát 12-vel, azaz a nevezők 2, 3, 4 és 12 legkisebb közös többszörösével:

$$3(2x + 5) + x = 4x - 18;$$
$$6x + 15 + x = 4x - 18;$$
$$6x + x - 4x = -18 - 15;$$
$$3x = -33;\ x = -11.$$

F e l e l e t. –11.

Ha az egyenlet együtthatói többjegyű számok, akkor a megoldásához érdemes zsebszámológépet használni.

2. példa. Oldjátok meg az alábbi egyenletet!

$$32{,}46x + 19{,}5 = 95{,}24.$$

M e g o l d á s. $32{,}46x = 95{,}24 - 19{,}5;$

$$x = (95{,}24 - 19{,}5) : 32{,}46;$$

95,24 – 19,5 ÷ 32,46 = ;

$x = 2{,}333333...$.

A kapott gyök értéke megközelítő pontosságú. Pontos értékét vegyes tört alakjában $2\frac{1}{3}$-ként kellene leírni. A példák megoldása során a feleletet általában kikerekítik és ilyen alakban írják le: $x \approx 2{,}33$.

Szeretnétek többet megtudni?

Az elsőfokú egyenletek a lineáris egyenletek egyik típusa. E két egyenlettípus egymáshoz való viszonyát a 7. ábra szemlélteti.



7. ábra

Az alábbi példákban nem elsőfokú lineáris egyenletek szerepelnek:

$$\left(0{,}25 - \frac{1}{4}\right)x = 0 \text{ vagy } \left(0{,}25 - \frac{1}{4}\right)x = 2{,}5.$$

A $2x + 3 = 27 - x$, $\frac{x-3}{5} = 0{,}8$, $|x - 4| = 0$ nem lineáris egyenletek, de átalakíthatók **lineáris egyenletekké**.

Azt, hogy az $ax = b$ alakú egyenletet miért nevezik lineárisnak, a lineáris függvények tanulása során értitek meg (200. old.).

Ellenőrizzétek magatokat!

1. Milyen egyenleteket nevezünk lineárisaknak?
2. Milyen egyenleteket nevezünk elsőfokú egyenleteknek?
3. Hány gyöke lehet a lineáris egyenletnek?
4. Hány gyöke lehet az elsőfokú egyenletnek?
5. Milyen feltételek mellett nincs az $ax = b$ egyenletnek megoldása? Milyen feltételek mellett van végtelen számú megoldása?

Oldjuk meg együtt!

1. Oldjuk meg az alábbi egyenletet!

a) $3(x - 5) + x = 4x - 18$; b) $5(2 + 3x) - 7(2x + 3) = x - 11$.

M e g o l d á s. a) $3x - 15 + x = 4x - 18$,

$3x + x - 4x = 15 - 18$,

$0x = -3$ – az egyenletnek nincs megoldása;

b) $10 + 15x - 14x - 21 = x - 11$,

$15x - 14x - x = 21 - 10 - 11$,

$0x = 0$ – bármilyen szám kielégíti az egyenletet.

F e l e l e t. a) az egyenletnek nincs megoldása;

b) az egyenletnek végtelen számú megoldása van.

2. Találjatok két olyan számot, amelyek félösszege kétszerese a 35-tel egyenlő félkülönbségüknek!

M e g o l d á s. Ha a számok félkülönbsége 35, akkor ennek kétszerese 70 lesz. Ha a kisebbik számot x-szel jelöljük, akkor a nagyobbik $70 + x$ lesz. A feladat feltételeinek megfelelően $(x + 70 + x) : 2 = 2 \cdot 35$ vagy $x + 35 = 70$, ahonnan az $x = 35$ a kisebbik szám, a $70 + 35 = 105$ pedig a nagyobbik.

F e l e l e t. A két szám: 35 és 105.

Oldjátok meg fejben!

84. Az alábbi egyenletek közül melyik lineáris?

a) $-x = 5$; b) $\frac{1}{x} = 2$; c) $3 - 2x = 0$; d) $4x = 5 - x$.

85. Az alábbiak közül melyik elsőfokú egyenlet?

a) $0{,}5x = 7$; b) $-\frac{1}{3}x = 3$; c) $3x^2 = 0$; d) $0x = 0$.

86. Helyes-e a 8. ábrán látható vázlat?



8. ábra

A szint

87. Alakítsátok lineáris egyenletekké az alábbiakat!

a) $2 - 3x = 5 - 7x$; b) $0 = 7x - 5$; c) $\frac{1}{3}x = 6 - \frac{1}{2}x$; d) $\frac{x-4}{2} = 1$.

88. Alakítsátok lineáris egyenletté!

a) $2x + x - 7x + 3 = 8$;
b) $y - 5y = 8 - y$;
c) $3x + 2(x + 7) = 2x$;
d) $4(2 + x) - x = 3x + 9$;
e) $-c + 31(2 - c) = 32c$;
f) $0{,}7 = 2(x + 3{,}5) - 2x$.

89. Hány megoldásuk van az alábbi egyenleteknek?

a) $2x - 3 = x + 7$; b) $3x + 7 = 3x - 9$; c) $2(3x - 1) = 3(2x + 1)$.

Oldjátok meg a 90–96. egyenleteket!

90. a) $32x = -16$;
b) $-15z = 0{,}5$;
c) c) $x + 4x = 5x$;
d) $-0{,}5y = -0{,}5$;
e) $6x = 8 + 6x$;
f) $x - 4x = 5x$.

91. a) $0x = 35$;
b) $0y = 13 - 13$;
c) $2x = 3 + 2x$.

92. a) $0{,}5z = 6 + \frac{1}{3}z$;
b) $0{,}2x + 5 = \frac{1}{5}x$;
c) $\frac{2}{3}x + 7 = 0{,}6x$.

93. a) $4 - 3x = 8(1 - x)$;
b) $2 - 5y = 5(1 - 2y)$;
c) $x = 3(x + 1) - 2x$;
d) $2(5 - 8x) = -4(4x + 3)$.

94. a) $8(9 - 2x) = 5(2 - 3x)$;
b) $5(z + 3) = 8(10 - z)$;
c) $2(x - 3) = 3(2x - 1)$;
d) $4(5 - x) = -5x + 2$.

95. a) $y - 1{,}08 = 0{,}2(5 + y)$;
b) $0{,}3(1 - c) = c + 0{,}04$;
c) $3 - 5x = 0{,}3(2x + 1)$;
d) $1 - 3(x - 5) = 7(3 - 2x)$.

96. a) $-\frac{1}{2}x - \frac{1}{3} = \frac{3}{4}x$; b) $\frac{2}{3}t - \frac{1}{5} = 0{,}6t$; c) $-0{,}8z + 1 = \frac{4}{5}z$.

97. Oldjátok meg az alábbi egyenleteket zsebszámológép segítségével!

a) $235x = 408$;
b) $18{,}7y = 9{,}7$;
c) $-32{,}4z = 58{,}8$.

98. Határozzátok meg az alábbi egyenletek gyökeit!

a) $492x + 317 = 923$ (a feleletet kerekítsétek ki ezredekre);
b) $2{,}38z - 5{,}87 = 3{,}41$ (a feleletet kerekítsétek ki százezredekre).

B szint

Oldjátok meg a 99–103. egyenleteket!

99. a) $3(x + 4) + 6(11 - x) = 9$; b) $8(1 - x) + 5(x - 2) = 2$;
c) $7(x - 5) - 3(2x - 6) = 10$; d) $5(3 - 2x) - (12 + 7x) = 0$.

100. a) $7(4 - t) + 3(t - 5) = 9t$; b) $3(x + 1{,}5) + 2(3 + x) = -5$;
c) $4z - 1{,}2(2 - 5z) = 1 - 5z$; d) $2{,}5x - 1{,}7(5 - 2x) = 3x$.

101. a) $8 + 3(x - 5) + x = 2(3 + 2x)$; b) $z + 2(4 + z) = 3z + 8$;
c) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}(x - 2) = x$; d) $\frac{1}{2} + 2\left(\frac{1}{3}n + 1\right) = 3n$.

102. a) $\frac{1}{2}(4x - 5) + \frac{3}{2}(2x + 1) = x + 3$;
b) $\frac{2}{3}(5 - 3x) + \frac{1}{3}(2 + 9x) = 2x - 1$;
c) $\frac{3}{5}(6 + 7x) - 2x = \frac{2}{5}(4 + 3x) + 3$;
d) $2 + \frac{1}{4}(8x + 1) = 5x + \frac{3}{4}(4x - 1)$.

103. a) $3(2x + 3) - 5(7 - 4x) - 2(5x + 4) = -2$;
b) $8(4 - 3x) + 7(x - 3) + 3(9 + 7x) = 10$;
c) $6(x + 2) + 3(3x + 7) = 4(5 + 4x) - 7$;
d) $5(12 - x) - 11(4x - 5) = 9(9 - 5x) - 26$.

104. Az egyik szám 6-tal nagyobb a másiknál. Ha az első számot 5-tel szorozzuk, a másodikat pedig néggyel, akkor az első szorzat 40-nel nagyobb lesz a másodiknál. Határozzátok meg ezeket a számokat!

105. Az egyik szám 6-szor nagyobb a másiknál. Ha a nagyobbikból kivonunk 37-et és a kisebbikhez hozzáadunk 73-at, akkor az eredmények egyenlők lesznek. Határozzátok meg ezeket a számokat!

106. Határozzátok meg azt a két számot, amelyek:
a) összege 155, különbsége 91;
b) különbsége 47, félösszege 46.

107. Melyik az a szám, amelyik egyharmaddal nagyobb a saját harmadrészénél?

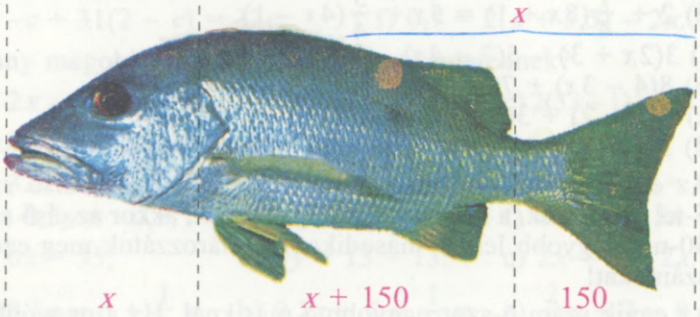
108. Találjatok egy olyan x számot, amelyik esetében:
a) az x és 15 számok összege kétszerese a különbségüknek;
b) az x és 1,5 számok összege a szorzatukkal egyenlő!

109. Találjatok egy olyan m számot, amelyik esetében:
a) az m és 14 számok félkülönbsége fél összegük 0,2 részét teszi ki;
b) az m és 1,4 számok fél összege különbségük 120%-át teszi ki!

110. *Ókori indiai feladat.* Négy adományozó közül a második kétszer többet adott az elsőnél, a harmadik háromszor többet a másodiknál, a negyedik négyszer többet a harmadiknál, miközben adományaik összesen 132-t tettek ki. Mennyi volt az első adományozó adománya?

111. *Ókori orosz feladat.* Az égbolton elhúzó vadlibacsapattal szemben repülő gúnár így üdvözölte a libákat: „Üdvözletem a száz libának!". Erre a következőt felelték a gúnárnak: „Nem százan vagyunk. Ha kétszer annyian, meg félannyian, és még negyed annyian lennénk, akkor veled együtt tennénk ki százat". Hány liba volt a csapatban? Ellenőrizzétek a megoldást!

112. *Bolgár népi feladat.* A halász arra a kérdésre, hogy mennyi az általa kifogott hal súlya, a következő választ adta: „A farka 150 g-ot nyom, a feje annyi, mint a farka meg törzsének a fele, törzsének a súlya pedig annyi, mint a fejé és faroké együttvéve" (9. ábra). Mennyi a hal súlya?



9. ábra

113*. Bizonyítsátok be, hogy a tetszőleges értéke mellett az alábbi egyenleteknek egyazon gyöke van:

a) $(a^2 + 3)x = 5$; b) $(a^2 + 1)x = a$;
c) $a^2x = -2x$; d) $4 - 5x = a^2x$.

114*. Az a – d egyenletek mindegyike esetében határozzátok meg, hogy a k együttható mely értékei mellett: 1) van egy gyökük; 2) nincs gyökük; 3) van végtelen sok gyökük!

a) $kx = 8$; b) $(k + 3)x = 5$; c) $kx = k$; d) $(2 - k)x = (2 - k)$.

115*. Az a – c egyenletekben az egyenlőségjel utáni pontok helyére írjatok olyan kifejezést, hogy a keletkező egyenleteknek: 1) egy gyökük legyen; 2) végtelen számú gyökük legyen; 3) ne legyen gyökük!

a) $5x - 4 + 2x = ...$; b) $2(1{,}5x - 7) - 3x = ...$; c) $\frac{3x + 2}{5} = ...$

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

116. Írjátok le az alábbi kifejezéseket!

a) x és y számok összegének négyzetét;
b) a és b számok köbeinek különbségét;
c) a és b számok köbeinek összegét;
d) x és y számok négyzeteinek összegét;
e) a és b számok különbségének köbét;
f) a és b számok összegének köbét.

117. Határozzátok meg az alábbi kifejezések értékét!

a) $5a^3$, ha $a = 0{,}2$;
b) $2x^2 - x^4 - 5$, ha $x = -2$;
c) $a^3 + 3a^2$, ha $a = -0{,}2$;
d) $3a^4 - a^2$, ha $a = -1{,}2$;
e) $1 - (x - y)^3$, ha $x = 2{,}5$ és $y = 3$.

118. Írjátok le az összes kétjegyű természetes szám összegét!

119. Határozzátok meg:

a) 350 20%-át;
b) 56 000 30%-át;
c) 0,75 12%-át;
d) 1,4 125%-át;
e) 124 hr. 15%-át;
f) 3,5 m 48%-át!

4. §. FELADATOK MEGOLDÁSA EGYENLETEK SEGÍTSÉGÉVEL



Feladatok egyenletek segítségével úgy oldhatók meg, hogy először a feladat feltételeinek megfelelő egyenleteket állítanak fel. Ez tulajdonképpen azt jelenti, hogy a feladatot hétköznapi nyelvről az algebra nyelvére fordítják le, azaz felállítják az adott feladat *matematikai modelljét.* Ennek megértését segítik az alábbi feladatok.

1. feladat. Két magtárban összesen 1000 t búza van. Mennyi van mindegyikben, ha az elsőben 200 t-val kevesebb van, mint a másodikban?

M e g o l d á s. Legyen x t – az első magtárban lévő búza mennyisége. Akkor a másodikban $(x + 200)$ t lesz, a két magtárban összesen $(x + x + 200)$ t van. A következő egyenletet kaptuk:

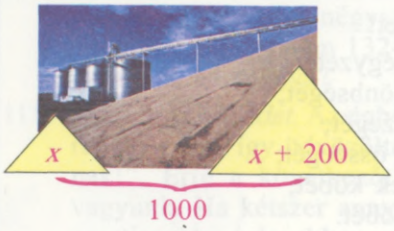
$$x + x + 200 = 1000,$$

ahonnan $2x = 800$, $x = 400$, $x + 200 = 600$.

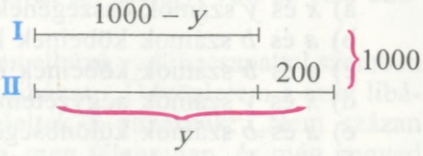
F e l e l e t: 400 t és 600 t.

A feladat feltételei alapján felállított $x + x + 200 = 1000$ egyenlet az adott feladat matematikai modellje.

Az egyenletet gyakran rajz alapján egyszerűbb felállítani (10. ábra).



10. ábra



11. ábra

Ez a feladat más módszerrel is megoldható. Ha a második magtárban y t búza van, akkor az elsőben $(1000 - y)$ t lesz (11. ábra). Mivel a másodikban 200 tonnával több van, mint az elsőben, ezért

$$1000 - y + 200 = y, \text{ ahonnan } y = 600,$$
$$1000 - y = 400.$$

A f e l e l e t ugyanaz.

A 10. és 11. ábra, valamint az $1000 - y + 200 = y$ egyenlet az 1. sz. alkalmazott matematikai feladat háromféle matematikai modellje. A matematikában *alkalmazott matematikai* feladatoknak azokat a feladatokat nevezik, amelyeknek a feltételei nem matematikai fogalmakat tartalmaznak.

A modell mindig hasonló az eredeti tárgyhoz. A modellben tükröződnek a vizsgálat tárgyának fontos sajátosságai. Ilyen például a gépkocsik, repülőgépek, épületek kicsinyített modelljei. A földgömb bolygónk, a Föld, míg a játékbaba az ember modellje. Ha modell egyenletek, képletek vagy egyéb matematikai fogalmak alapján készül, akkor *matematikai modellről* beszélünk.

A mozgással kapcsolatos feladatok esetében szintén különböző modelleket alkalmaznak.

A mozgásról szóló feladatoknál emlékezzetek arra, hogy az egyenes vonalú egyenletes mozgásnál a test által megtett út egyenlő a sebesség és az idő szorzatával ($s = v \cdot t$). Ekkor a mértékegységeket megfelelő egységekben adjuk meg. Például, ha az idő órában, és a távolság kilométerekben van megadva, akkor a sebességet kilométer per órában kell kifejezni. Ha a test a folyón mozog, akkor sebessége a vízfolyás irányában (a vízfolyással szemben) egyenlő a saját sebessége és a vízfolyás sebessége összegével (különbségével). Vázlatok segítségével sok mozgási feladat (124. sz.) fejben is megoldható. Egyes bonyolult feladatok több modell készítésével oldhatók meg.

Nézzünk egy olyan feladatot, amelynek a megoldását táblázat összeállítása segíti. A táblázat a matematikai modellek egyik típusa.

2. feladat. A hajónak két város közötti távolságot 15 km/h sebességgel kellett volna megtennie, de csak 12 km/h sebességgel haladt, ezért 3 órát késett. Határozzátok meg a két város közötti távolságot!

M e g o l d á s. Állítsatok össze táblázatot, s töltsétek ki a feladat feltételeinek megfelelő adatokkal!

Feltétel	Távolság, km	Sebesség, km/h	Idő, h
Feltételezett távolság	x	15	$\frac{x}{15}$
Valós távolság	x	12	$\frac{x}{12}$

A hajó a feltételezettnél 3 órával hosszabb ideig haladt. Ennek a körülménynek az alábbi egyenlet felel meg:

$$\frac{x}{12} - \frac{x}{15} = 3.$$

Megoldjuk az egyenletet:

$$\frac{5x - 4x}{60} = 3, \quad \frac{x}{60} = 3, \quad x = 180.$$

F e l e l e t. 180 km.

A feladatok egyenlet általi megoldása során mindig elemezni kell az ismeretlen meghatározása során kapott értéket. Előfordulhat ugyanis, hogy az egyenlet megoldása nem felel meg a feladat feltételeinek.

3. feladat. A háromszög kerülete 17 cm. Határozzátok meg oldalainak hosszát, ha tudjuk, hogy az egyik oldalának hossza a másiknál 2 cm-rel, a harmadiknál pedig 6 cm-rel rövidebb!

M e g o l d á s. A háromszög legrövidebb oldalának hossza legyen x cm. Ekkor a másik két oldal hossza rendre $(x + 2)$ cm és $(x + 6)$ cm lesz. Így a következő egyenletet kapjuk:

$$x + x + 2 + x + 6 = 17 \quad \text{vagy} \quad 3x + 8 = 17.$$

Megoldjuk az egyenletet: $3x = 9$, $x = 3$.

Ha az egyik oldal hossza 3 cm, akkor a másodiké és a harmadiké rendre 5 cm és 9 cm lesz.

Létezik-e háromszög ilyen hosszúságú oldalakkal? Nem létezik, mivel a háromszög mindegyik oldala rövidebb a másik kettő összegénél. Adott esetben pedig $9 > 3 + 5$.

F e l e l e t. A feladatnak nincs megoldása.

Az alkalmazott matematikai feladatok matematikai modellezés általi megoldása három szakaszban történik:

1) az adott feladat matematikai modelljének elkészítése;
2) a megfelelő matematikai feladat megoldása;
3) a felelet elemzése.

Szeretnétek többet megtudni?

Néha egyenlet segítségével nem az egész feladatot, hanem annak csak egy részét oldják meg.

Példaként bemutatjuk, hogyan kell kitölteni a *bűvös négyzet* üres kockáit. A bűvös négyzetnek azonos számú kockából álló sorai és oszlopai vannak, melyeket egymást követő pozitív egész számokkal töltjük fel úgy, hogy az oszlopokban, a sorokban, illetve az átlóban lévő számok összege azonos legyen.

Feladat. Rajzoljátok át füzetetekbe a 12. ábrát, és töltsétek ki üres kockáit olyan számokkal, hogy bűvös négyzetet kapjatok.

M e g o l d á s. Jelöljétek x betűvel a négyzet jobb felső kockájának a számát. Ekkor a felső sorban a számok összege $5 + 6 + x$ vagy $11 + x$ lesz. Ilyennek kell lennie a számok összegének átlósan és a középső oszlopban, ezért minden sorba a következőket kell írni: 4, $x - 2$, $x - 1$ (13. ábra). Mivel a számok összege $11 + x$, ezért felállítjuk a következő egyenletet:

$4 + (x - 2) + (x - 1) = 11 + x$, ahonnan $2x + 1 = 11 + x$, $x = 10$.

Helyettesítsük az x-et 10-zel, miután a 14. ábra négyzetének kockáit könnyű kitölteni.

5	6	
	7	

12. ábra

5	6	x
	7	
4	$x-2$	$x-1$

13. ábra

5	6	10
	7	
4	8	9

14. ábra

Ebben az esetben a $4 + (x - 2) + (x - 1) = 11 + x$ a megfogalmazott feladat egy részének a modellje, ami csak az x értékének kiszámítását tette lehetővé.

Ellenőrizzétek magatokat!

1. Mondjatok példákat feladatra és annak matematikai modelljére!
2. Milyen matematikai modellek léteznek?
3. Milyen szakaszokból áll a feladatok megoldása matematikai modellezés által?

Oldjuk meg együtt!

1. A csónak a kikötők közötti távolságot a vízfolyás irányában 2 óra alatt, visszafelé 2,5 óra alatt tette meg. Határozzuk meg a csónak saját sebességét, ha a vízfolyás sebessége 2 km/h!

✔ M e g o l d á s. Legyen x km/h a csónak saját sebessége. Ekkor:

$(x + 2)$ km/h– a csónak sebessége a vízfolyás irányában;

$(x - 2)$ km/h – a csónak sebessége a vízfolyással szemben;

$(x + 2) \cdot 2$ km – az út, amit a csónak a vízfolyás irányában tett meg;

$(x - 2) \cdot 2{,}5$ km – az út, amit a csónak a vízfolyással szemben tett meg.

Az $(x - 2) \cdot 2{,}5$ és az $(x + 2) \cdot 2$ távolságok egyenlők. Tehát a következő egyenletet kaptuk:

$$2{,}5(x - 2) = 2(x + 2),$$

ahonnan

$$2{,}5x - 5 = 2x + 4,\ 0{,}5x = 9,\ x = 18.$$

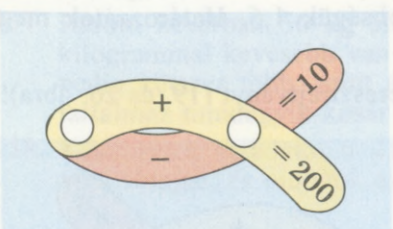
F e l e l e t . 18 km/h.

2. Oldjuk meg a matematikai keresztrejtvényt (15. ábra)!

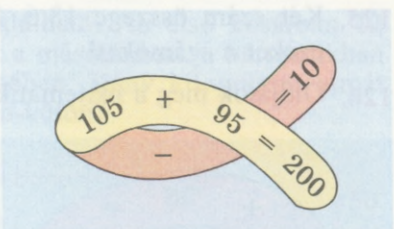
✔ M e g o l d á s. A körökbe két számot kell írni, melyek összege 200, és a különbsége 10. Ha a második számot x-szel jelöljük, akkor az első szám $200 - x$ lesz. Különbségük 10, tehát $200 - x - x = 10$, ahonnan

$$2x = 190,\ x = 95,\ 200 - x = 105.$$

A f e l e l e t a 16. ábrán látható.



15. ábra



16. ábra

Oldjátok meg fejben!

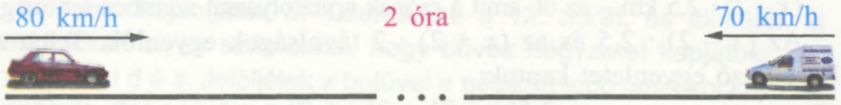
120. Találjatok két olyan számot, amelyek összege 3, a különbsége pedig 1!

121. Találjatok olyan két számot, amelyek egyike 4-szer nagyobb a másiknál, az összegük pedig 10!

122. Határozzátok meg az x és y számokat, ha $x + y = 25$ és $x = y$!

123. A tanuló gondolt egy számot. Ha ebből kivonunk 7-et, és az eredményt elosztjuk 3-mal, akkor 5-öt kapunk. Milyen számra gondolt a tanuló?

124. Határozzátok meg az A és B pont közötti távolságot, ha:
a) a belőlük egyszerre kiinduló két autó 2 óra múlva találkozik egymással (17. ábra);
b) a belőlük egy irányban egyszerre kiinduló személygépkocsi és autóbusz 3 óra múlva éri be egymást (18. ábra).



17. ábra

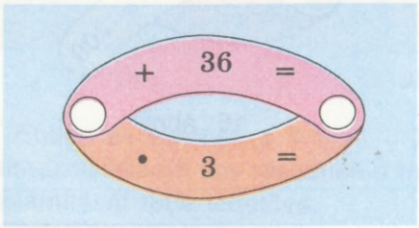


18. ábra

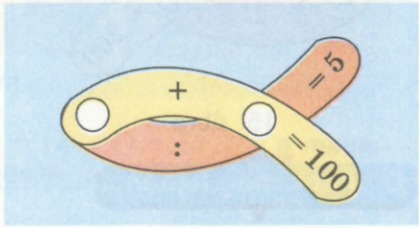
A szint

125. Két szám összege 13,6, különbségük 1,6. Határozzátok meg ezeket a számokat!

126. Oldjátok meg a matematikai keresztrejtvényt (19. és 20. ábra)!



19. ábra



20. ábra

127. Két szám összege 105, az arányuk: 1 : 2. Határozzátok meg ezeket a számokat!

128. Találjatok olyan számot, amelynek fele 0,5-del nagyobb a harmadrészénél! Ellenőrizzétek a megoldást!

129. Az apa 5-ször idősebb a fiánál, a fiú 32 évvel fiatalabb az apjánál. Hány éves az apa és a fia?

130. Egy 430 hektáros terület két részre van osztva oly módon, hogy az egyik rész 130 hektárral nagyobb a másiknál. Határozzátok meg mindkét területrész nagyságát!

131. Egy 84 m hosszú zsinórt úgy vágtak két részre, hogy az egyik darab háromszor rövidebb a másiknál. Határozzátok meg mindkét rész hosszát!

132. Egy 25 m hosszú zsinórt két részre vágtak, amelyek egyike 50%-kal hosszabb a másiknál. Határozzátok meg mindkét rész hosszát! Ellenőrizzétek a megoldást!

133. Egy brigádnak 5 nap alatt kellett elkészítenie bizonyos mennyiségű alkatrészt, de a munkát 4 nap alatt elvégezte, mert minden nap 12 alkatrésszel többet készített. Hány alkatrészt készített összesen a brigád?

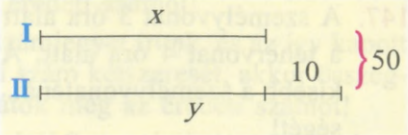
134. A téglalap kerülete 118 cm, egyik oldala 12 cm-rel hosszabb a másiknál. Határozzátok meg a téglalap oldalainak hosszát!

135. Három traktoros összesen 72 ha területet szántott fel. Az első 6 hektárral többet szántott fel a másodiknál, míg a második 9 hektárral többet a harmadiknál. Hány hektárt szántott fel mindegyik traktoros külön-külön?

136. Három osztályban 79 tanuló van. A másodikban 3 tanulóval több található, mint az elsőben, míg a harmadikban 2 tanulóval kevesebb van, mint az elsőben. Hány tanuló van mindegyik osztályban?

137. Három kosárban 56 kg alma található. Az első kosárban 12 kilogrammal kevesebb van mint a másodikban, a harmadikban pedig kétszer több, mint az elsőben. Hány kilogramm almát tartalmaz mindegyik kosár külön-külön?

138. Készítsetek feladatot a 21. ábra alapján, és oldjátok azt meg!



21. ábra

139. Egy 860 hektáros területet három részre osztottak úgy, hogy az első két rész területének összege a harmadik rész területével lett egyenlő, a második rész területe pedig 1,5-szer nagyobb volt az első rész területénél. Határozzátok meg a három rész területének nagyságát külön-külön!

140. *Ókori indiai feladat.* Egy lótuszvirág-csokor harmadát Siva istennek, ötödét Visnu istennek, hatodát pedig Napistennek áldozták. A csokor negyedét Brahma isten kapta, míg 6 szál lótusz a tisztelt tanítónak jutott. Hány szál lótuszvirág volt a csokorban?

141. *Ókori görög feladat.* Pitagorasz arra a kérdésre, hogy hány tanulót oktat az iskolájában, a következőt válaszolta: „A tanítványok fele matematikát, negyede zenét, nyolcada bölcseletet tanul, s van még három nő az iskolámban." Hány tanítványa volt Pitagorasznak?



Pitagorasz
(kb. 570 – kb. 500 Kr. e.)

142. Az apa 40 éves, a fia pedig 10. Hány év múlva lesz az apa háromszor idősebb fiánál?

143. Hány éves a csókánál kétszer idősebb szarka, amely tavalyelőtt háromszor idősebb volt nála?

144. A hajó sebessége állóvízben 20 km/h. A folyó sebessége 2 km/h. Határozzátok meg a két kikötő közötti távolságot, ha oda-vissza a hajó az utat 5 óra alatt teszi meg!

145. A hajó sebessége állóvízben 15 km óránként. A folyó sebessége 2 km/h. Határozzátok meg a két kikötő közötti távolságot, ha egyik irányban egy fél órával hamarabb teszi meg a hajó az utat, mint a másikba!

146. Két állomás között a távolságot a vonat 70 km/h sebességgel haladva fél órával hamarabb teszi meg, mintha 60 km/h sebességgel haladna. Határozzátok meg ezt a távolságot!

147. A személyvonat 3 óra alatt 10 km-rel több utat tett meg, mint a tehervonat 4 óra alatt. A tehervonat sebessége 20 km/h-val kisebb a személyvonaténál. Határozzátok meg a vonatok sebességét!

148. A kerékpáros 2 órát földúton, 1órát aszfaltúton haladt. Összesen 28 km utat tett meg. Határozzátok meg mindkét úton a sebességét, ha az aszfalton 4 km/h-val gyorsabban haladt.

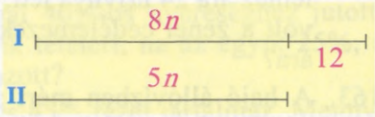
149. A vasútállomástól a turistatelepig a turisták 4 km/h sebességgel haladtak. Visszafelé 5 km/h volt a sebességük, ezért 1 órával hamarabb tették meg ugyanazt a távolságot. Határozzátok meg ezt a távolságot!

B szint

150. Mely számhoz kell hozzáadni 4-et és 19-et, hogy a kapott összegek aránya 8 : 11 legyen?

151. Két szám összege 100. Ha a nagyobbikat elosztjuk a kisebbikkel, akkor hányadosként 4-et, maradékként 5-öt kapunk. Határozzátok meg ezeket a számokat!

152. Az egyik üzemrész dolgozóinak száma úgy aránylik a másik üzemrész dolgozóinak számához, mint 8 : 5. Hány dolgozó volt mindegyik üzemrészben, ha az elsőben 12-vel több volt, mint a másodikban? A megoldáshoz használjátok a diagramot (22. ábra)!



22. ábra

153. Az I. üzemrész dolgozóinak száma úgy aránylik a II. üzemrész dolgozóinak számához, mint 3 : 2. Ha az I. üzemrészből 8 dolgozó átmegy a II. üzemrészbe, akkor az arány így változik: 5 : 6. Hány dolgozó található mindegyik üzemrészben?

154. Az anya 38 éves, a lánya 12. Mikor volt vagy lesz a lány háromszor fiatalabb az anyjánál? És kétszer?

155. Az anya 20 évvel idősebb a fiánál, éveik száma így aránylik egymáshoz: 7 : 2. Hány éves az anya?

156. Hány éves az anya és a lánya, ha tavalyelőtt a lány 5-ször volt fiatalabb az anyjánál, jövőre pedig 4-szer lesz fiatalabb nála?

157. Egy kétjegyű szám számjegyeinek összege 8. Ha a számjegyeket felcseréljük, akkor az eredeti számnál 18-cal kisebb számot kapunk. Határozzátok meg az eredeti számot!

158. Ha egy számhoz jobbról 9-es számjegyet írunk, és az így kapott számhoz hozzáadjuk az eredeti szám kétszeresét, akkor összegként 633-at kapunk. Határozzátok meg az eredeti számot!

159. Ha egy háromjegyű számhoz balról 8-as számjegyet írunk, és az így kapott négyjegyű számhoz hozzáadunk 619-et, akkor a kapott összeg 40-szer nagyobb lesz, mint az eredeti háromjegyű szám. Határozzátok meg ezt a számot! Ellenőrizzétek a megoldást!

160. Ha egy kétjegyű számhoz jobbról és balról 4-es számjegyet írunk, akkor az így kapott szám 54-szer nagyobb lesz az eredeti kétjegyű számnál. Határozzátok meg ezt a számot!

161. Két ládában 112 kg alma volt. Az első ládából az alma 30%-át átrakjuk a második ládába, akkor az utóbbiban 3-szor több alma

lesz, mint az elsőben. Hány kilogramm alma volt eredetileg a ládák mindegyikében? Ellenőrizzétek a megoldást!



162. Az üzlettulajdonos 25%-kal emelte a zenei cédélemezek árát, de a magas ár miatt visszaesett az áru iránti kereslet. Ez arra késztette a tulajdonost, hogy 25%-kal csökkentse a lemezek árát, miután egy lemez ára 24 hrivnya lett. Mennyi volt a zenei cédélemezek eredeti ára?

163. A hajó állóvízben mért sebességének aránya a folyó vizének sebességéhez: 25 : 2. A hajó 3 óra 50 percet haladt a vízfolyással azonos irányban. Mennyi időre lesz szüksége ahhoz, hogy visszatérjen kiindulási helyére?

164. A vonat 3 óra alatt teszi meg az A és B pontok közötti távolságot. Ha 10 km/h sebességgel gyorsabban haladt volna, akkor fél órával kevesebb ideig tartott volna az utazási idő. Határozzátok meg az A és B pontok közötti távolságot!

165. A gőzhajó 32 km/h sebességgel tette meg a K és P kikötők közötti távolságot. K kikötőtől 216 km-re a hajó viharba került, ezért 5 km/h-val csökkentette a sebességét, így 25 perc késéssel futott be P kikötőbe. Határozzátok meg a K és P kikötők közötti távolságot!

166. Az egymástól 450 km-re fekvő két városból egyidejűleg két gépkocsi indult el egymás irányában. Az autók 3 óra elteltével találkoztak egymással. Hány kilométert tett meg mindegyik autó a találkozásukig, ha egyikük sebessége 10 km/h-val nagyobb volt a másikénál? Ellenőrizzétek a megoldást!

167. Az egymástól 210 km-re fekvő A és B városból egyidejűleg két gépkocsi indult el egymás irányában. Az autók 1,5 óra múlva találkoztak egymással. Milyen sebességgel haladt mindegyik autó, ha a találkozásukig egyikük 30 km-rel többet tett meg, mint a másik?

168. Az egymástól 36 km-re fekvő két faluból két kerékpárosnak kell kiindulnia egymás irányában. Ha egyszerre indulnak el, akkor 1,5 óra múlva találkoznak. Ha a második kerékpáros 0,5 órával később indul el, mint az első, akkor ezt követően 1,25 óra múlva találkoznak. Határozzátok meg a kerékpárosok haladási sebességét!

169. Egy helikopter A városból reggel 5 óra 30 perckor 250 km/h sebességgel elindult B városba, ott 30 percre leszállt, majd 200 km/h sebességgel visszarepült A városba, ahová 12 óra 45 perckor érkezett meg. Határozzátok meg az A és B városok közötti távolságot!

170. A Kijevből Odesszába induló autóbuszt 20 perc múlva egy személygépkocsi követte, amely 1 óra múlva érte utol a buszt. Milyen sebességgel haladt az autóbusz, ha a személygépkocsi sebessége 80 km/h volt?

171*. Egy kereskedelmi cég két tétel árut szerzett be 25 000 hrivnya értékben, amelynek az eladásával 40%-os nyereséghez jutott. Mennyit fizetett a cég mindegyik tételért, ha az egyik 25%, a másik pedig 50% nyereséget hozott?

172*. A 15 kg tömegű réz-ezüst öntecs 45% rezet tartalmaz. Mennyi tiszta ezüstöt kell hozzáadni, hogy a kapott ötvözetben 30% réz legyen?

173*. A bizonyos mennyiségű vasat tartalmazó 1 tonna ércből a dúsítás során 400 kg salakanyagot vontak ki, amely 12% vasat tartalmazott. A megmaradó ércben a vastartalom 20%-kal nőtt. Mekkora az ércben maradt vas mennyisége?

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

174. Számítsátok ki a kifejezések értékét!

a) $|-2,7| + 2,4$; b) $-2,4 + |-2,3|$;

c) $|-10,5| : 7 - 3,2$; d) $4,8 - |3,2| : |-0,8|$;

e) $\left|-\frac{3}{2}\right| : \frac{1}{2} - 1,2^2$; f) $|2,5| : |-0,5|^2 - 200$.

175. Elfelejtettétek a barátotok telefonszámának első számjegyét. Mekkora a valószínűsége annak, hogy mégis sikerül felhívnotok őt elsőre, amikor találomra tárcsázzátok telefonszámának első számjegyét?

A zárójel felbontásával egyszerűsítsétek a 176 – 177. kifejezéseket!

176. a) $2(a - 3) + 6$; b) $-3(x - 5) + 6x$;

c) $x - 3(2 + x) + 7$; d) $-(a + 5) + 2a - 4$.

177. a) $(2c - 1) - (3c - 2)$; b) $-(1 - 2a) + 3(1 - a)$;

c) $x^2 - 2(8 + x) + 16$; d) $x^2 - 2x + 2(2 - x)$.

178. Határozzátok meg a számot, ha:

a) 20%-a 344; b) 125%-a 4800;

c) 2,5%-a 640!

ÖNÁLLÓ MUNKA

I. változat

1°. Oldjátok meg az egyenleteket!

a) $5x - 3 = 2x + 12$; b) $0{,}5y + 3(y - 2) = 2y$.

2•. Az anya 35 éves, a lánya 12. Hány év múlva lesz kétszer fiatalabb a lány, mint az édesanyja?

3••. Az a mely értéke mellett nincs megoldása az egyenletnek?

$$|x| = a.$$

II. változat

1°. Oldjátok meg az egyenleteket!

a) $2 - 3x = 7x - 8$; b) $2z = 0{,}5(z - 1) + z$.

2•. Az apa 42 éves, a fiú 10. Mikor volt az apa 5-ször idősebb a fiánál?

3••. Az a mely értéke mellett nincs megoldása az egyenletnek?

$$|x| + a = 0.$$

III. változat

1°. Oldjátok meg az egyenleteket!

a) $2x - 4 = 3 - 5x$; b) $3 - 0{,}7(1 - 2n) = 6n$.

2•. A kislány 7 éves, a bátyja 17. Mikor volt (vagy lesz) a kislány háromszor fiatalabb a bátyjánál?

3••. Az a mely értéke mellett nincs megoldása az egyenletnek?

$$(a + 1)x = 15.$$

IV. változat

1°. Oldjátok meg az egyenleteket!

a) $x + 12 = 9 - 2x$; b) $c - 0{,}2(c - 3) = 5c$.

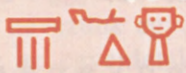
2•. A kisfiú 5 éves, a nővére 14. Mikor volt (vagy lesz) a kisfiú kétszer fiatalabb a nővérénél?

3••. Az a mely értéke mellett nincs megoldása az egyenletnek?

$$ax = -8.$$

MATEMATIKATÖRTÉNETI ADALÉKOK

Az emberek nagyon régen megtanulták, hogyan kell megoldani az egyváltozós *elsőfokú egyenleteket.* Ókori egyiptomi tudósok már közel négyezer évvel ezelőtt a keresett ismeretlen számra az „aha" (fordításban: csomó) elnevezést használták és speciális jelekkel jelölték.



A máig fennmaradt egyik papirusztekercsen olvasható a következő feladat: „A csomó és annak nyolcada 19-et tesz ki. Keressétek meg a csomót!" Ma ezt így fogalmaznánk meg: „Az ismeretlen szám és nyolcad részének összege 19-cel egyenlő. Határozzátok meg az ismeretlen számot!"

A feladat a következő egyenlettel oldható meg: $x + \frac{1}{7}x = 19$.

Hasonló feladatokat az ókori Görögország, India, Kína tudósai is meg tudtak oldani. Az ókori görög matematikus, Diophantosz (III. sz.) bonyolultabb egyenleteket is megoldott, egyebek mellett olyanokat is, mint a $630\,x^2 + 73 = 6$ alakú. Diophantosz az $x^2 = 4x - 4$ egyenletet ilyen formában jegyezte le:

δυ'ναμις ἄρα $\overline{α}$ ἴση ςς$^{ο\tilde{κ}}$ $\overline{δ}$ λείφει μ$^{\tilde{ο}}$ $\overline{δ}$

Mohamed ibn Musa al-Kvarizmi és sok követője az egyenleteket szavakkal jegyezték le, nem használtak matematikai jeleket.

Al-Kvarizmi nevéből származik a modern tudomány egy másik fontos szakkifejezése, az *algoritmus.* Így nevezik azoknak a szabályoknak a halmazát, amelyek felhasználásával bizonyos feladatkörbe tartozó tetszőleges feladat megoldható. Algoritmus például az oszlopba írt számok szorzása vagy két vagy több szám legnagyobb közös osztójának meghatározása. A mai tudományban nagyon fontos szerepe van az „algoritmus" fogalomnak, sőt a matematikának van egy *algoritmuselméletnek* nevezett külön ága. Részletesebben a felső tagozatos osztályokban tanultok majd az algoritmusokról.

A XIX. századig az algebrát olyan tudománynak tekintették, amely az egyenletek megoldásának módjait kutatja. Később kibővült, új elméletekkel gazdagodott. Ma az egyenletek az algebrának csak egyik ágát jelentik.

AZ 1. FEJEZET TANANYAGÁNAK ÖSSZEFOGLALÁSA

Az egyenlet betűkkel jelölt ismeretlen számokat tartalmazó egyenlőség.

Azt a számot, amely kielégíti az egyenletet, az egyenlet *gyökének* vagy *megoldásának* nevezzük. *Megoldani az egyenletet* – azt jelenti, hogy meghatározzák mindegyik gyökét vagy bebizonyítják, hogy nincs megoldása.

Két egyenlet egyenértékű (ekvivalens), ha mindkettőnek ugyanaz a megoldása. Egyenértékűek azok az egyenletek is, melyeknek nincs megoldásuk.

Az egyenletek alaptulajdonságai:

1. Az egyenlet bármely oldalán össze lehet vonni az egynemű összeadandókat vagy fel lehet bontani a zárójeleket.
2. Az egyenlet bármely tagját át lehet vinni a másik oldalra, de az előjelét eközben az ellenkezőjére kell változtatni.
3. Az egyenlet mindkét oldalát meg lehet szorozni, vagy el lehet osztani egy és ugyanazon, nullától különböző számmal.

Az $ax = b$ alakú egyenletet, ahol a és b tetszőleges számokat jelöl, x változós lineáris egyenletnek nevezzük. Az $ax = b$ egyenletet, ha $a \neq 0$, egyváltozós elsőfokú egyenletnek nevezzük.

Minden egyváltozós elsőfokú egyenletnek csak egy gyöke van: $x = \frac{b}{a}$. A lineáris egyenletnek lehet egy gyöke, végtelen számú gyöke vagy nincs egyetlen gyöke sem.

Az alkalmazott matematikai feladatok matematikai modellezés általi megoldása három szakaszban történik:

1) az adott feladat matematikai modelljének elkészítése;
2) a megfelelő matematikai feladat megoldása;
3) a felelet elemzése.

Önellenőrző kérdések

1. Mit nevezünk egyenletnek?
2. Mit nevezünk az egyenlet gyökének?
3. Mit jelent a kifejezés: „megoldani az egyenletet”?
4. Milyen két részből áll az egyenlet?
5. Mely betűkkel jelölik leggyakrabban a változókat?
6. Milyen egyenleteket nevezünk egyenértékűeknek?
7. Fogalmazzátok meg az egyenletek legfontosabb tulajdonságait?
8. Az egyenletek mely tulajdonságát nevezték egykor „aldzsabr”-nek?
9. Az egyenletek mely tulajdonságát nevezték valamikor „walmukabala”-nak?
10. Honnan ered az „algebra” tudomány elnevezése?
11. Az algebrán kívül a matematikának még milyen ágai vannak?
12. Mit nevezünk lineáris egyenleteknek?
13. Hány gyöke lehet a lineáris egyenletnek?
14. Van-e mindig megoldása a lineáris egyenletnek?
15. Milyen egyenleteket nevezünk egyváltozós elsőfokú egyenletnek?
16. Van-e mindig megoldása az egyváltozós elsőfokú egyenletnek?
17. Hány gyöke lehet az egyváltozós elsőfokú egyenletnek?
18. Mondjatok példát olyan lineáris egyenletre, amely nem elsőfokú egyenlet!
19. Milyen feltételek mellett van az $ax = b$ egyenletnek egy gyöke?
20. Milyen feltételek mellett nincs az $ax = b$ egyenletnek gyöke?
21. Milyen feltételek mellett van az $ax = b$ egyenletnek végtelen számú gyöke?
22. Miért fontos tudni az egyenleteket megoldani?
23. Mondjatok példát matematikai feladatra és matematikai modelljére!
24. Milyenek lehetnek a matematikai modellek?
25. Milyen szakaszokból áll a feladatok megoldása matematikai modellezés módszerével?

FELKÉSZÜLÉS A TEMATIKUS ÉRTÉKELÉSRE

1. sz. tesztfeladatok

1. Az alábbiak közül mely egyváltozós elsőfokú egyenlet?

a) $0x = 13$; b) $x + y = 0$; c) $-2x = 0$; d) $x = y$.

2. Melyik egyenletnek nem megoldása az 5?

a) $2x = 10$; b) $x - 5 = 0$; c) $100 : x = 5$; d) $0x = 0$.

3. Melyik egyenletnek nincs gyöke?

a) $2x + x = 10$; b) $x : 5 = 0$; c) $5 = x$; d) $0 : x = 10$.

4. Az alábbi számok közül melyik a $3x + 5 = 1$ egyenlet gyöke?

a) $\frac{3}{5}$; b) $-\frac{4}{3}$; c) $-\frac{5}{3}$; d) $-1\frac{1}{5}$.

5. Melyik egyenletnek van csak egy gyöke?

a) $x = x + 5$; b) $|x| = 4$; c) $x^2 = 0$; d) $x(x - 1) = 0$.

6. Oldjátok meg az $5x + 13 = 3x + 2$ egyenletet, és válasszátok ki az alábbi számok közül a gyökét!

a) –5,5; b) 5,5; c) 4,5; d) –4,5.

7. A $2(2 - x) = x - 2$ egyenletnek az alábbi megoldásai lehetnek:

a) végtelen számú; b) nincs; c) egy; d) kettő.

8. Melyik alábbi egyenlet egyenértékű az $5x = -10$ egyenlettel?

a) $5x - 10 = 0$; b) $10x = -5$; c) $-10 : 5 = x$; d) $5(x + 10) = 0$.

9. Az a mely értékei mellett van az $|x| = a$ egyenletnek egyetlen gyöke?

a) 1; b) –1; c) 0; d) 2.

10. Az a mely értékei mellett van az $(a - 1)x = 1 - a$ egyenletnek végtelen sok gyöke?

a) 1; b) –1; c) 0; d) 2.

Az 1. sz. dolgozat típusfeladatai

1°. Oldjátok meg az egyenleteket, és állapítsátok meg, hogy van-e közöttük egyenértékű!

a) $15 - x = 10$; b) $-0{,}4x = 2$; c) $2(x + 3) - 5 = 11$.

2°. A -1, 0, 1 számok közül melyik elégíti ki az alábbi egyenleteket?

a) $5x = 0$; b) $x(x + 1)(2x - 1) = 0$; c) $x^2 + 1 = 2x$.

3°. Állítsatok fel olyan egyenletet, amelynek:

a) egy gyöke van; b) két gyöke van;

c) végtelen számú gyöke van!

4°. Két tanuló együtt 29 kg bogyót gyűjtött. Mennyi bogyót szedett a tanulók mindegyike, ha az egyik 5 kg-mal többet gyűjtött, mint a másik?

5•. Oldjátok meg az egyenletet!

$$10y + 42 = 7y - 3(y - 2).$$

6•. Határozzátok meg az egyenlet gyökeit!

$$\frac{2x}{7} - \frac{x}{14} = 3.$$

7•. Egyszerűsítsétek az egyenletet, és határozzátok meg a gyökeit!

$$\frac{x+3}{2} - \frac{5+x}{5} = x + 4.$$

8•. A csónak 2,4 órát haladt a folyón a vízfolyással azonos irányban és 3,2 órát azzal szemben. A csónak által a folyásirányban megtett távolság 13,2 km-rel hosszabb volt, mint a folyással szemben megtett út hossza. Határozzátok meg a csónak haladási sebességét állóvízben, ha a folyóban a vízfolyás sebessége 3,5 km/h.

9••. Határozzátok meg az $|1 - 3x| + 2 = 5$ egyenlet gyökeit!

10••. Határozzátok meg a mindazon értékeit, amelyek mellett az $ax = 5 + 2x$ egyenlet gyöke egész szám!

2. FEJEZET

EGÉSZ KIFEJEZÉSEK



Az algebra sajátságos nyelvnek tekinthető.

M. V. Osztrogradszkij

A kifejezés a matematikában körülbelül olyan szerepet játszik, mint a szavak a nyelvben vagy az egyes téglák az épületek falában. A matematikai nyelv nem más, mint a kifejezések nyelve. Az elsajátításához meg kell tanulni a matematikai kifejezések használatát, meg kell érteni a tartalmukat, tudni kell érthető formában lejegyezni őket. A matematikai kifejezéseknek különböző típusai léteznek.

Ebben a fejezetben a következőkről lesz szó:

- **változókat tartalmazó kifejezések;**
- **hatványokat tartalmazó kifejezések;**
- **egytagok;**
- **többtagok;**
- **műveletek végzése többtagokkal.**

5. §. VÁLTOZÓKAT TARTALMAZÓ KIFEJEZÉSEK



Megvizsgáljuk a következő egyenletet!

$$\frac{2}{3}(x-5)+3x=17-2x.$$

Az egyenlet bal és jobb oldalát *kifejezéseknek* nevezzük.

$$\frac{2}{3}(x-5)+3x \text{ és } 17-2x.$$

E kifejezések mindegyike egy változót, az x-et tartalmazza. Lehetnek olyan kifejezések, amelyekben két, három vagy több változó is van. Például a $2ax + cx^2$ kifejezésben három, az a, c és x változó szerepel.

A matematikában az ilyen kifejezések nagyon fontos szerepet játszanak. A matematikatudomány a kifejezések nyelve. Ezért nem véletlen, hogy az iskolai algebra tananyagának nagy része a kifejezések vizsgálatával foglalkozik.

Lehetnek olyan kifejezések is, amelyekben nincs változó, például:

$$97 \cdot 17;\quad -\frac{3}{5} : 45;\quad \frac{0{,}2 \cdot 3 - 15 : 7}{2(3{,}5-18)}.$$

Az ilyen kifejezéseket *számkifejezéseknek* nevezzük.

Tehát vannak számkifejezések és változókat tartalmazó kifejezések (23. ábra). A továbbiakban főként a változókat tartalmazó kifejezéseket fogjuk vizsgálni.



23. ábra

Minden számkifejezésnek (amelyben nincs 0-val való osztás) meghatározott értéke van. De a változókat tartalmazó kifejezésnek a változó különböző értéke mellett különböző értékek felelnek meg.

Határozzuk meg a $3a + 5$ kifejezés értékét, ha a egyenlő 1-gyel, 2-vel, 3-mal és –4-gyel!

Ha $a = 1$, akkor $3a + 5 = 3 \cdot 1 + 5 = 8$;
ha $a = 2$, akkor $3a + 5 = 3 \cdot 2 + 5 = 11$;
ha $a = 3$, akkor $3a + 5 = 3 \cdot 3 + 5 = 14$;
ha $a = -4$, akkor $3a + 5 = 3 \cdot (-4) + 5 = -7$.

A számítások eredményeit táblázatba foglaljuk:

a	1	2	3	–4
$3a + 5$	8	11	14	–7

Ha a kifejezés több változót tartalmaz, például $2a - 3x$, akkor a kifejezés értékét úgy határozzuk meg, hogy minden változónak megfelelő számbeli értéket adunk. Ha például $a = 7$ és $x = 5$, akkor $2a - 3x = 2 \cdot 7 - 3 \cdot 5 = -1$.

Ha a kifejezés nem tartalmaz más műveletet az összeadáson, kivonáson, szorzáson, hatványra emelésen és osztáson kívül, akkor az ilyen kifejezést *racionálisnak* nevezzük. Példák racionális kifejezésre:

$$2x + n, \quad -\frac{2}{3}(x - 5), \quad \frac{a - c}{2a + c}, \quad a + \frac{1}{x + c}.$$

Az olyan racionális kifejezést, amelyben nincs változóval való osztás, *egész kifejezésnek* nevezzük. Az első két példa a fentiek közül egész kifejezés, a másik kettő pedig törtkifejezés. Ebben a fejezetben csak az egész kifejezésekkel foglalkozunk.

Az $a + b$, $a - b$, ab, $a : b$ kifejezéseket – az a és b változó összegének, különbségének, szorzatának, hányadosának nevezzük. Az ilyen kifejezéseket úgy olvassuk, hogy az a és b összege, az a és b különbsége stb.

Matematikai kifejezéseknek tekintik az egyes számokat vagy változókat is, például 2, 0, x, $-a$. Viszont az egyenlőségjelet vagy egyenlőtlenségjelet tartalmazó bejegyzések, mint például a $2 + 3 = 5$, $x < 5$, nem kifejezések.



Szeretnétek többet megtudni?

Korábban megkülönböztettek *számkifejezéseket* és *betűkifejezéseket*, de a modern matematikában betűkkel nem csak az ismeretlen számokat jelölik. Például a π betű a körvonal hosszának és a kör sugarának arányát jelöli, közelítő értéke **3,14**. Ezért a $\pi + 2{,}5$ kifejezés annak ellenére, hogy tartalmazza a π betűt, számkifejezés. Később megismerkedtek az olyan kifejezésekkel mint az $f(x)$, P_4, C_5^2, $\sin\pi$ és másokkal, amelyek tartalmaznak ugyan betűket, de azok nem helyettesíthetők számokkal. Ezért a továbbiakban azokat a betűket, amelyek számokkal helyettesíthetők, *változóknak* fogjuk nevezni, tudva azt, hogy az értékük változhat. Azokat a kifejezéseket, amelyekben ilyen változók vannak, *változókat tartalmazó* kifejezéseknek nevezzük.

A magyar nyelvben a mondásokat, az arckifejezést is a *kifejezés* szóval illetik. A matematikában ezzel a szóval röviden a matematikai kifejezést jelölik. A matematikai kifejezés bármilyen érthető rendben leírt matematikai jelek sora, beleértve a számokat, betűket, műveleti jeleket, zárójelet, százalékjelet, modulusjelet stb. Például a felső tagozatos tanulók egyebek mellett ilyen kifejezéseket tanulnak:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \quad \sum_{n=1}^{9} n^2, \quad \int_0^a x^2 dx.$$

Hogy ezek mit jelentenek, azt a későbbiekben tudjátok meg.

Ellenőrizzétek magatokat!

1. Mondjatok példát számkifejezésre!
2. Mondjatok példákat egyváltozós, kétváltozós kifejezésekre!
3. Milyen kifejezéseket nevezünk racionálisaknak?
4. Milyen kifejezéseket nevezünk egészeknek?
5. Mondjatok példát modulust tartalmazó kifejezésre!

Oldjuk meg együtt!

1. Írjátok le kifejezés formájában azt a számot, amely a következőket tartalmazza!

a) a százast; b tízest és c egyest; b) m ezrest és n tízest.

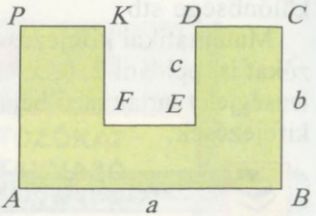
✔ M e g o l d á s. a) $100a + 10b + c$, b) $1000m + 10n$.

2. Adva van $a + b = 35$. Határozzátok meg a $7a + 7 + 7b$ kifejezés értékét!

✔ M e g o l d á s. Alkalmazzuk a felcserélés, csoportosítás és széttagolás törvényeit!

$7a + 7 + 7b = 7a + 7b + 7 =$
$= (7a + 7b) + 7 = 7(a + b) + 7 =$
$= 7 \cdot 35 + 7 = 252.$

3. Határozzátok meg a 24. ábrán látható sokszög kerületét, ha $AB = a$, $BC = b$, $DE = c$!



24. ábra

✔ M e g o l d á s. Mivel $CD + EF + KP = AB$, így

$AB + BC + CD + DE + EF + FK + KP + PA = 2AB + 2BC + 2FK =$
$= 2a + 2b + 2c.$

Oldjátok meg fejben!

179. Olvassátok el az alábbi kifejezéseket!

a) $m + n$; b) $m - x$; c) $1 + c$; d) $2ax$; e) $\frac{1}{2}(x + y)$; f) $\frac{2}{3}(x - 2)$.

180. Az alábbiak közül melyik kifejezés?

a) $2ax - x^2$; b) $a + b = b + a$; c) $3x + 5 = 7$; d) $2(3 - 0{,}7) - 3{,}5$.

181. Az alábbiak közül melyik számkifejezés és melyik változót tartalmazó kifejezés?

a) $37x - 2{,}4$; b) 2,5; c) $48 - 3{,}7(2 - 3{,}5)$; d) 24%.

182. A téglalap oldalainak hossza a és b. Mit jelentenek a következő kifejezések? ab; $2(a + b)$; $a + b$.

A szint

183. Írjátok fel az alábbiakat számkifejezések alakjában!

a) az 5 és 7 számok összegét; b) a 8 és –3 számok különbségét; c) a 15 és –4 számok szorzatát; d) a 12 és 4 számok arányát.

Határozzátok meg a 184–186. kifejezések értékeit!

184. a) $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} + 2{,}5$; b) $2{,}7 - \frac{3}{10} \cdot 7$; c) $2\frac{1}{3} - \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{6}$.

185. a) $30{,}5 : 0{,}5 - 1976 : 32{,}5$; b) $3{,}85 \cdot 5\frac{1}{7} + 69{,}25 : 27{,}7$.

186. a) $\left(1{,}75 : \frac{2}{3} - 1\frac{5}{8}\right) \cdot 16$; b) $\left(5 - 11\frac{7}{8} : 2{,}5\right) : 0{,}0625$.

187. Írjátok le az alábbi kifejezések összegét, különbségét, szorzatát és hányadosát!

a) 2 és c; b) $2x$ és $c - x$.

188. Írjátok fel!

a) az a és x számok összegét; b) a k és n számok szorzatát;
c) a c és d számok fél szorzatát; d) az x és y számok fél összegét;
e) az a és x számok különbségének felét;
f) az a és x számok kétszeres szorzatát!

189. Határozzátok meg az alábbi kifejezések értékét!

a) $0{,}5x - 3$, ha $x = 10$; b) $x + 9{,}7$, ha $x = -10$;
c) $x(x + 2)$, ha $x = 0{,}5$; d) $3x(5 - x)$, ha $x = -2{,}5$.

190. Határozzátok meg az alábbi kifejezések értékét!

a) $a + c - 3$, ha $a = 2$ és $c = 7{,}5$;

b) $2x - 3z + 1$, ha $x = 1$ és $z = \frac{1}{3}$;

c) $2xy(x - y)$, ha $x = 2$ és $y = 5$;

d) $3a(x + y - 4)$, ha $a = \frac{1}{3}$, $x = 7$ és $y = 5$.

191. Töltsétek ki a táblázatot!

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$5 - 2n$								

192. Töltsétek ki a táblázatot!

a	3	4	5	6	7	8	9
n	0	1	-1	2	-2	3	-3
$2a + 5n$							

193. Az x mely értékei mellett lesznek egymással egyenlők az alábbi kifejezések értékei?

a) $2x + 5x$ és $2(x + 5)$; b) $1 + 3(x - 5)$ és $(1 + 3x) - 5x$.

194. Írjátok fel kifejezés alakjában azt a számot, amely:

a) a tízest és 6 egyest; b) 5 tízest és b egyest;
c) m tízest és n egyest; d) a tízest és c egyest tartalmaz!

B szint

195. Határozzátok meg az alábbi kifejezések összegét és különbségét!

a) $65 \cdot 27$ és $35 \cdot 27$; b) $3{,}6 \cdot 10^3$ és $2{,}4 \cdot 10^3$.

196. Írjátok le kifejezés formájában!

a) a 74 és 0,5 számok kétszeres szorzatát;
b) a 38 és 7,6 számok különbségének felét;
c) a 35 és 12 számok összegének és különbségének szorzatát.

Határozzátok meg a 197–200. feladatokban a kifejezések értékét!

197. a) $2{,}37 + 4{,}23 - 13{,}7 \cdot 0{,}1$; b) $8{,}21 \cdot 3{,}14 - 8{,}11 \cdot 3{,}14$;
c) $(2{,}75 - 0{,}65 : 2{,}6) \cdot 4 - 1$; d) $5 - (0{,}8 + 15{,}15 : 7{,}5)$.

198. a) $3{,}18 - (0{,}13 + 4{,}27 : 1{,}4)$; b) $5{,}9 - (6{,}3 : 3{,}5 - 5{,}6)$;
c) $\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + 12\frac{2}{15}\right) : \frac{1}{15}$; d) $\left(\frac{2}{5} - \frac{3}{10} + \frac{1}{20}\right) \cdot 1\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$.

199. a) $\left(1 - \frac{2}{3}\right) : \frac{2}{3} + \left(\frac{4}{5} - 1\right) \cdot 5$; b) $\left(\frac{7}{8} - \frac{1}{2}\right) : \frac{3}{4} - 5 : \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{8}\right)$.

200. a) $\left(7{,}344 : 0{,}36 + 16\frac{1}{4} : 5 - 0{,}5 \cdot 0{,}2\right) \cdot 0{,}08$;

b) $\left(0{,}02 \cdot 0{,}5 + 7{,}904 : 0{,}38 - 21 : 10\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{2}{9}$.

201. Töltsétek ki a táblázatot!

a	–2	0	3	5	5	6	10	–10
b	1	3	0	7	–2	2	7	–7
$2a(a - b)$								

202. Töltsétek ki a táblázatot!

x								
$3x + 8$	23	38	41	68	8	2	1	0

203. Az x mely értékei mellett lesznek egyenlők egymással az alábbi kifejezések értékei?

a) $3(x + 1) - 7$ és $2x - 9$; b) $8 - 2(3 - x)$ és $5 - 3(3 - 2x)$;
c) $0{,}5x + 2(7 - x)$ és $1{,}5x - 5(x + 2)$;
d) $\frac{2}{3}x - \frac{7}{9} + 5$ és $x - \frac{1}{6}(2 - 6x)$.

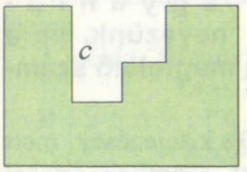
204. Írjátok le kifejezés alakjában azt a számot, amelyben:

a) a egyes, b tízes és c százas;
b) a egyes, c százas és d ezres;

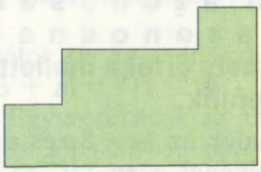
c) a egyes, n tízes és m százas;
d) c tízes, a egyes, n tízes és m százas található!

205*. Állítsátok fel annak a számnak a képletét, amely:
a) 5-tel osztható;
b) 5-tel és páros számmal osztható;
c) 5-tel és páratlan számmal osztható;
d) 5-tel és 3-mal egyidejűleg osztható!

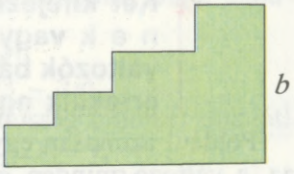
206*. Határozzátok meg a 25–27. ábrákon látható sokszögek kerületét!



25. ábra



26. ábra



27. ábra

207. Ismeretes, hogy $x - y = 12$ egyenlet. Határozzátok meg az alábbi kifejezések értékét!
a) $\frac{1}{3}(x - y)$; b) $4y - 4x$; c) $\frac{y - 6 - x}{9}$; d) $\frac{4(x + y) - 8y}{15}$.

208. Ismeretes, hogy $a = -5$, $b - c = 4$. Határozzátok meg az alábbi kifejezések értékeit!
a) $3a + 2b - 2c$; b) $\frac{ac - ab}{10}$; c) $\frac{3a(b - c + 1)}{75}$; d) $\frac{6c - 6b}{5} - \frac{a + 6}{4}$.

209. Egy háromjegyű számban a százas, b tízes és c egyes van. Írjátok le kifejezés alakjában az adott szám és az ugyanezen számjegyekkel fordított sorrendben leírt szám összegét!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

210. Oldjátok meg az alábbi egyenleteket!
a) $(2x + 3) + (4x - 8) = 37$; b) $5 - 3z - (3 - 4z) = 42$;
c) $0{,}7 + x - (-0{,}7 + 4x) = -37$; d) $-7{,}2 - (3{,}6 - 4{,}5x) = 2{,}7x$.

211. Három falunak 1200 lakosa van. Hány lakosa van mindegyik falunak, ha a másodikban kétszer annyi lakos van, mint az elsőben, a harmadikban pedig 40-nel kevesebb, mint a másodikban?

212. A háromszög oldalainak hossza három szomszédos természetes számmal fejezhető ki. Határozzátok meg ezeket, ha a háromszög kerülete 30 cm!

213. Határozzátok meg az alábbi számok valamennyi osztóját!
a) 8; b) 18; c) 28; d) 38.

6.§. AZONOS KIFEJEZÉSEK



Két kifejezést azonosan egyenlőnek vagy azonosnak nevezünk, ha a változók bármely értéke mellett a megfelelő számértékeik egyenlők.

Például azonosan egyenlők az $5a + 8a$ és a $13a$ kifejezések, mert az a változó minden értékénél ezen kifejezések számbeli értékei megegyeznek. Ez a szorzás széttagolási törvényéből következik. Azonosan egyenlők a $7x - 2x$ és $5x$, $c + 2c + 3c$ és $6c$ kifejezések.

Két azonosan egyenlő, egyenlőségjellel összekapcsolt kifejezést *azonosságnak* nevezünk.

P é l d á k.

$$5a + 8a = 13a, \quad 2(x - 3) = 2x - 6.$$

Azonosság minden egyenlőség, amely a műveletek tulajdonságait fejezi ki:

$$a + b = b + a,\ a + (b + c) = (a + b) + c,$$
$$ab = ba,\ a(bc) = (ab)c,\ a(b + c) = ab + ac.$$

Azonosságnak tekintjük az igaz számegyenlőségeket, például $3^2 + 4^2 = 5^2$, $1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$. De egyelőre csak a változókat tartalmazó azonosságokat fogjuk vizsgálni.

Adott kifejezés helyettesítését vele azonosan egyenlő kifejezéssel, a kifejezés azonos átalakításának nevezzük.

Minden egyenlőség olyan állítás, amely lehet igaz és hamis. Ha „azonosságról" beszélünk, akkor ezt igaznak vesszük. Erről meggyőződhetünk, ha az állítást úgy bizonyítjuk, mint a mértanban a tételt. A számbeli azonosság, például a $3^2 + 4^2 = 5^2$ helyességének bizonyításához elegendő a jobb és bal oldalának kiszámítása és egyenlőségük bemutatása:

$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \text{ és } 5^2 = 25, \text{ vagyis } 3^2 + 4^2 = 5^2.$$

A változókat tartalmazó azonosságokat leggyakrabban a műveletek tulajdonságaira és az egynemű tagok összevonásával, a zárójel felbontásával kapcsolatos ismert szabályokra való utalással bizonyítják. Az

azonosságot rendszerint úgy bizonyítják, hogy az egyik – bal vagy jobb – oldalát oly módon alakítják át, hogy megkapják a másik oldalát.

1. példa. Bizonyítsátok be az azonosságot!

$$9x - 18 + 3(1 - 2x) = 3x - 15.$$

B i z o n y í t á s. Egyszerűsítsük az azonosság bal oldalát!

$9x - 18 + 3(1 - 2x) = 9x - 18 + 3 - 6x = 9x - 6x - 18 + 3 = 3x - 15.$

A bizonyítandó egyenlőség bal oldala azonos a jobb oldalával. Tehát bizonyított az azonosság.

Néha az azonosság bizonyításához célszerű mindkét oldal átalakítása.

2. példa. Bizonyítsátok be az azonosságot!

$$a - 3(3 + a) = 4(1 - a) - (13 - 2a).$$

B i z o n y í t á s. Egyszerűsítsük az azonosság mindkét oldalát!

$$a - 3(3 + a) = a - 9 - 3a = -2a - 9,$$

$$4(1 - a) - (13 - 2a) = 4 - 4a - 13 + 2a = -2a - 9.$$

Az egyenlőség jobb és bal oldala ugyanazzal a $-2a - 9$ kifejezéssel lesz egyenlő. Tehát bizonyított az azonosság.

Léteznek az azonosság bizonyításának egyéb módjai is. Ezekkel később fogtok megismerkedni.

Szeretnétek többet megtudni?

Amikor arról beszélünk, hogy valamely kifejezés azonos, feltétlenül hozzá kell fűzni, hogy mely kifejezéssel azonos, mivel itt két kifejezés *azonossági viszonyáról* van szó, akárcsak az egyenesek merőlegességi vagy a szögek egyenlőségi viszonya esetében.

A kifejezések azonossági viszonyainak a következők a s a j á t o s s á g a i :

1) *minden kifejezés önmagával azonos*;

2) *ha az A kifejezés azonos B kifejezéssel, akkor B kifejezés azonos A kifejezéssel*;

3) *ha az A kifejezés azonos B kifejezéssel, s a B kifejezés azonos C kifejezéssel, akkor az A kifejezés is azonos C kifejezéssel.*

Az ilyen sajátosságok vonatkoznak a számok vagy alakzatok egyenlőségére, az egyenesek párhuzamosságára is.

Ha az azonosságban az összes változót ugyanazzal a kifejezéssel helyettesítjük be, akkor új azonosságot kapunk. Ha például a $4(a - 2) + 8 = 4a$ azonosságban az a változót $z + 3$ kifejezéssel cseréljük le, akkor a $4(z + 1) + 8 = 4(z + 3)$ egyenlőséget kapjuk, amely ugyancsak azonosság.

Ellenőrizzétek magatokat!

1. Mely két kifejezést nevezünk azonosan egyenlőnek?
2. Mit nevezünk azonosságnak?
3. Mit nevezünk a „kifejezés azonos átalakításának”?
4. Minden egyenlőség azonosság-e?

Oldjuk meg együtt!

1. Bizonyítsuk be a $2a + 6 = 6 - 4(a - 5) + 2(3a - 10)$ azonosságot!

✔ Bizonyítás. $6 - 4(a - 5) + 2(3a - 10) = 6 - 4a + 20 + 6a - 20 = 2a + 6$. Az egyenlőség jobb oldala azonosan egyenlő a bal oldalával, ezért ez az egyenlőség azonosság.

2. Mindig igaz-e az $|a^2| = a^2$ egyenlőség?

✔ Megoldás. Bármilyen legyen is az a értéke, az a^2 kifejezés értéke pozitív vagy nullával egyenlő. A nem negatív szám modulusa ugyanezzel a számmal egyenlő. Tehát az $|a^2| = a^2$ egyenlőség a minden értéke mellett igaz.

Oldjátok meg fejben!

214. Azonosak-e az alábbi kifejezések?

$2a + a$ és $3a$; $x + 2x - 3x$ és 0; $8c - 3c$ és $5c$;
$4a + \pi$ és $5a\pi$; $7xy - 2x$ és $5y$; $-3c + 9$ és $9 - 3c$.

215. A $2x - y$, $y - 2x + 3$, $4(y - 2x)$, $-y + 2x$ kifejezések közül melyek azonosak a $2x - y$ kifejezéssel?

A szint

216. Azonosak-e az alábbi kifejezések?

a) $p^2 p$ és p^3; b) $x + x^2 + x^3 + x^4$ és x^5; c) $a - c$ és $c - a$;
d) $-a^2$ és $(-a)^2$; e) $ax + ax + ax$ és $3ax$; f) $x - 2a$ és $-2a + x$.

217. Hasonlítsátok össze az x^2 és x kifejezések értékét, ha $x = -1$, $x = 0$, és $x = 1$. Azonosak-e ezek a kifejezések?

218. Írjátok le azonosság alakjában az alábbi állításokat!

a) két egymással kölcsönösen ellentett szám összege nullával egyenlő;
b) két egymással kölcsönösen reciprok szám szorzata 1-gyel egyenlő;
c) két szám szorzata egyenlő a velük ellentett számok szorzatával.

Egyszerűsítsétek a 219–220. kifejezéseket!

219. a) $2c + 3c - 5$; b) $3x - 4x + x$; c) $12n - 17 - 2n$;
d) $19c - 3c + 8$; e) $63 - 23p + 32p$; f) $4x + 65 - 10x$.

220. a) $-4ac + 3a - 7a$; b) $9 - 23x + 40x$; c) $-4 - 12 + 8ac$.

Bizonyítsátok be a 221–223. azonosságokat!

221. a) $5x + 3x + x = 9x$; b) $5x - 3x - x = x$; c) $m + 2m + 3m = 6m$.

222. a) $2x + 3x = x + 4x$; b) $-a + 7a = 7a - a$; c) $5 - 2a - 3 = 2 - 2a$.

223. a) $7x - 5x + x = 3x$; b) $5x - 9x = 2x - 6x$; c) $a = 2a + 4a - 5a$.

224. Írjátok le azonosságok alakjában a következő állításokat: a) az ellentett számok négyzetei egyenlők; b) az ellentett számok köbei ellentett számok; c) bármely szám négyzete egyenlő ezen szám modulusának négyzetével; d) bármely szám köbének modulusa egyenlő ezen szám modulusának köbével!

225. Állítsátok fel az alábbi kifejezésekből az összes lehetséges azonosságot!

$-p \cdot p$; $-p \cdot (-p)$; p^2; $-p^2$; $-(-p)^2$; $(-1)^2 \cdot p^2$.

Egyszerűsítsétek a 226–228. kifejezéseket!

226. a) $19x - 4(x + 5)$; b) $7(2 - 3x) + 21$; c) $2{,}5 + 5(a - 1{,}5)$; d) $0{,}1x + 3(1 - x)$; e) $-3(2y + 1) + 4$; f) $-2 - (7a - 5)$.

227. a) $35 + 7(x - 7)$; b) $2(c - 3) - 5(2 - 4c)$; c) $-(9 - 2x) + 4x$; d) $-4 + 4(5 - x)$; e) $-2(x + 5) + 3(x - 7)$; f) $-13 - 3(5 - 6x)$.

228. a) $12(x + 2) - (2x - 4)$; b) $1{,}5(5 - 2x) + 5(1{,}1 + x)$; c) $-3(a - 2) + 7(2a - 1)$; d) $0{,}2(x + 2) - 3(2x - 0{,}4)$.

Bizonyítsátok be a 229–230. azonosságot!

229. a) $3c - 3(c - 1) = 3$; b) $2xy + 2(3 - xy) = 6$; c) $15x = 9 - 3(3 - 5x)$; d) $1 - 2x = 5 - 2(x + 2)$.

230. a) $8x = 6 + 2(4x - 3)$; b) $5(2x + y) = 10(x + y) - 5y$; c) $7 = 12x - (-7 + 12x)$; d) $3c - 3(1 + c - x) = 3x - 3$.

231. Egyszerűsítsétek az alábbi kifejezéseket, és határozzátok meg a számértéküket!

a) $12(a - 3) + 3(a + 12)$, ha $a = 0{,}2$;
b) $x^2(2 - x) - 2(x^2 - 3)$, ha $x = -0{,}3$.

232. A $2x + 3x = 5x$ azonosságban helyettesítsétek be az x változót az $a - b$ kifejezéssel! Azonosság lesz-e az így kapott egyenlőség?

B szint

Egyszerűsítsétek a 233–235. kifejezéseket!

233. a) $2x + 4 + 2(x + 4) + 4(x - 8)$; b) $-(5a - c + 2) + 3a - c + 2$; c) $0{,}5(a + b + c) - 0{,}5(a - b + c) - 0{,}5(a + b - c)$.

234. a) $5(12a - 23x) - 8(6x - 13a)$; b) $-6(ac - 4) + 3(7 - 2ac)$.

235. a) $2(x^2 - 3) - 4(17 - 4x^2)$; b) $4(x^2 - 3) - x(4x - 5)$; c) $c(3 - 2c) + 3(c - 2c^2)$; d) $2y - 3 - 2(a + y - 1)$.

Bizonyítsátok be a 236–238. azonosságot!

236. a) $2(x - 3) - 5(x - 4) = 14 - 3x$; b) $3(2a - 1) - 2(3a - 1) = -1$;

c) $5(0{,}5 + 2x) - 5(1{,}1 - x) = 15x - 3$;
d) $9(x - 1) - 3(2x - 3) = 3x$.

237. a) $9x - 4(x + 5) - 1 = 7(x - 3) - 2x$;
b) $-2(2a + 5) = 5(2a - 9) - 7(2a - 5)$.

238. a) $3(a + c + x) - 2(a + c - x) - (a - c + x) = 2(c + 2x)$;
b) $2x + x = 2(x^2 + x + 1) - (x^2 - x + 1) - (x^2 + x - 1)$;
c) $n - (1 - (n - (1 - n))) = 3n - 2$.

239. Azonosak-e az alábbi kifejezések?
a) $1 - (1 - (1 - c))$ és $1 - c$; b) $0{,}5(x + y) - 0{,}5(x - y) - y$ és 0;
c) $a - b + 1 - 2(b + 1)$ és $2(a - b - 1) - (a + b - 1)$.

240. Töltsétek ki a táblázatot!

x	-2	-1	0	1	2
$x^5 - 5x^3 + 5x$					

Azonosak-e az $x^5 - 5x^3 + 5x$ és x kifejezések?

241. Állítsátok össze az alábbi kifejezésekből az összes lehetséges azonosságot!
a) $ac(-x)$, $ax(-c)$, $cx(-a)$;
b) acx, $a(-c)(-x)$, $(-a)(-c)x$, $(-a)(-x)c$.

242. Töltsétek ki a táblázatot!

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$2(x^2 - 4) + 6$								
$2x^2 - 2$								

Azonosak-e a $2(x^2 - 4) + 6$ és $2x^2 - 2$ kifejezések?

243. Töltsétek ki a táblázatot!

a	0	1	2	3	4	5	100	100 000
$\lvert a\rvert + 1$								
$\lvert a + 1\rvert$								

Igaz azonosság-e a $|a| + 1 = |a + 1|$?

244. Azonosságok-e az alábbi egyenlőségek?

a) $|x + 3| = x + 3$; b) $|x^2 + 5| = x^2 + 5$;
c) $|a - b| \cdot |b - a| = (a - b)^2$; d) $|x - y| = x - y$;
e) $|a + b| = |a| + |b|$; f) $|x| - |y| = |y| - |x|$.

245. Helyettesítsétek be az $x^2 - 2 = 2(x^2 - 1) - x^2$ azonosságban az x változót a következő kifejezésekkel: a) $c + 3$; b) $ac - 1$; c) $x + 5$.

246. Helyettesítsétek be az $5x + 3x = 8x$ azonosságban az x változót a következő kifejezéssel: $a^2 - ac + c^2$! Azonosság-e a kapott egyenlőség?

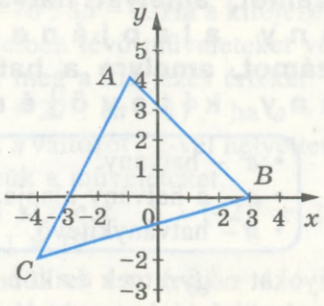
247. A téglalap hossza a cm, szélessége c cm-rel rövidebb. Írjátok le kifejezés alakjában a téglalap kerületét!

248. Az egyenlő szárú háromszög alapja a cm, szára 2 cm-rel hosszabb. Mennyivel egyenlő a háromszög kerülete?

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

249. Az egyik zsákban 80 kg liszt volt, a másikban 60 kg. Az első zsákból 3-szor annyi lisztet vettek ki, mint a másodikból. Ekkor a második zsákban kétszer annyi liszt maradt, mint az elsőben. Hány kilogramm lisztet vettek ki mindegyik zsákból?

250. Mutassátok meg a 28. ábrán jelölt pontok koordinátáit! Keressétek meg az ABC háromszög mindegyik oldalfelezőjének koordinátáit!



28. ábra

251. Oldjátok meg az alábbi egyenleteket!

a) $31(2 - x) = 93$; b) $15(1 - 2x) = 45$; c) $8{,}5(3 - 4x) = 17$;
d) $4{,}7(3 - 5x) = 94$; e) $44 = 4(2 + 3x)$; f) $26 = 2(10 - 3x)$.

7. §. HATVÁNYOKAT TARTALMAZÓ KIFEJEZÉSEK



Az algebrában gyakran találkozunk olyan kifejezésekkel, amelyek számok és változók hatványát tartalmazzák.

Hatványnak több egyenlő tényező szorzatát nevezzük.

Például:

$3 \cdot 3$ – a 3 *második hatványa* (*négyzete*);
xxx – az x változó *harmadik hatványa* (*köbe*);
$cccccc$ – a c változó *hatodik hatványa*.

Ezeket a hatványokat a következőképpen jelölik: $3 \cdot 3 = 3^2$, $xxx = x^3$, $cccccc = c^6$.

A 2-t a tizedik hatványra úgy emeljük, hogy 10 darab kettest összeszorzunk:

$$2^{10} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2.$$

Tehát $2^{10} = 1024$. Itt a 2 – a hatvány alapja, a 10 – a hatvány kitevője, és az 1024 vagy a 2^{10} – 2 tizedik hatványon.

Azt a számot, amelyet hatványra emelünk, a hatvány alapjának nevezzük.
Azt a számot, amelyre a hatványt emeljük, a hatvány kitevőjének nevezzük.

- a^n – hatvány;
- a – a hatvány alapja;
- n – hatványkitevő.

Az a^2 és a^3 hatványokat négyzetnek és köbnek nevezzük, mert a négyzet területét úgy számítjuk ki, hogy oldalának hosszát a második hatványra emeljük, míg a kocka térfogatát úgy határozzuk meg, hogy élének hosszát a harmadik hatványra emeljük.

Bármilyen szám *első hatványának* megállapodás szerint magát a számot tekintjük: a^1 – ugyanaz, mint a. Az 1 kitevőt nem szokás kiírni.

$$a^1 = a,$$
$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-szer}},$$

ahol n – természetes szám, $n \neq 1$.

A hatvány alapja törtszám és negatív szám is lehet. Például:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{81},$$

$$(-0{,}2)^3 = (-0{,}2) \cdot (-0{,}2) \cdot (-0{,}2) = -0{,}008.$$

Ahhoz, hogy egy negatív számot hatványra emeljünk, először a szám modulusát emeljük ugyanerre a hatványra, és az eredmény elé „plusz" jelet teszünk, ha a hatványkitevő páros, illetve „mínusz" jelet, ha a hatványkitevő páratlan.

Ha $a \geqslant 0$, akkor $a^n \geqslant 0$.
Ha $a < 0$, akkor $a^{2n} > 0$ és $a^{2n-1} < 0$.

Az összeadást és kivonást *elsőfokú*, a szorzást és osztást *másodfokú*, a hatványozást pedig *harmadfokú* műveleteknek tekintjük. A kifejezésekben a műveletek sorrendje a következő: először a hatványra emelést végezzük el, azután a szorzást és az osztást, majd legutoljára az összeadást és a kivonást. A szorzás az osztással, az összeadás pedig a kivonással egyenrangú, ezeket a leírás sorrendjében, egymás után végzünk el. De amikor a kifejezés egytaggal való osztást tartalmaz, akkor legelőször az egytag értékét határozzuk meg. Például ha $x = 7$, $y = 5$, akkor $70 : xy = 70 : 35 = 2$. Ha a kifejezésben zárójel szerepel, akkor először a zárójelben lévő műveleteket végezzük el.

Példa. Határozzuk meg a kifejezés értékét!

$$5a^2 + 27 : (a - 1)^3, \quad \text{ha } a = -2.$$

M e g o l d á s. Az a változót –2-vel helyettesítjük és a rangsornak megfelelően elvégezzük a műveleteket.

E l s ő m ó d s z e r. $5 \cdot (-2)^2 + 27 : (-3)^3 = 5 \cdot 4 + 27 : (-27) = 20 - 1 = 19$.

M á s o d i k m ó d s z e r. $(-2)^2 = 4$, $(-3)^3 = -27$, $5 \cdot 4 = 20$, $27 : (-27) = -1$.

Tehát $5 \cdot (-2)^2 + 27 \cdot (-3)^3 = 20 - 1 = 19$.

Zsebszámológép segítségével a hatványra emelést többféleképpen is el tudjuk végezni, összeszorozva a számot többször önmagával. Például 3,7 ötödik hatványát a következő program szerint számolhatjuk ki:

3,7 × 3,7 × 3,7 × 3,7 × 3,7 =

vagy rövidebben:

3,7 × = = = =

Azokon a számológépeken, amelyeken van F és y^x billentyű ez sokkal egyszerűbben megoldható. Így az 1,2 szám 20-ik hatványát a következő program szerint számíthatjuk ki:

1,2 F y^x 20 = .

A matematikában, fizikában, csillagászatban, biológiában és más tudományokban gyakran alkalmazzák a számok 10-ik hatványát a számok *normál alakban* való leírásához.

Bármely 10-nél nagyobb A szám leírható a következő alakban: $A = a \cdot 10^n$, ahol $1 \leqslant a < 10$ és n – természetes szám. Az A szám ilyen alakban történő felírásmódját a szám normálalakjának hívjuk, az n hatványkitevőt pedig az A szám *nagyságrendjének* nevezzük.

Például a csillagászatban a hosszúság egysége 1 parsec (rövidítve – ps.).

$$1 \text{ ps} \approx 30\,800\,000\,000\,000 \text{ km} = 3{,}8 \cdot 10^{13} \text{ km}.$$

Szeretnétek többet megtudni?

Már tudjátok, miként kell leírni a nagy számokat normálalakban. A nagyon kis pozitív számok, például a kerti csiga mozgási sebességének (0,000003 m/s) normál alakban való leírásához 10 olyan hatványait használják, amelyeknek negatív egész szám a kitevőjük. Nézzük meg, hogyan kell értelmezni 10 hatványait egész számú kitevővel:

1000	100	10	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$\|\|$	$\|\|$	$\|\|$	$\|\|$	$\|\|$	$\|\|$	$\|\|$	$\|\|$
10^3	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}

Általánosan igaz, hogy 10^{-n}, ahol n természetes szám, n jegyű tizedes törtet 0,0000...01 jelöl.

Például $10^{-5} = 0{,}00001$, $10^{-10} = 0{,}0000000001$.

A 10 egész kitevőjű hatványainak alkalmazásával bármilyen szám megadható:

$A = a \cdot 10^n$, ahol $1 \leqslant a < 10$ és n – egész szám.

A kerti csiga mozgási sebessége normálalakban a következőképpen írható le:

$$0{,}000003 \text{ m/s} = 3 \cdot 10^{-6} \text{ m/s}.$$

Ha az A szám nagy, a nagyságrendje pozitív szám, de ha az A pozitív szám nagyon kicsi, akkor a nagyságrendje negatív szám.

Ellenőrizzétek magatokat!

1. Mit nevezünk a szám hatványának?
2. Mit nevezünk a szám négyzetének, köbének?
3. Mit nevezünk a hatvány alapjának, kitevőjének?
4. Hogyan nevezik másként a második és harmadik hatványt?
5. Mit nevezünk a szám normálalakjának, a szám nagyságrendjének?

Oldjuk meg együtt!

1. Írjátok le a $6{,}7 \cdot 10^8$ számot kitevő nélkül!

✔ M e g o l d á s. $6{,}7 \cdot 10^8 = 6{,}7 \cdot 100\,000\,000 = 670\,000\,000$.

2. Írjátok le a 2 000 000 000 számot normálalakban!

✔ M e g o l d á s. $2\,000\,000\,000 = 2 \cdot 1\,000\,000\,000 = 2 \cdot 10^9$.

3. Határozzátok meg a $3x^2 - 2x^3$ kifejezés értékét, ha $x = -0{,}2$!

✔ M e g o l d á s. Ha $x = -0{,}2$, akkor $3 \cdot (-0{,}2)^2 - 2 \cdot (-0{,}2)^3 = 3 \cdot 0{,}04 - 2 \cdot (-0{,}008) = 0{,}12 + 0{,}016 = 0{,}136$.

4. Bizonyítsátok be!

a) $111^{11} + 11^{11}$ osztható 2-vel;

b) $10^{10} + 10^{20} + 10^{30}$ osztható 3-mal.

B i z o n y í t á s. a) A 111^{11} és 11^{11} számok utolsó jegyei egyesek, ezért a két szám összegének utolsó számjegye 2 lesz. Vagyis a $111^{11} + 11^{11}$ szám osztható 2-vel.

b) Mindegyik összeadandó olyan szám, amely egyes után álló nullák alakjában írható le. Három ilyen szám jegyeinek az összege 3-mal egyenlő, ezért a $10^{10} + 10^{20} + 10^{30}$ szám is osztható 3-mal.

5. Hány gyökük van a következőknek: $x^5 = 0$; $x^5 = 1$; $x^4 = 1$?

✔ M e g o l d á s. Csak egy gyökük van: $x = 0$, mivel $0^5 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$, és nem létezik 0-tól eltérő más x szám, amely esetében teljesülne az $xxxxx = 0$ egyenlőség.

Ugyanígy meggyőződhetünk arról, hogy az $x^5 = 1$ egyenletnek csak egy gyöke van: $x = 1$, míg az $x^4 = 1$ egyenletnek két gyöke: $x = 1$ és $x = -1$.

Oldjátok meg fejben!

252. Határozzátok meg az alábbi számok négyzeteit!

9; 10; 11; 20; 30; 40; 500; 0,2; 0,03.

253. Határozzátok meg az alábbi számok köbeit!

1; 2; 3; 10; 100; 0,1; 0,01; $-\frac{1}{3}$; $-1\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{4}$.

254. Határozzátok meg az alábbi számok negyedik hatványát!

1, 2, 3, –1, –2, –3, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{2}$, $-1\frac{1}{2}$.

255. Olvassátok el az alábbi kifejezéseket!

a) $a^2 + b^2$; b) $(a + b)^2$; c) $(x + y)^3$; d) $a^2 - b^2$; e) $(a - b)^2$.

256. Oldjátok meg az alábbi egyenleteket!

a) $x^7 = 0$; b) $x^8 = 0$; c) $15x^6 = 0$; d) $x^8 = 1$; e) $x^3 = 1$.

A szint

Számítsátok ki a 257–260. példát!

257. a) 5^2, 2^5, 10^3, 100^3, 25^2; b) $(0{,}2)^3$, $(0{,}3)^2$, $(0{,}04)^3$;
c) $1{,}2^2$, $2{,}3^2$, $3{,}1^3$, $1{,}007^2$; d) $(-2)^4$, $(-13)^2$, $(-2)^5$;
e) $(-3)^4$, $-(3^4)$, -3^4, $(-0{,}5)^2$, $-0{,}5^2$, $(-1)^{150}$, $(-1)^{105}$.

258. a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2$; b) $3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + 7^2$;
c) $(-2)^2 + (-2)^3 + (-2)^4 + (-2)^5 + (-2)^6$.

259. a) $(0{,}3)^3 \cdot 10^4$; b) $11{,}2 : 10^2$; c) $2400 \cdot (0{,}1)^4$;
d) $(-0{,}1)^5 : (0{,}01)^2$; e) $-0{,}2^4 \cdot (-1)^{15}$; f) $(-1)^{12} : (0{,}5)^3$.

260. a) $2 \cdot 6^2$; b) $\left(-2 \cdot \frac{1}{4}\right)^3$; c) $5 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2$; d) $-3^2 \cdot 2$; e) $(5{,}6 - 4{,}5)^3 : 0{,}1$.

261. *Ókori egyiptomi feladat.* Hét ember mindegyikének hét macskája van, s mindegyik macska hét egeret eszik meg, minden egér hét kalászt pusztít el, minden kalászból hét mérce árpa lenne. Milyen lesz ez a számsor és annak összege?



262. Helyesek-e az alábbi egyenlőségek?

a) $3^2 + 4^2 = 5^2$; b) $15^2 + 16^2 = 17^2$; c) $35^2 + 36^2 = 37^2$;
d) $3^3 + 3^2 = 6^2$; e) $4^3 + 6^2 = 10^2$; f) $97^2 - 96^2 = 97 + 96$.

263. Bizonyítsátok be!

a) $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$; *b*) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 9^3 = 45^2$.

264. Számítsátok ki a négyzet területét, ha az oldala: a) 3 cm; b) 10 m; c) 8,5 km hosszúságú!

265. Adjátok meg az alábbi számokat olyan hatványok alakjában, amelyeknek a kitevője nagyobb 1-nél, és a modulusuk szerinti legkisebb alappal!

a) 125; b) –32; c) 2401; d) 243;

e) 0,729; f) 0,4096; g) $-\frac{8}{27}$; h) $2\frac{46}{625}$.

266. Határozzátok meg az alábbi kifejezések értékét!

a) $(-7)^2 - (-1)^9 \cdot 3^4$; b) $(0{,}02 + 0{,}28)^4 \cdot 10^5$;

c) $63 - \left(4 \cdot \frac{2}{5}\right)^2 \cdot 6\frac{1}{4}$; d) $(-1)^{24} : \left(\frac{1}{2}\right)^6 + (-3)^5$;

e) $(5{,}6 - 4{,}5)^3 : 0{,}1$; f) $(0{,}3^2 + 0{,}4^2) - 0{,}5^2$.

267. Határozzátok meg az alábbi kifejezések értékét!

a) $3a^4 - 2a^2$, ha $a = -3$; b) $5c^3 - 2c^2 + c$, ha $c = 0{,}5$;

c) $n^3 + (n - 3)^2$, ha $n = -2$; d) $(2m - 1)^2 : m^4$, ha $m = -0{,}1$.

Oldjátok meg a 268–269. egyenletet!

268. a) $5x^4 = 5$; b) $4x^2 = x^2$; c) $16(x + 5)^2 = 0$; d) $-2x^3 = 2$.

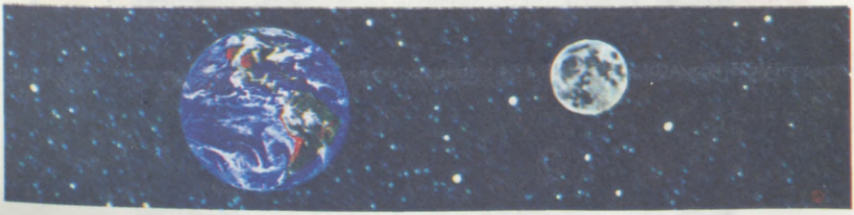
269. a) $x^3 + 1 = 0$; b) $x^6 - 1 = 0$; c) $2x^7 = 2$; d) $x^3 - 6 = 2$.

270. Írjátok le normálalakban a következő adatokat!

fénysebesség – 300 000 km/s,
a Föld tömege – 6 000 000 000 000 000 000 000 t,
a Hold tömege – 73 500 000 000 000 000 000 t,
a Föld térfogata – 1 083 000 000 000 km^3.

271. Írjátok le normálalakban az alábbi számokat!

a) 20 000; b) 7 530 000; c) 10 500 000; d) 909 900 000;
e) 33 000; f) 105; g) 1 000 000 000; h) 12345,67.



272. Írjátok le normálalakban az alábbi számokat!

a) $5{,}2 \cdot 10^4$; b) $1{,}31 \cdot 10^3$; c) $7{,}1 \cdot 10^5$; d) $4{,}44 \cdot 10^2$;
e) $2{,}05 \cdot 10^4$; f) $3{,}125 \cdot 10^6$; g) $9 \cdot 10^9$; h) $6{,}75 \cdot 10^5$.

B szint

273. Helyesek-e az alábbi egyenlőségek:

a) $2^2 + 2^2 + 6^2 + 10^2 = 12^2$; b) $2^2 + 4^2 + 6^2 + 13^2 = 15^2$;
c) $2^2 + 6^2 + 8^2 + 25^2 = 27^2$; d) $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = (1 + 2 + 3 + 4)^2$?

274. Számítsátok ki az alábbi kifejezések értékét!

a) $3{,}24 \cdot 10^2$; b) $(3^4 + 19)^5$; c) $(0{,}875 + 0{,}5^3)^{10}$;
d) $(-0{,}3)^4 \cdot 10^3$; e) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$; f) $(4^4 - 3^5 - 13)^{12}$.

275. Egyszerűsítsétek az alábbi kifejezéseket!

a) $(35 - 2^5)^4$; b) $4000 \cdot 0{,}2^3$; c) $(0{,}3^3 - 0{,}017)^6$;
d) $(-1{,}1)^3 : 0{,}11$; e) $(2^7 - 5^3 - 4)^{15}$; f) $\left(-1\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^3$.

276. Határozzátok meg az alábbi kifejezések értékeit!

a) $(4x^2 - y^2)^2 : (2x - y)^2$, ha $x = 0{,}6$, $y = -0{,}2$;
b) $2x^5 + (x + 2y)^3 + y^2$, ha $x = -2$, $y = 3$;
c) $((1 + b)^2 - (a - 1)^2)^3 - (a + b)^2$, ha $a = 1{,}1$, $b = 0{,}1$;
d) $(2m - n)^2 - (4m^2 + n^2 - 4mn)$, ha $m = 1{,}3$, $n = 2{,}5$.

277. Töltsétek ki a táblázatokat!

a)

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$2x^2$									

b)

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$(2x)^2$									

278. Állítsátok össze az $x^4 - 3x^3 + 2x^2$ kifejezés értékeinek táblázatát, ha x a következőkkel egyenlő: –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4.

279. Számítsátok ki az alábbi példákat zsebszámológép segítségével!

a) $3{,}4^5$; b) $5{,}75^4 + 57$; c) $47{,}2 \cdot 2{,}84^3$; d) $3{,}7 + 2{,}7^4$.

280. Számítsátok ki, és hasonlítsátok össze:

a) a 3 és 5 számok négyzeteinek összegét és összegük négyzetét;
b) a 10 és 6 számok négyzeteinek különbségét és különbségük négyzetét!

281. Számítsátok ki és hasonlítsátok össze:

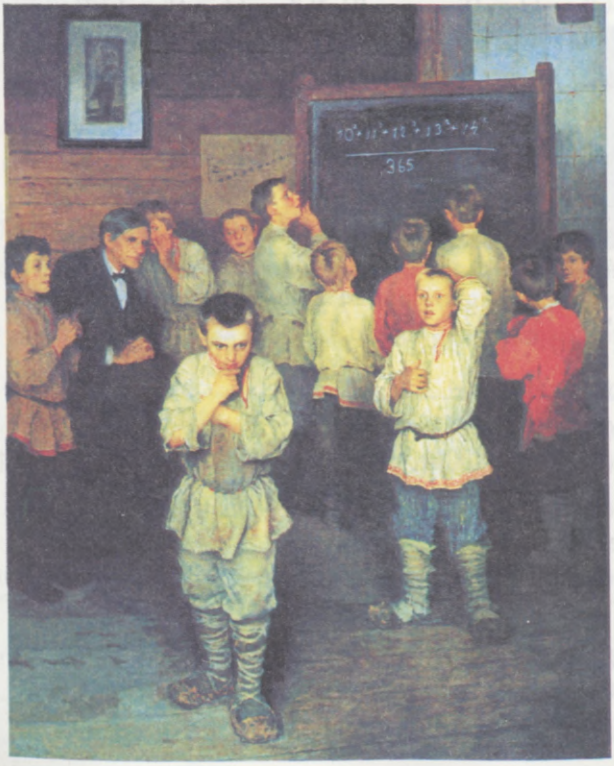
a) a 3 és 2 számok köbeinek összegét és összegük köbét;
b) az 5 és 2 számok köbeinek különbségét és különbségük köbét!

282. Mennyivel: a) nagyobb a 2, 3, 4 és 5 számok félösszegének négyzete négyzeteik félösszegénél; b) nagyobb a 2, 3, 4 és 5 számok félösszegének köbe köbeik félösszegénél?

283. M. P. Bogdanov-Belszkij festőművész *Fejszámolás* című képén egy XIX. századi iskola matematikaórájának jelenetét ábrázolja. A tanító azt a feladatot adta a tanulóknak, hogy fejben egyszerűsítsék az alábbi törtet:

$$\frac{10^2+11^2+12^2+13^2+14^2}{365}.$$

Igyekezzetek ti is megoldani ezt a feladatot!



284. A három alábbi kifejezés közül melyik értéke a legnagyobb, és melyiké a legkisebb?

a) $\frac{7^2+3^2}{2}$, $\left(\frac{7+3}{2}\right)$, $\left(\frac{7}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2$;

b) $\frac{7^2-5^2}{2}$, $\left(\frac{7-5}{2}\right)^2$, $\left(\frac{7}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2$;

c) $\frac{5^3+3^3}{2}$, $\left(\frac{5+3}{2}\right)^3$, $\left(\frac{5}{2}\right)^3+\left(\frac{3}{2}\right)^3$.

285. Bizonyítsátok be, hogy az alábbi egyenleteknek nincs megoldásuk!

a) $x^4+3=0$; b) $3x^2+8=0$; c) $(y-3)^2+1=0$.

Oldjátok meg a 286–287. egyenleteket!

286. a) $(x-5)^3=1$; b) $(x^2+1)^2=0$; c) $(x^2+1)^3=8$;
d) $(2x-3)^5=1$; e) $(8-3z)^3=-1$; f) $(x^4+3)^2=1$.

287. a) $2(y^2-1)=0$; b) $3(z^4-1)=0$; c) $0{,}5(x^3+2)=1$;
d) $0{,}2(1+z^3)=0{,}4$; e) $(x+2)^3=-1$; f) $(5-y)^7+2=1$.

288. Adjátok meg normálalakban az alábbi számokat!

a) 287 287 000; 17 530 000; 220 500; 90,99;

b) 0,0003; 0,235; 0,05; 0,0000000041;

c) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{20}$; $\frac{1}{200}$; $\frac{3}{5000}$; $\frac{73}{500\,000}$; $\frac{999}{1\,000\,000\,000}$.

289. Adjátok meg szokványos alakban az alábbi számokat!

a) $1{,}2\cdot10^3$; $3{,}47\cdot10^5$; $7{,}3\cdot10^4$; $14{,}23\cdot10^5$;

b) $2\cdot10^{-4}$; $1{,}1\cdot10^{-3}$; $9\cdot10^{-5}$; $6{,}75\cdot10^{-6}$.

290*. Bizonyítsátok be!

a) $10^{12}+2$ osztható 3-mal; b) $1+10^{10}+10^{100}$ osztható 3-mal;
c) $10^{15}+8$ osztható 9-cel; d) $10^{10}-1$ osztható 9-cel.

291*. Bizonyítsátok be, hogy bármely természetes n mellett az alábbi törtek értéke természetes szám!

a) $\frac{6^n-1}{5}$; b) $\frac{10^n+5}{3}$; c) $\frac{10^n-1}{9}$; d) $\frac{3^{4n}+4}{5}$.

292. Helyettesítsétek a betűket számokkal oly módon, hogy igazak legyenek az alábbi egyenlőségek!

a) köb = e^e; b) hatvány = ee^e.

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

293. Azonosak-e az alábbi kifejezések?
a) $2a + a + a$ és $4a$; b) $x + x + x$ és x^3; c) $2b - 2a$ és $-2(a - b)$;
d) $5 + 5 + 5x$ és $15x$; e) $3y + 2y + y - 6$ és y; f) $a^3 - a$ és a^2.

294. Milyen feltételek mellett lesznek igazak az alábbi arányosságok?
a) $3 : x = x : 27$; b) $y : 4 = 16 : y^2$.

295. Ha a kisebb csapot nyitják meg, akkor a medence egy teljes nap alatt telik meg vízzel;
ha egyszerre két csapot nyitnak meg, akkor negyed nap alatt telik meg a medence.
Mennyi idő alatt telik meg vízzel a medence, ha csak a nagyobb csapot nyitják ki?

296. Az egyenlő szárú háromszög szára 3 cm-rel hosszabb az alapjánál. Határozzátok meg az oldalak és az alap hosszát, ha a háromszög kerülete: a) 54 cm; b) 6 cm; c) a cm!



8. §. A HATVÁNYOK TULAJDONSÁGAI

A továbbiakban megvizsgáljuk a hatványokat tartalmazó kifejezések fontosabb azonos átalakításait. Kezdjük a hatvány alaptulajdonságával.

Bármilyen a számra, továbbá természetes m és n hatványkitevőkre mindig igaz a következő egyenlőség:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Bizonyítás.

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{aa\cdots a}_{m\text{-szer}} \cdot \underbrace{aa\cdots a}_{n\text{-szer}} = \underbrace{aa\cdots a}_{m+n\text{-szer}} = a^{m+n}.$$

Az $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ azonosságot a *hatvány alaptulajdonságának* nevezzük. Ebből következik, hogy az egyenlő alapú hatványok szorzásánál az alapot változatlanul hagyjuk, a hatványkitevőket pedig összeadjuk.

Például:

$3^2 \cdot 3^5 = 3^7$; $1{,}3^4 \cdot 1{,}3^5 = 1{,}3^9$; $x^3 \cdot x^5 = x^8$.

Bármilyen a számra ($a \neq 0$), továbbá természetes m és n hatványkitevőkre ($m > n$) mindig igaz a következő egyenlőség:

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Bizonyítás. A hatványok szorzására vonatkozó szabály szerint

$a^{m-n} \cdot a^n = a^{m-n+n} = a^m$, ezért $a^m : a^n = a^{m-n}$.

Az egyforma alapú hatványok osztásakor (ha az osztandó hatványkitevője nagyobb az osztó hatványkitevőjénél) az alapot változatlanul kell hagyni és az osztandó hatványkitevőjéből ki kell vonni az osztó hatványkitevőjét.

Például:

$7^5 : 7^3 = 7^2$; $(-13)^{11} : (-13)^7 = (-13)^4$.

Bármilyen a számra, továbbá természetes m és n hatványkitevőkre mindig igaz a következő egyenlőség:

$$(a^n)^m = a^{nm}.$$

Bizonyítás.

$$(a^n)^m = \underbrace{a^n \cdot a^n \cdot \ldots \cdot a^n}_{m\text{-szer}} = a^{\overbrace{n+n+\cdots+n}^{m\text{-szer}}} = a^{nm}.$$

Hatvány hatványozásakor az alapot változatlanul hagyjuk, a kitevőket pedig összeszorozzuk.

Például:

$(2^3)^4 = 2^{12}$; $(0{,}7^2)^5 = 0{,}7^{10}$; $(c^7)^3 = c^{21}$.

Bármilyen a és b számra, továbbá természetes n hatványkitevőre mindig igaz a következő egyenlőség:

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n.$$

Bizonyítás.

$$(ab)^n = \underbrace{ab \cdot ab \cdot \ldots \cdot ab}_{n\text{-szer}} = \underbrace{aa \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-szer}} \cdot \underbrace{bb \cdot \ldots \cdot b}_{n\text{-szer}} = a^n \cdot b^n.$$

Tehát

a szorzat n-dik hatványa a tényezők n-dik hatványának szorzatával egyenlő.

Például:

$$(2 \cdot 3)^4 = 2^4 \cdot 3^4;\ (3m)^6 = 3^6 m^6.$$

Bebizonyítható (kíséreljétek meg elvégezni önállóan), hogy bármely a és b számra ($b \neq 0$), továbbá természetes n hatványkitevőre mindig igaz az egyenlőség:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Vagyis az említett feltételek mellett:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n};\quad a^m : a^n = a^{m-n};\quad (a^n)^m = a^{nm};$$

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n;\quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Szeretnétek többet megtudni?

A természetes kitevőjű hatványok vizsgált tulajdonságai kiterjeszthetők a negatív előjelű, egész számú hatványkitevőkre. Például

$$10^{-5} \cdot 10^{-3} = 10^{-5+(-3)} = 10^{-8};$$
$$(10^{-2})^{-3} = 10^6.$$

Az egész számú kitevőjű hatványok tulajdonságait felhasználva leegyszerűsíthetők a normálalakban leírt bármilyen számokkal végzett műveletek. Határozzuk meg például a és b számok szorzatát és hányadosát, ha $a = 3{,}5 \cdot 10^7$, $b = 4 \cdot 10^{-3}$.

$$a \cdot b = 3{,}5 \cdot 10^7 \cdot 4 \cdot 10^{-3} = 3{,}5 \cdot 4 \cdot 10^7 \cdot 10^{-3} = 14 \cdot 10^4 = 1{,}4 \cdot 10^5;$$
$$a : b = (3{,}5 \cdot 10^7) : (4 \cdot 10^{-3}) = (3{,}5 : 4) \cdot (10^7 : 10^{-3}) =$$
$$= 0{,}875 \cdot 10^{7-(-3)} = 0{,}875 \cdot 10^{10} = 8{,}75 \cdot 10^9.$$

Ellenőrizzétek magatokat!

1. Fogalmazzátok meg a hatványok alaptulajdonságát!
2. Fogalmazzátok meg a szorzat hatványra emelésének szabályát!
3. Hogyan emelünk hatványra hatványt?
4. Hogyan emelünk hatványra törtet?

Oldjuk meg együtt!

1. Számítsuk ki! a) $0{,}5^{10} \cdot 4^5$; b) $0{,}2^8 \cdot 5^6$; c) $9^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^8$.

✔ Megoldás. a) $0{,}5^{10} \cdot 4^5 = (0{,}5^2)^5 \cdot 4^5 = (0{,}25 \cdot 4)^5 = 1^5 = 1$;
b) $0{,}2^8 \cdot 5^6 = 0{,}2^2 \cdot 0{,}2^6 \cdot 5^6 = 0{,}04 \cdot (0{,}2 \cdot 5)^6 = 0{,}04 \cdot 1^6 = 0{,}04$;

c) $9^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^8 = 9^5 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^4 = 9 \cdot 9^4 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^4 = 9 \cdot 1^4 = 9.$

F e l e l e t. a) 1; b) 0,04; c) 9.

2. Oldjátok meg a $2x^2 \cdot x = 2$ egyenletet!

✔ M e g o l d á s. Osszuk el 2-vel az egyenlet mindkét oldalát, a bal oldalát pedig adjuk meg x alapú hatványként:

$$2x^2 \cdot x = 2,\ x^2 \cdot x = 1,\ x^3 = 1, \text{ ahonnan } x = 1.$$

F e l e l e t. $x = 1$.

3. Adjátok meg hatványként az alábbi kifejezéseket!

a) $a^5 \cdot a^3 \cdot a$; b) $(x - 2y)(x - 2y)^2$; c) $81 \cdot 3^5 \cdot 27$.

✔ M e g o l d á s. a) $a^5 \cdot a^3 \cdot a = a^{5+3+1} = a^9$;

b) $(x - 2y)(x - 2y)^2 = (x - 2y)^{1+2} = (x - 2y)^3$;

c) $81 \cdot 3^5 \cdot 27 = 3^4 \cdot 3^5 \cdot 3^3 = 3^{4+5+3} = 3^{12}$.

F e l e l e t. a) a^9; b) $(x - 2y)^3$; c) 3^{12}.

4. Határozzátok meg a számok összegét, különbségét, szorzatát és hányadosát!

$$a = 1{,}2 \cdot 10^5 \text{ és } c = 2 \cdot 10^4.$$

✔ M e g o l d á s. $a + c = 1{,}2 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^4 = 12 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^4 = 14 \cdot 10^4 = 1{,}4 \cdot 10^5$;

$a - c = 1{,}2 \cdot 10^5 - 2 \cdot 10^4 = 12 \cdot 10^4 - 2 \cdot 10^4 = 10 \cdot 10^4 = 10^5$;

$a \cdot c = 1{,}2 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^4 = 1{,}2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^4 = 2{,}4 \cdot 10^9$;

$a : c = (1{,}2 \cdot 10^5) : (2 \cdot 10^4) = (1{,}2 : 2) \cdot (10^5 : 10^4) = 0{,}6 \cdot 10 = 6$.

F e l e l e t. $1{,}4 \cdot 10^5$; 10^5; $2{,}4 \cdot 10^9$; 6.

Oldjátok meg fejben!

Egyszerűsítsétek a 297–298. kifejezéseket!

297. a) $3^5 \cdot 3^7$; b) $12^4 : 12^3$; c) $\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$; d) $(-4)^2 \cdot (-4)^3$.

298. a) $x^5 \cdot x^8$; b) $m^3 \cdot m^7$; c) $f^4 : f$; d) $c^3 \cdot c^4 \cdot c^5$; e) $z^2 \cdot z^5 \cdot z$.

299. Adjátok meg a kifejezéseket hatványok alakjában!

a) 625; b) $(x^3)^5$; c) $x^2 \cdot y^2$; d) $8 \cdot 3^3$; e) $64 \cdot 49$; f) $x^4 \cdot y^6$.

300. Oldjátok meg az egyenleteket!

a) $z^3 z = 0$; b) $4x^5 x^6 = 0$; c) $y^5 y^2 = 1$; d) $xx^3 = 1$.

A szint

Adjátok meg a 301–302. szorzatokat hatványok alakjában!

301. a) $3^{13} \cdot 3^6$; b) $18 \cdot 18^{14}$; c) $(-11)^5 \cdot (-11)^4$;

d) $\left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^7$; e) $\left(1\frac{2}{3}\right)^{10} \cdot \left(1\frac{2}{3}\right)$; f) $\left(-\frac{2}{5}\right)^9 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^{16}$;

g) $0{,}5^5 \cdot 0{,}5^5$; h) $(-1{,}2) \cdot (-1{,}2)$.

302. a) $a^5 \cdot a^3$; b) $x^4 \cdot x^4$; c) $m \cdot m^8$; d) $x \cdot x^2 \cdot x^3$; e) $y^7 \cdot y \cdot y^7 \cdot y$;
f) $z \cdot z^2 \cdot z^3 \cdot z^5$; g) $(a+b)^2 \cdot (a+b)^5$; h) $(x-y) \cdot (x-y)$.

303. Egyszerűsítsétek az alábbi kifejezéseket!

a) $4^5 \cdot 4^7$; b) $a^7 \cdot a^4$; c) $x^2 \cdot x^4 \cdot x^5$; d) $0{,}2^5 \cdot 0{,}2^3$; e) $c^{10} : c^8$;
f) $c^8 \cdot c^3 \cdot c$; g) $13^8 : 13^7$; h) $n^5 \cdot n^{12}$; i) $a^5 \cdot a^7 \cdot a^4$.

Végezzétek el a 304–305. példákban a hatványra emelést!

304. a) $(a^2)^3$; b) $(x^3)^2$; c) $(y^7)^2$; d) $(-x^5)^6$; e) $\left((-a)^3\right)^4$;

f) $\left((-b)^3\right)^7$; g) $\left((x^5)^4\right)^3$; h) $(-x^3)^3$; i) $(-a^4)^9$; j) $\left((-x)^4\right)^9$.

305. a) $(m^8)^3$; b) $(x^{10})^4$; c) $(a^5)^n$; d) $(z^m)^8$.

306. Határozzátok meg:

a) a 2^4 szám második, harmadik és negyedik hatványát;
b) a $(-2)^3$ szám második, harmadik és ötödik hatványát!

307. Pozitívak vagy negatívak-e az alábbi kifejezések értékei?

a) $(-5)^{21} : (-5)^{13}$; b) $(-8)^8 \cdot (-8)^{10}$; c) $(-3)^5 \cdot (-3)^7 \cdot (-3)^4$.

Hasonlítsátok össze a 308–309. példákban szereplő kifejezéseket!

308. a) $(-2)^3 \cdot (-2)^{10}$ és $(-2)^8$; b) $(-3)^7 : (-3)^5$ és $(-3)^{75}$;
c) $(-1)^5 \cdot (-10)^{35}$ és $(-100)^{91}$; d) $(-2{,}5)^{32} : (-7)^{31}$ és $(-2{,}5) : (-7)$.

309. a) $(-6)^{21} \cdot (-6)$ és $(-6)^{30}$; b) $(-4)^{12} : (-4)^7$ és $(-4)^{16}$;
c) $(-2)^9 \cdot (-2)^{15}$ és $(-2)^{25}$; d) $(-5)^6 \cdot (-5)^5$ és $(-5)^{13}$.

310. Számítsátok ki az alábbi kifejezések értékeit!

a) $2^{13} \cdot 0{,}5^{13}$; b) $0{,}5^{18} \cdot 2^{18}$; c) $25^7 \cdot 0{,}04^7$; d) $5^{33} \cdot 0{,}2^{33}$.

311. Határozzátok meg az alábbi kifejezések értékeit!

a) $2^7 \cdot 5^7$; b) $0{,}25^{10} \cdot 4^{10}$; c) $(-8)^{11} \cdot 0{,}125^{11}$;

d) $0{,}2^8 \cdot 0{,}5^8$; e) $6^6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6$; f) $\left(1\frac{3}{5}\right)^{16} \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^{16}$.

312. Van-e megoldása az egyenleteknek?

a) $x^2 x^4 = -1$; b) $x^3 x^6 = -1$; c) $x^7 \cdot 0 = 0$; d) $0 \cdot x^8 = 1$.

313. Oldjátok meg az egyenleteket!

a) $x^8 \cdot x^7 = 1$; b) $y^4 \cdot y^5 = -1$; c) $x^2 \cdot x^2 = 1$; d) $z^3 \cdot z^2 \cdot z^8 = -1$.

314. Határozzátok meg az alábbi számok összegét, szorzatát és hányadosát!

a) $2{,}4 \cdot 10^5$ és $3 \cdot 10^5$; b) $1{,}5 \cdot 10^7$ és $5 \cdot 10^7$;
c) $6{,}4 \cdot 10^4$ és $3{,}2 \cdot 10^4$.

315. Végezzétek el a műveleteket!

a) $2{,}5 \cdot 10^5 + 3{,}3 \cdot 10^5$; b) $7{,}7 \cdot 10^7 - 5 \cdot 10^7$;
c) $6{,}4 \cdot 10^4 : 3{,}2 \cdot 10^4$; d) $6{,}4 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^3$.

B szint

Számítsátok ki a 316–318. példákat!

316. a) $0{,}5^{12} \cdot 2^{13}$; b) $0{,}1^{21} \cdot 10^{20}$; c) $0{,}2^{41} \cdot (-0{,}5)^{40}$;
d) $5^{27} \cdot 0{,}2^{30}$; e) $(-0{,}25)^{15} \cdot 4^{16}$; f) $4^{31} \cdot 0{,}25^{30}$.

317. a) $\left(-\frac{5}{7}\right)^{12} \cdot \left(-\frac{7}{5}\right)^{14}$; b) $7^{15} \cdot \left(-\frac{1}{7}\right)^{16}$; c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{10} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{11}$;
d) $(-0{,}4)^8 \cdot 3^4 \cdot (-2{,}5)^8$; e) $0{,}2^7 \cdot 0{,}3^2 \cdot 5^7$; f) $25^{10} \cdot 2^8 \cdot 0{,}04^{10}$.

318. a) $5^{20} \cdot 0{,}2^{18}$; b) $0{,}04^{12} \cdot 25^{11}$; c) $(-2{,}5)^{17} \cdot (0{,}4)^{19}$;
d) $10^{26} \cdot 0{,}1^{28}$; e) $\left(\frac{1}{8}\right)^{35} \cdot (-8)^{37}$; f) $(-1{,}25)^{22} \cdot (-0{,}8)^{23}$.

Adjátok meg hatványok alakjában a szorzatokat a 319–321. példákban!

319. a) $a^5 \cdot (a^2)^7$; b) $(x^2)^3 \cdot (x^3)^4$; c) $y \cdot (y^5)^2 \cdot y^6$;
d) $(b^3 \cdot b^5)^2$; e) $(x \cdot x^8)^3 \cdot x^3$; f) $(-a^2)^3 \cdot (a^3)^5$;
g) $(-y)^6 \cdot (-y^4)^5$; h) $\left((-x^3)\right)^2 \cdot (-x)^4$; i) $\left(-a^4\right)^3 \cdot \left((-a)^3\right)^5$.

320. a) $a^6 x^6$; b) $(-b)^7 y^7$; c) $a^3 b^3 c^3$; d) $(-1)^9 m^9$; e) $32x^5$;
f) $0{,}0081b^2$; g) $\left(\frac{1}{2}\right)^{10} a^{10} b^{10}$; h) $\frac{1}{27} x^3 y^3$; i) $10\,000 \left(\frac{m}{n}\right)^4$.

321. a) $5^6 \cdot 125$; b) $36 \cdot 6^8$; c) $2^{10} \cdot 64$; d) $0{,}001 \cdot 0{,}1^5$;
e) $(-0{,}3)^{15} \cdot (-0{,}027)$; f) $0{,}4 \cdot 0{,}16$; g) $0{,}25 \cdot 0{,}125$;
h) $\frac{27}{64} \cdot \frac{9}{16}$; i) $\frac{16}{625} \cdot \left(-\frac{8}{125}\right)$.

322. Oldjátok meg az egyenleteket!
a) $3x^2 \cdot x^5 + 3 = 0$; b) $-2y^4 \cdot y^7 = 2$;
c) $0{,}5x^3 \cdot x^8 + 1 = 1{,}5$; d) $\frac{1}{3}y^4 \cdot y^7 + 2 = 2\frac{1}{3}$.

323. Helyettesítsétek a csillagokat olyan hatványokkal, hogy azonosságot kapjatok!
a) $x^6 \cdot * = x^{15}$; b) $a^{10} \cdot * \cdot a = a^{17}$; c) $(*)^5 = x^{20}$; d) $(*)^7 = -a^{21}$.

324. Határozzátok meg a változó azon értékeit, amelyek mellett igazak lesznek az egyenlőségek!
a) $5^3 \cdot 5^4 = 5^{5+z}$; b) $3^x \cdot 3^5 = (3^2)^x$; c) $\left((4^3)^x\right)^4 = 4^x \cdot 4^{22}$;
d) $(6^x)^4 = (6^3)^x$; e) $(7^6)^8 = 7^{12x}$; f) $(2^5)^x \cdot 2^2 = (2^3)^x \cdot (2^x)^4$.

325. Oldjátok meg az egyenleteket!
a) $(2x)^5 = -32$; b) $(3x)^4 = 81$; c) $12x^5 x^3 = 0$;
d) $(x^9 \cdot x^4)^3 = -1$; e) $(x^7 \cdot x^{11})^5 = 1$; f) $(4(x+2)^2)^8 = 0$.

326. Határozzátok meg az alábbi számok összegét, szorzatát és hányadosát!
a) $3 \cdot 10^{-7}$ és $2 \cdot 10^{-7}$; b) $4{,}5 \cdot 10^{10}$ és $3 \cdot 10^9$;
c) $-6 \cdot 10^{13} \cdot 1{,}2 \cdot 10^{12}$; d) $2{,}8 \cdot 10^{19}$ és $7 \cdot 10^{20}$.

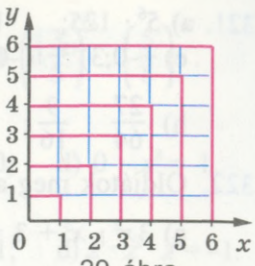
327. Határozzátok meg az alábbi számok összegét, szorzatát és hányadosát!
a) $1{,}4 \cdot 10^{-6}$ és $7 \cdot 10^{-6}$; b) $3{,}5 \cdot 10^{-4}$ és $5 \cdot 10^{-4}$.

328. Végezzétek el a műveleteket!
a) $2{,}5 \cdot 10^4 + 3{,}3 \cdot 10^5$; b) $7{,}7 \cdot 10^7 - 5 \cdot 10^5$;
c) $6{,}4 \cdot 10^5 : (3{,}2 \cdot 10^4)$; d) $5{,}5 \cdot 10^7 + 8{,}3 \cdot 10^6$;
e) $7{,}7 \cdot 10^4 - 7{,}1 \cdot 10^6$; f) $6{,}4 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^3$.

329. Az $(ab)^n = a^n \cdot b^n$ azonosság felhasználásával bizonyítsátok be az alábbi azonosságokat!
a) $(xyz)^n = x^n \cdot y^n \cdot z^n$; b) $(xyzt)^n = x^n \cdot y^n \cdot z^n \cdot t^n$.

330. Bizonyítsátok be az azonosságot!
a) $a^m \cdot a^n \cdot a^k = a^{m+n+k}$; b) $((a^n)^m)^k = a^{nmk}$.

331. A 29. ábra felhasználásával fejezzétek ki tetszőleges n természetes szám négyzetét az első nem páros számok n összege által!



29 ábra

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

332. Azonosságok-e az alábbi egyenlőségek?

a) $3x + 5 = 3(x + 5)$; b) $3(x - 4) = 3x - 12$;
c) $(2a + b)^2 = (b - 2a)^2$; d) $(2x - 3y)^3 = (3y - 2x)^3$;
e) $(a + b) \cdot 0 = a + b$; f) $y(x - x) = 0$.

333. Egy telephelyen 2200 t szenet tároltak, a másikon 2800 tonnát. Amikor a második telephelyről ötször annyi szenet szállítottak el, mint az elsőről, mindkét telephelyen egyenlő lett a tárolt szén mennyisége. Mennyi szenet szállítottak el a telephelyek mindegyikéről?

9. §. EGYTAGOK



A legegyszerűbb kifejezéseket: a számokat, a változókat, ezek hatványait és szorzatait *egytagoknak* nevezzük. Például a 6, $-\frac{7}{12}$, z, x^5, $0{,}3a^2x$, $3a \cdot 5c$ kifejezések is egytagok.

Ha az egytagban az első helyen csak egy számtényező szerepel és minden változó csak egy tényezővel fordul elő, akkor az ilyen egytagot *normálalakúnak* nevezzük. Az utolsó kivételével ilyenek a fenti egytagok. A $3a \cdot 5c$, $2x^3x^2$, $ab \cdot 8$ nem normálalakú egytagok, mert az elsőben két szám is szerepel tényezőként, a 3 és az 5, a másodikban

az x^3 és x^2 is ott van tényezőként ugyanazzal az x változóval, a harmadikban pedig a 8 tényező nem az első helyen van.

A szorzás csoportosítási és összevonási törvényeinek felhasználásával minden egytag megadható normálalakban.

Például:

$$3a \cdot 5c = 3 \cdot 5 \cdot a \cdot c = 15ac,$$
$$0{,}5xy \cdot 4y^3 = 0{,}5 \cdot 4 \cdot x \cdot y \cdot y^3 = 2xy^4,$$
$$4cx(-2cx^3) = 4 \cdot (-2) \cdot c \cdot c \cdot x \cdot x^3 = -8c^2x^4.$$

A normálalakú egytagban a számtényezőt az egytag *együtthatójának* (*koefficiensének*) nevezzük. Például a $15xz$, $-8{,}3a^2$, m^3, $-p$ egytagok együtthatói rendre a következőkkel egyenlők: 15, –8,3, 1 és –1. Az 1 és –1 együtthatókat nem szokás feltüntetni.

Az egytag két vagy több egytag összeszorzásával alakítható normálalakúvá.

Az egytagok összeszorzásakor a számtényezőket szorozzák, a betűtényezőkre pedig az azonos alapú hatványok szorzásának szabályát alkalmazzák.

Ha több egytag összeszorzására van szükség, akkor szorzásjelet tesznek közéjük, s az így kapott egytagot normálalakúvá alakítják.

Például határozzuk meg az $5a^2b$ és $-0{,}2ab^3$ egytagok szorzatát.

$$5a^2b\,(-0{,}2ab^3) = 5 \cdot (-0{,}2)\, a^2abb^3 = -a^3b^4.$$

A $-a^3b^4$ egytagban a változók hatványkitevőinek összege 7. Ezt az összeget a $-a^3b^4$ *egytag fokszámának* nevezzük. Az $5xy$ egytag fokszáma 2.

Általában véve az egytag fokszáma a benne található összes változó hatványkitevőinek az összegével egyenlő. Ha az egytag szám, akkor a fokszámát nullának tekintik.

Például a 0,3, 5^3, $(-2)^5$ egytagok fokszáma nulla.

Az egytagok hatványra emelhetők. Például emeljük harmadik hatványra a $2ax^5$ kifejezést:

$$(2ax^5)^3 = 2ax^5 \cdot 2ax^5 \cdot 2ax^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot x^5 \cdot x^5 \cdot x^5 = 8a^3x^{15}.$$

Az $(ab)^n = a^n b^n$ azonosságból következik az alábbi szabály.

Egytagot hatványra úgy emelünk, hogy az egytag valamennyi tényezőjét ugyanerre a hatványra emeljük, és a kapott hatványokat összeszorozzuk.

Példák. $(3my^2)^4 = 3^4 m^4 (y^2)^4 = 81m^4y^8$,

$$\left(-\frac{1}{3}a^2x^3\right)^4 = \left(-\frac{1}{3}\right)^4 \cdot (a^2)^4 \cdot (x^3)^4 = \frac{1}{81}a^8x^{12}.$$

Szeretnétek többet megtudni?

Az egytagok a számokhoz hasonlóan összeadhatók, kivonhatók, szorozhatók és oszthatók. Azonban két egytag összege, különbsége és hányadosa nem mindig lesz egytag. Például a $6x$ és $2x$ egytagok összege és különbsége rendre a $8x$ és $4x$ egytagokkal egyenlő. De a $8ax$ és $4ay$ egytagok összege és különbsége a $8ax + 4ay$ és $8ax - 4ay$ kifejezésekkel egyenlő, miközben ezek a kifejezések nem egytagok.

A $6c^3$ és $3c$ egytagok hányadosa a $2c^2$ egytaggal egyenlő, mivel $2c^2 \cdot 3c = 6c^3$. Ugyanakkor a $12c$-nek a $6c^3$ egytaggal való osztásával kapott hányados nem lesz egytag.

Ellenőrizzétek magatokat!

1. Mit nevezünk egytagnak?
2. Mit nevezünk az egytag együtthatójának?
3. Mikor mondjuk, hogy az egytag normálalakú?
4. Hogyan szorozható össze két egytag?
5. Hogyan emelhető hatványra az egytag?
6. Mit nevezünk az egytag fokszámának?

Oldjuk meg együtt!

1. Adjuk meg az egytagot normálalakban!

a) $ax^2 \cdot 25x^3$; b) $-5a^2n \cdot 2a^2n^3$; c) $\frac{2}{3}xy^2 \cdot (-3x^3)$.

✔ M e g o l d á s. a) $ax^2 \cdot 25x^3 = 25 \cdot ax^2 \cdot x^3 = 25ax^5$;

b) $-5a^2n \cdot 2a^2n^3 = -5 \cdot 2 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot n \cdot n^3 = -10a^4n^4$;

c) $\frac{2}{3}xy^2 \cdot (-3x^3) = \frac{2}{3} \cdot (-3) \cdot x \cdot x^3 \cdot y^2 = -2x^4y^2$.

F e l e l e t. a) $25ax^5$; b) $-10a^4n^4$; c) $-2x^4y^2$.

2. Emeljük négyzetre és köbre a $-2xz^3$ egytagot!

✔ M e g o l d á s. $(-2xz^3)^2 = (-2)^2 \cdot x^2 \cdot (z^3)^2 = 4x^2 z^6$;
$(-2xz^3)^3 = (-2)^3 \cdot x^3 \cdot (z^3)^3 = -8x^3 z^9$.

F e l e l e t. $4x^2 z^6$; $-8x^3 z^9$.

Oldjátok meg fejben!

334. Az egytagok összeszorzásával töltsétek ki a táblázatot!

	x	$5x$	$-0{,}1x$	$2x^2$
a				
$2a$				
$-3ax$				
$4a^2$				

335. Az alábbi kifejezések közül melyek egytagok?

a) $\frac{2}{3}abc^3$; b) $(a+b)x$; c) $c^2 \cdot (-y^2)$; d) $-3{,}5$; e) $t^{125} : z$.

A szint

336. Az alábbiak közül írjátok ki a normálalakú egytagokat!

a) $3mn^2m^4$; b) $-3xyz^5$; c) $3ab \cdot 7c$; d) $\frac{1}{2}c$; e) $2x\left(-\frac{1}{2y}\right)$.

337. Adjátok meg az egytagokat normálalakban és húzzátok alá az együtthatóikat!

a) $2a \cdot 3b$; b) $12ax \cdot a^2$; c) $-5cz \cdot cz$; d) $0{,}3a \cdot 2ab^2$;

e) $\frac{1}{3}mn \cdot 3n^2$; f) $(-2ab) \cdot (-3)$; g) $a^2 \cdot 3bc \cdot a^3$;

h) $-3 \cdot (-5)xy$; i) $\frac{1}{3}x \cdot x^2 \cdot 1\frac{1}{2}x^3$; j) $2{,}5ax \cdot (-0{,}4)x^2$.

338. Határozzátok meg az egytagok együtthatóit!

a) $2na^3$; b) xy^2z^3; c) $-ab^3c$; d) $\frac{2}{3}a^2 \cdot x^3$; e) $-2xy \cdot 3x^2$.

339. Számítsátok ki az egytagok értékét!

a) $2a^4b$, ha $a = -1$; $b = 5$; b) $-x^2y^3$, ha $x = 0{,}2$, $y = -3$;

c) $-0{,}5xc^3$, ha $x = -0{,}2$, $c = -\frac{1}{2}$.

Szorozzátok össze az egytagokat a 340–341. példákban!

340. a) $2ab$ és $3a^2c$; b) $0{,}3xy^2$ és $\frac{1}{3}x^2y$; c) $-am^2$ és $3m^3p$;

d) $0{,}2xy$ és $-5xy$; e) $abcd$ és $-ab^2c^3$; f) $1\frac{2}{3}ax$ és $\frac{3}{5}z$.

341. a) $3a^3$, $2a^2z$ és $6az^3$; b) $2y$, $-3y^2$ és y^3; c) $\frac{2}{5}x^5y^4$ és $-\frac{5}{7}xy^3$.

342. Emeljétek négyzetre és köbre az egytagot!

a) $2ax$; b) $-3a^2$; c) $5bc^2$; d) $0{,}2x^3m$; e) $-\frac{1}{2}x^5c^2$; f) $-\frac{2}{3}a^2x^3$.

Egyszerűsítsétek a kifejezéseket a 343–344. példákban!

343. a) $(3ax^2)^3$; b) $(x^3y^3)^2$; c) $(-2ab)^3$; d) $-3xy^3 \cdot 2xy^2$; e) $(-2a^2b)^3$.

344. a) $2a(3mc)^2$; b) $\frac{1}{8}c^2(-2xc)^3$; c) $\frac{2}{3}a^3(-3ax)^4$;

d) $(-2a^2)^3 \cdot a^3$; e) $-0{,}7y^3\left(-\frac{1}{7}y^3\right)^2$; f) $\left(-\frac{1}{3}pq^2\right)^4 \cdot p^3$.

B szint

Adjátok meg normálalakban az egytagokat a 345–346. példákban!

345. a) $2a \cdot 5x \cdot \left(-1\frac{2}{5}a\right)$; b) $5c^3 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)cx$; c) $-4a \cdot 3axy\left(-\frac{3}{4}x^2y\right)$;

d) $0{,}8xyz \cdot (-5y)$; e) $\frac{2}{3}ac^3 \cdot (-6c^2)$; f) $-5a^2z^3 \cdot \left(-\frac{3}{5}z\right)$.

346. a) $\frac{5}{7}xy \cdot \left(-\frac{7}{10}xy\right)$; b) $\left(-\frac{3}{4}acx\right) \cdot \left(-\frac{4}{5}ax^3\right)$;

c) $-3ax^2 \cdot 2a \cdot (-5x^3)$; d) $-2cz^3 \cdot 3z \cdot (-5cz)$;

e) $-\frac{1}{2}cz^2 \cdot 4cx \cdot (-c)$.

347. Számítsátok ki az egytagok értékeit!

a) $0{,}5\,a^5$, ha $a = 2$; b) $2c^2x^3$, ha $c = 1{,}5$, $x = -10$;

c) $-8xz^5$, ha $x = 0{,}1$ és $z = -2$;

d) $-\frac{2}{3}a^2c^4$, ha $a = \frac{1}{2}$ és $c = -3$;

e) $1\frac{13}{27} \cdot (6xy^3)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}xy\right)^3$, ha $x = 3$, $y = \frac{1}{2}$;

f) $\left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot (-0{,}2xy)^4 \cdot (50y^3z)^2$, ha $x = 0{,}2$, $y = 10$, $z = 0{,}06$.

348. Szorozzátok össze az alábbi egytagokat!

a) $-axyz$, $2az^2$ és $-3x$; b) $5a^2$, $3xy^3$ és $-\frac{2}{3}axy^3$;

c) $-2\frac{1}{3}ab^2$, $-\frac{3}{7}ab^2$ és $3b^2$; d) $-1\frac{2}{3}am^2m$, $-3am^2$ és $-0{,}2a$.

349. Töltsétek ki a táblázat üres kockáit az a változó olyan hatványaival, hogy a hatványok szorzata mindegyik sorban, mindegyik oszlopban és mindegyik átlóban azonosan egyenlő legyen (30. ábra).

a		a^3
	a^4	a^2
	1	

30. ábra

350. Emeljétek köbre az egytagokat!

a) $3cx$; b) $2a^2m$; c) $0{,}5axy^3$;

d) $-\frac{2}{3}ab^2c^3$; e) $-1\frac{1}{2}c^2n^2p$; f) $-2\frac{2}{5}an^2c^3$.

351. Emeljétek negyedik hatványra az egytagokat!

a) $2an$; b) $3x^2$; c) $0{,}1ax^2$; d) $-0{,}1ac^2$; e) $-\frac{2}{3}x^2y$; f) $-1\frac{1}{2}ab^2c$.

Egyszerűsítsétek a kifejezéseket a 352–354. példákban!

352. a) $(2ac^3)^4$; b) $(-ax^3)^4$; c) $(-3an^2)^5$;

d) $(-0{,}2xy^2)^3$; e) $\left(-\frac{2}{3}axy^2\right)^4$.

353. a) $x^5 \cdot (2ax^2)^3$; b) $3a^2 \cdot (2a^2c)$; c) $-x^2 \cdot (3x^3y)^3$;

d) $a \cdot (2cx^2)^2$; e) $c^3 \cdot (3cx^2)^2$; f) $(-2a^2x)^2 \cdot \frac{1}{2}a$.

354. a) $(2ax^2)^2 \cdot (ax)^3$; b) $(3nz^3)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}nzx\right)^3$;

c) $(-2x^2y^3)^2 \cdot (-5xy^2)^3$; d) $\left(-1\frac{2}{3}ax^2\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{5}a^3x\right)^2$;

e) $3x^2 \cdot (-5x^3y^4)^2$; f) $(-a^6b^3)^7 \cdot 6a^3b^4$;

g) $0{,}5mn^4 \cdot (-2m)^5$ h) $(-0{,}1x^2y)^4 \cdot 1000xy^2$.

355. Mutassátok meg, hogy az alábbi egyenleteknek nincs megoldásuk!

a) $x^4 \cdot x^8 + 3 = 0$; b) $2x^7 \cdot x^5 = -31$; c) $-8y^4 \cdot y^8 = 64$.

356. Oldjátok meg az egyenleteket!

a) $(x^3)^4 \cdot x \cdot x^2 = -1$; b) $(-x^2)^3 \cdot x^5 \cdot (x^3)^3 = -1$;

c) $(0{,}2x^7 \cdot x^6)^2 + 1{,}4 = (1{,}2)^2$; d) $\frac{2}{3}(-x^5)^3 \cdot x^4 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{7}{9}$;

e) $z^2 \cdot z^4 = z^2 \cdot z^3$; f) $x^4 \cdot x^5 = 8x^6$; g) $x^3 \cdot x^5 = x \cdot x^2$.

357. Adjátok meg az alábbi kifejezéseket egytagok négyzeteiként!

a) $16a^4 b^2$; b) $0{,}36x^8 y^{12}$; c) $0{,}01a^{18} b^2 c^{10}$;

d) $361m^6 n^{30}$; e) $\frac{9}{25} a^{26} b^{14}$; f) $\frac{16}{49} x^{16} y^{22} z^4$.

358. Adjátok meg az alábbi kifejezéseket egytagok köbeiként!

a) $-8a^6$; b) $27x^9 y^{15}$; c) $-0{,}001a^3 b^{12}$;

d) $0{,}064x^{18} y^{27}$; e) $-\frac{1}{125} a^9 b^6 c^3$; f) $1\,000\,000y^{21} x^{30}$.

359. Helyettesítsétek be a csillagot egytaggal oly módon, hogy igaz egyenlőséget kapjatok!

a) $* \cdot \frac{1}{3} x^4 y^6 = -0{,}1x^4 y^8$; b) $-8a^2 b^2 \cdot * = 4a^5 b^7$;

c) $0{,}6a^2 b \cdot * = 6a^2 b^3$; d) $5m^2 n^3 \cdot * = -m^5 n^6$.

360. Ismeretes, hogy $3x^2 y^3 = 7$. Határozzátok meg az alábbi kifejezések értékét!

a) $1{,}8x^2 y^3$; b) $5x^2 y^3$; c) $-9x^4 y^6$; d) $6\frac{3}{7} x^6 y^9$.

361. Ismeretes, hogy $2b^2 c = 5$, $(a^2 b)^2 = 2$. Határozzátok meg az alábbi kifejezések értékét!

a) $(-2a^2 b^2 c)^3 \cdot (3ab^2)^2$; b) $(-0{,}5a^2 b^4)^2 \cdot (2a^2 bc)^3 \cdot a^2 b$.

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

362. Határozzátok meg:

a) a kocka valamennyi élének hosszát, ha az 18 cm-rel hosszabb az oldalkerületénél;

b) ugyanezen kocka felszínének a területét és térfogatát!

363. A kertben alma- és meggyfák nőttek, s az almafák tették ki az összes fa 40%-át. Meggyfából 64-gyel volt több, mint almafából. Hány fa nőtt a kertben összesen? Közülük mennyi volt meggyfa, és mennyi almafa?

364. Oldjátok meg az egyenleteket!

a) $2x - 3(x + 1) = 0$; b) $2x + 3 = 3(x + 1) - x$;

c) $7(2x - 5) + 3 = 45$; d) $9(x + 2) - 3x = 6(x + 3)$.

ÖNÁLLÓ MUNKA

I. változat

1°. Számítsátok ki: a) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4$; b) $1{,}7^2 - 8 \cdot 0{,}5^3$!

2°. Emeljétek négyzetre az egytagot: $0{,}3ax^3$!

3•. Egyszerűsítsétek a kifejezést: $(-2ac^2)^2 \cdot (0{,}5a^2x)^3$!

4•. Bizonyítsátok be az azonosságot: $4(7x - 1) + 3x = 31x - 4$!

5••. Adátok meg a 27 500 000 000 számot normálalakban!

II. változat

1°. Számítsátok ki: a) $\left(-\frac{3}{4}\right)^3$; b) $2{,}1^2 - 8 \cdot 0{,}5^4$!

2°. Emeljétek négyzetre az egytagot: $-5cz^3$!

3•. Egyszerűsítsétek a kifejezést: $(3am^2)^3 \cdot \left(-\frac{2}{3}xm^4\right)^2$!

4•. Bizonyítsátok be az azonosságot: $5 - x + 3(3x - 4) = 8x - 7$!

5••. Adjátok meg a 17 770 000 000 számot normálalakban!

III. változat

1°. Számítsátok ki: a) $\left(-\frac{4}{5}\right)^3$; b) $3{,}7^2 - 4 \cdot 0{,}5^3$!

2°. Emeljétek köbre az egytagot: $-1{,}2ac^2$!

3•. Egyszerűsítsétek a kifejezést: $(-0{,}5ac^2)^2 \cdot (4a^2x)^3$!

4•. Bizonyítsátok be az azonosságot: $5x - 2(x - 4) = 3x + 8$!

5••. Adjátok meg a 350 000 000 000 számot normálalakban!

IV. változat

1°. Számítsátok ki: a) $\left(-\frac{3}{5}\right)^3$; b) $2{,}3^2 - 27 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$!

2°. Emeljétek köbre az egytagot: $-0{,}8x^2y$!

3•. Egyszerűsítsétek a kifejezést: $(-0{,}4x^3)^2 \cdot (-10ax^2)^3$!

4•. Bizonyítsátok be az azonosságot: $9x - 2(2x + 6) = 5x - 12$!

5••. Adjátok meg a 98 790 000 000 számot normálalakban!

FELKÉSZÜLÉS A TEMATIKUS ÉRTÉKELÉSRE

2. sz. tesztfeladatok

1. Adjátok meg a 0,0009 számot hatvány alakjában!

   a) $0{,}3^3$; b) $0{,}3^2$; c) $0{,}03^2$; d) $0{,}03^3$.

2. Adjátok meg a $625x^8$ egytagokat hatvány alakjában!

   a) $(5x^2)^8$; b) $(5x^2)^4$; c) $(5x)^4$; d) $(5x)^8$.

3. Melyik kifejezés azonos az ax^2 kifejezéssel?

   a) $a \cdot x(-x)$; b) $a \cdot x + ax$; c) $a(-x)(-x)$; d) $ax \cdot ax$.

4. Az m mely értékei mellett igaz az $a^{16}a^m = a^{32}$ egyenlőség:

   a) 14; b) 2; c) 1; d) 16?

5. A p mely értékei mellet igaz a következő egyenlőség $(c^3)^p = c^{12}$?

   a) 1; b) 0; c) 2; d) 4?

6. Az alábbi egyenletek közül melyeknek nincs megoldásuk?

   a) $x^{2^*} = x^6$; b) $x \cdot x^3 = -1$; c) $0 \cdot x^3 = 0$; d) $x^5 \cdot x^3 = 1$?

7. A d mely értékei mellett azonosak a következő kifejezések: $9(x-3) - 2(3x + 5)$ és $dx - 37$?

   a) -3; b) 3; c) -4; d) 4.

8. Adjátok meg az x és y számok négyzeteinek összegét!

   a) $x^2 + y^2$; b) $(x + y)^2$; c) $2x + 2y$; d) $x^2 \cdot y^2$.

9. Adjátok meg normálalakban a 24 000 000 000 számot!

   a) $24 \cdot 10^9$; b) $2{,}4 \cdot 10^9$; c) $2{,}4 \cdot 10^{10}$; d) $0{,}24 \cdot 10^{10}$.

10. Határozzátok meg az $x^4 - 3x^2 + 4$ kifejezés értékét, ha $x = 2$!

    a) 6; b) 7; c) 8; d) 9.

A 2. sz. dolgozat típusfeladatai

1°. Emeljétek hatványra az alábbiakat!

a) 5^3; b) $(0{,}2)^4$; c) $(-1)^5$.

2°. Határozzátok meg az alábbi kifejezések értékét!

a) $0{,}5a^3 - 3{,}9$, ha $a = 2$; b) $3m^2 - 82$, ha $m = -5$.

3°. Adjátok meg az alábbi kifejezéseket normálalakú egytag formájában:

a) $6xy \cdot 0{,}5ax$; b) $a^2 \cdot 4a^2 x$.

4°. Emeljétek négyzetre és köbre az egytagokat!

a) $-a^3 b^2 c^5$; b) $1\frac{2}{3} m^2 n$.

5•. Számítsátok ki!

a) $18 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^3$; b) $2{,}4^2 - 1{,}6^2$; c) $\frac{15^4}{3^3 \cdot 5^5}$.

6•. Egyszerűsítsétek a kifejezéseket!

a) $\left(\frac{1}{2}ab^3\right) \cdot (-6a^2 b)$; b) $(-0{,}2m^2 n)^2 \cdot (-5mn^2)$.

7•. Oldjátok meg az egyenletet!

a) $2x^2 \cdot x = 2$; b) $4x^3 \cdot x^2 = 0$; c) $3x^4 + 6 = 0$.

8•. Határozzátok meg a $2{,}5 \cdot 10^{10}$ és $1{,}25 \cdot 10^8$ számok összegét, különbségét és hányadosát!

9••. Azonosságok-e az alábbi egyenlőségek?

a) $|x-y| = |y-x|$; b) $|x^2| + 1 = |x^2+1|$.

10••. Bizonyítsátok be, hogy bármely természetes n esetében a tört értéke természetes szám!

$$\frac{7^{4n}-1}{10}.$$

10.§. TÖBBTAGOK



A matematikában gyakran van szükség egytagok összeadására vagy kivonására. Például a $7x + 2a$ és $7x - 2a$ a $7x$ és a $2a$ egytagok összege és különbsége. A $7x - 2a$ kifejezés a $7x$ és a $-2a$ egytagok összegének tekinthető, mivel $7x + (-2a) = 7x - 2a$. A $2x^4 - 3x^3 + x^2 - 9x - 2$ kifejezés $2x^4$, $-3x^3$, x^2, $-9x$ és -2 egytagok összege.

Néhány egytag összegét többtagnak nevezzük.

A többtag valamennyi összeadandóját a többtag *tagjának* nevezzük. Például a $2xy - 5x + 6$ többtag a következő három tagból áll: $2xy$, $-5x$ és 6.

Azokat a többtagokat, amelyek két tagot tartalmaznak, kéttagnak nevezzük, a három tagot tartalmazókat pedig háromtagnak. Az egytag a többtag részesete vagy típusa.

Léteznek olyan egész kifejezések, amelyek nem többtagok.

Ilyenek például az $(a + b)^2$, $2a - (b + x)^3$ egész kifejezések, amelyek nem többtagok. Az említett kifejezések közötti kapcsolatot a 31. ábra illusztrálja.



31. ábra

A többtagokban előfordulhatnak *egynemű tagok*, amelyek csak együtthatójukban különböznek vagy egyáltalán nem térnek el egymástól. Például a $4x + 7x - 5$ háromtagban az első két tag egynemű.

Ha összevonjuk őket, akkor a $11x - 5$ kéttagot kapjuk, amely azonosan egyenlő az eredeti háromtaggal.

A többtag *normálalakú*, ha minden tagja normálalakú egytag és nincs közöttük egynemű tag.

Például az

$$x^3 - 2x^2 + 3x + 7, \quad ab + bc - ca, \quad 2ax - 3a \cdot 5x + 8$$

többtagok közül az első kettő normálalakú, de a harmadik nem az. A műveletek tulajdonságai (50. old.) alapján minden többtag megadható normálalakban is, például:

$$2ax - 3a \cdot 5x + 8 = 2ax - 15ax + 8 = -13ax + 8.$$

A többtagok tagjai különböző sorrendben írhatók fel, de legtöbbször valamelyik változójuk hatványkitevőjének csökkenése szerint rendezik sorba őket. Például az $5ax^2 + 6x^3 - 4a^2x + a^4$ többtagot, ha az x hatványának csökkenési sorrendjében rendezzük sorba, akkor a következőt kapjuk: $6x^3 + 5ax^2 - 4a^2x + a^4$. Itt az x változó legnagyobb hatványkitevője 3, ezért az ilyen többtagot harmadfokú többtagnak nevezzük az x változóhoz viszonyítva. Ez a többtag átrendezhető az a változó hatványa csökkenésének megfelelően is. Ilyenkor az $a^4 - 4a^2x + 5ax^2 + 6x^3$ többtag az a változóhoz viszonyítva negyedfokú lesz.

Szeretnétek többet megtudni?

Többtagnak tekinthető-e az $(a + b)c$ kifejezés? Olykor határozott igennel válaszolnak erre a kérdésre, mondván, hogy a szorzás széttagolási törvénye szerint az adott kifejezés azonosan egyenlő az $ab + bc$ kéttaggal, tehát maga is kéttag. Ez azonban helytelen megállapítás. **Az algebrában a kifejezéseket annak megfelelően nevezik meg, ahogy meg vannak adva, s nem attól függően, ahogy megadhatók.**

Vizsgáljunk meg egy példát! A $8a$ kifejezés két, három vagy több tag alakjában is megadható:

$$8a = 3a + 5a, \quad 8a = a + 3a + 4a, \quad 8a = a + a + a + a + 4a.$$

Ha ebből kiindulva a $8a$ kifejezés egytagnak, kéttagnak vagy háromtagnak volna nevezhető, akkor ez zavarokhoz vezetne. Ezért az algebrában egyezményesen a megadott, leírt alaknak megfelelően nevezik meg a kifejezéseket, nem pedig úgy, ahogy megadhatók vagy leírhatók lennének valamilyen azonos átalakítással.

Az $(a + b)c$ kifejezés se nem egytag, se nem többtag.

Ellenőrizzétek magatokat!

1. Mit nevezünk többtagnak?
2. Mondjatok példákat kéttagra, háromtagra, négytagra!
3. A többtag mely tagjait nevezzük egyneműeknek?
4. A többtag részesetének vagy típusának tekinthető-e az egytag?
5. Mikor mondjuk azt, hogy a többtag normálalakú?

Oldjuk meg együtt!

1. Adjuk meg az alábbi többtagokat normálalakban!

a) $5x + 4x^2 + 3x^3 - 5x^3 - 4x^2 - 3x$; b) $2ab + 3a^2 \cdot ab + 7ab^2 (-ab) + 3b$.

✔ M e g o l d á s. a) Összevonjuk az egynemű tagokat és rendezzük a többtag részeit:

$$\underline{5x} + \underline{\underline{4x^2}} + \underline{\underline{3x^3}} - \underline{\underline{5x^3}} - \underline{\underline{4x^2}} - \underline{3x} = -2x^3 + 2x.$$

b) Az adott többtag minden tagját normálalakúvá változtatjuk és elrendezzük őket az a változó hatványának megfelelően:

$$2ab + 3a^2 \cdot ab + 7ab^2 (-ab) + 3b = 2ab + 3a^3 b - 7a^2 b^3 + 3b = \\ = 3a^3 b - 7a^2 b^3 + 2ab + 3b.$$

F e l e l e t. a) $-2x^3 + 2x$; b) $3a^3 b - 7a^2 b^3 + 2ab + 3b$.

2. Számítsuk ki az alábbi többtag értékét!

$5x^5 - 3x^4 + 4x^3 + 7 + 2x^4 - 4x^3 + x^4 - 4x^5 + 2$, ha $x = 2$.

✔ M e g o l d á s. Normálalakra hozzuk a többtagot:

$$\underline{5x^5} - \underline{\underline{3x^4}} + \underline{\underline{4x^3}} + 7 + \underline{\underline{2x^4}} - \underline{\underline{4x^3}} + \underline{\underline{x^4}} - \underline{4x^5} + 2 = x^5 + 9.$$

Ha $x = 2$, akkor $x^5 + 9 = 2^5 + 9 = 32 + 9 = 41$.

F e l e l e t. 41.

3. Két kerékpáros egyszerre indult el egymás felé A és B pontból. Határozzátok meg az A és B pont közötti távolságot, tudva, hogy a kerékpárosok a km/h és b km/h sebességgel haladtak és t óra múlva találkoztak.

✔ M e g o l d á s. 1. m ó d s z e r. Az első kerékpáros t óra alatt at km-t, a második bt km-t tett meg. Vagyis a távolság egésze: $(at + bt)$ km vagy $(a + b)t$ km.

2. m ó d s z e r. A kerékpárosok 1 óra haladás után $(a + b)$ km-re közelítették meg egymást, míg t óra elteltével, a találkozásuk pillanatáig $(a + b)t$ km-t tettek meg. Ez pedig a keresett távolság.

F e l e l e t. $(a + b)t$ km.

Oldjátok meg fejben!

365. Az alábbi kifejezések közül melyik többtag?

a) $2x - 3$; b) $37am^2$; c) $x^2 - 3x + \frac{5}{x}$; d) $y(x - y)$; e) -21.

366. Mely egytagok összegei a többtagok?

a) $ax - cx^2 + 3$; b) $-2x^2 + 3x - 7$; c) $-m^2 - n^2$;

d) $2c^3 - 3c^2 - 5c + 1$; e) $\frac{1}{5}x^3 - 2 + x^4 + 3x$.

367. Nevezzétek meg a normálalakú többtagokat!

a) $2x + 3a - 5$; b) $a^2 - a + 5a + b$; c) $-x + 3xa - a + a^2$;
d) $m - m - n^2$; e) $x^3 + 3x^2 - 3x + 7$; f) $-0{,}5a - 4a^2 + 3a - 1$.

368. Nevezzétek meg a többtag fokszámát az x változóhoz viszonyítva!

a) $2ax - 3a + 5$; b) $x^3 - x^5 + 4x$; c) $2x^3y - 3x^2y^2 - 1$;
d) $0{,}1abx + 3{,}7x^2 - ab$; e) $3ax^3 - bx$; f) $m^3x^5 - mx^5$;
g) $0{,}7ax + 8a^2x + 5$; h) $3x - x^3 + 27px$; i) $y^5 - a^3y$.

A szint

369. Határozzátok meg az egytagok összegét!

a) $3x$ és bx; b) $2abc^2$ és $3abc^2$; c) 2 és x; d) $7ac$ és $3ax$;
e) $-a^2$ és a^2; f) $14x^2y$ és $-6ac^2$; g) $2a$ és $3b$; h) $-a$ és a^2;
i) $3c$ és $-2y$; j) $-0{,}5$ és $0{,}5x$; k) $-4x$ és $2x$; l) q^3 és $-\frac{1}{3}q^3$.

370. Határozzátok meg az egytagok különbségét!

a) $2a$ és $3x$; b) $-m$ és $5c$; c) $-4p$ és $2p$;
d) $-4{,}7x$ és 5; e) $-3a^2x$ és $-8a^2x$; f) a és $-a$.

371. Vonjátok össze az egynemű tagokat!

a) $4x^2 + x - 5x^2 - 12$; b) $-6ab + 2a^2 + b^2 - ab$;
c) $8a - 10ab + 3a$; d) $-0{,}5x^2 - y^2 + 2{,}2x^2 + 0{,}8y$;
e) $2a^2b - b^2a + 7ab^2$; f) $\frac{2}{3}xy^3 - \frac{3}{5}x^3y - 1\frac{1}{3}xy^3 + 2x^3y$.

372. Vonjátok össze az egynemű tagokat!

a) $4x^2 + 2x - 7x^2 - 9x^3 - 2x$; b) $3a^4 - 12 + 13a^2 + 5 - a^2 + 8a^4$;
c) $27m^5 - 17m^3 - 7 + 10m^3 - 30m^5$;
d) $y^4 - 2y^3 + 2 + 5y^3 - 2y - 14 + 7y^4$.

373. Írjátok le nomálalakban az alábbi többtagokat!

a) $a - b + 3a + 2b^2$;
b) $7x - y^2 + 5xy - 2x \cdot 3y$;
c) $37 - z^3 + 3t - 35z^3$;
d) $x + x^2 + x^3 - 2x^2 - x$;
e) $\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}a \cdot 3c - ac$;
f) $-105p + 15q + 10p \cdot 10{,}5$.

374. Rendezzétek a többtagokat az x változó hatványainak csökkenése szerint!

a) $3x^4 - 5x^2 - x^3 - 2x$;
b) $1 - x^2 - px - qx^3$;
c) $ax + bx^2 + cx^3 + dx^4$;
d) $1 - x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x$.

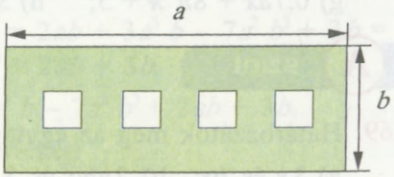
375. Számítsátok ki a többtagok értékét!

a) $x^2 - 5x + 6$, ha $x = 2$;
b) $0{,}7x^2 + 0{,}3x^2$, ha $x = 0{,}5$;
c) $2{,}8a - 1{,}8a^2$, ha $a = -0{,}2$.

376. Számítsátok ki a többtagok értékét!

a) $m^3 - n^2$, ha $m = 2$, $n = -3$;
b) $s + 2t^2 - 4$, ha $s = 2{,}3$, $t = 0{,}5$.

377. Határozzátok meg a 32. ábrán látható alakzat területét, tudva, hogy mind a négy nyílása c oldalú négyzet!



32. ábra

378. Rendezzétek a többtagokat az a változó hatványainak csökkenése szerint!

a) $3a^2 - 3a + 5 - a^3 + a^4$;
b) $1 + a + a^2 - a^3 - a^5$;
c) $5a^5 - 5 + 2a + a^3 - 3a^2$;
d) $2ac - 3a^2c + c^2 - a^3$.

B szint

379. Számítsátok ki a többtagok értékét!

a) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$, ha $x = 1{,}2$;
b) $2c^3 - 5c^2 - c + 7$, ha $c = -2{,}1$;
c) $3a^2 - 2ax - x^2$, ha $a = -0{,}4$ és $x = 1{,}2$;
d) $0{,}25n^2 + 0{,}5m - n^2$, ha $n = 4{,}8$ és $m = 2{,}4$.

380. Írjátok le nomálalakban az alábbi többtagokat!

a) $x^3 - 2x^2 + 3x - 5x^2$;
b) $4x - 2x \cdot 3y - 3y - 5xy$;
c) $2{,}3 - ac + a^2c - 1{,}3$;
d) $2 - c^2 + c^3 - 2c^3 + c^3 \cdot 5$;
e) $2a^2 \cdot 3a^3 + 5a^4 \cdot (-2a)$;
f) $x \cdot 2x^2 + 2x \cdot x^2 - x^2 \cdot x^2$;
g) $3a - 7a(-2a^2)^2 + a^5 + a$;
h) $(2x^3)x + x(-2x)^3 + x^3(-x^2)$.

381. Írjátok le nomálalakban az alábbi többtagokat!
a) $(2a^2)^3 + 4 \cdot 3a^5 - 5a - 9 - 3a^6 + a$;
b) $x^2 + 2x^3 - (3x)^2 - 4x^2 \cdot x^3 + 7 - 2x^3$;
c) $(-5x) \cdot 2x - (x^4)^2 + 6x^2 + 10 + x^3 \cdot 3x^5 - 3x^5$.

382. Írjátok le többtag alakjában azt a számot, amelyben:
a) a ezres, b százas, 0 tízes és c egyes van;
b) a tízezres, b százas, c tízes és 0 egyes van!

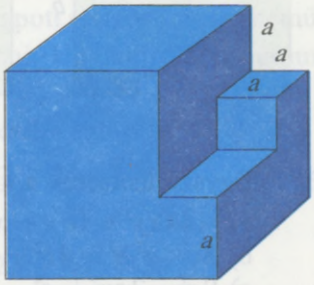
383. Írjátok le kéttag alakjában azt a számot, amelynek m számmal való osztásakor:
a) hányadosként 43-at, maradékként 2-t kaptok;
b) hányadosként 5-öt, maradékként r-t kaptok!

Írjátok le többtag alakjában a 384–391. feladatok feleleteit!

384. Az egyik zsákban a kg liszt van, a másikban b kg-mal több. Hány kilogramm liszt van mindegyik zsákban?

385. Egy kilogramm burgonya m hrivnyába kerül, egy kilogramm káposzta ára pedig n hrivnya. Mennyit kell fizetni együttesen 8 kg burgonyáért és 4 kg káposztáért?

386. A $3a$ oldalú kockából a 33. ábrán látható módon kimetszettek két téglatestet. Határozzátok meg a megmaradt poliéder űrtartalmát és felszínének területét!



33. ábra

387. A könyv a hrivnyába kerül, 10 füzet ára pedig m hrivnya. Mennyit kell fizetni együttesen 3 könyvért és 5 füzetért?

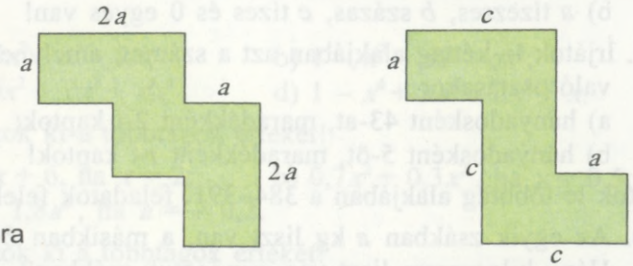
388. A tehergépkocsira m zsák búzát, n zsák hajdinát, és egy zsák cukrot raktak. Határozzátok meg az egész rakomány tömegét, ha egy zsák búza tömege a kg, egy zsák hajdináé b kg, a cukoré pedig 50 kg!

389. Az egyik vonat v_1 km/h, a másik v_2 km/h sebességgel halad. Hány kilométer távolságra közelítik meg egymást fél óra alatt, ha egymás irányában közlekednek?

390. A városból egy kerékpáros indult a faluba, vele szemben fél óra múlva egy másik kerékpáros indult a faluból a városba. Mindketten rendre v_1 és v_2 km/h sebességgel haladtak, és fél óra múlva találkoztak. Határozzátok meg a város és a falu közötti távolságot!

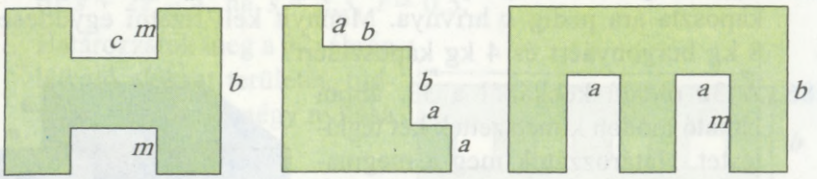
391. A és B városokból egyszerre indult el azonos irányban egy személygépkocsi és egy motorkerékpár. Mindkettő rendre v_1 és v_2 km/h sebességgel haladt. Határozzátok meg az A és B városok közötti távolságot, ha a gépkocsi 1,5 óra múlva érte be a motorkerékpárt!

392. Határozzátok meg a 34. ábrán látható alakzatok kerületeit!



34. ábra

393. Határozzátok meg a 35. ábrán látható alakzatok területeit!



35. ábra

394. Egyszerűsítsétek a kifejezéseket!

a) $-44xy^2 + 16y + x^2y + 50xy^2 - 16y - 7x^2y$;

b) $8 - a^2b^2 - 4b^2 + 23a^6 + 5a^2b^2 - 30 + 4a^6$;

c) $9a^2 - 2ax^3 + a^4 - a^2x^3 + ax^3 - a^4 + 5ax^3$;

d) $-10abc + 2ab + 2bc + 2ac - 7abc - 6ac$.

395. Számítsátok ki a többtagok értékeit!

a) $9x^2 - 4x^2 + 15 - x^5 + 7x^2 - 8x^5$, ha $x = -7$;

b) $2y^{10} - 10y^3 - 3y^{10} - y^4 + y^{10} + 6y^3$, ha $y = -5$;

c) $-6a^3b^2 + a^2b^3 - 10ab + 5a^3b^2 - a^2b^3$, ha $a = 10$, $b = 0{,}9$.

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

396. Számítsátok ki!

a) 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8, 2^9, 2^{10};

b) $(-1)^2$, $(-1)^3$, $(-1)^4$, ..., $(-1)^{2n}$, $(-1)^{2n+1}$;

c) 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6, 10^7, 10^8;

d) $0{,}1^2$, $0{,}1^3$, $0{,}1^4$, $0{,}1^5$, $0{,}2^2$, $0{,}3^3$, $0{,}4^4$.

397. Adva van a $3x$ és $5y$ kifejezés. Irjátok le: a) négyzeteik különbségét; b) különbségük négyzetét; c) négyzeteik összegét; d) összegük négyzetét!

398. A dolgozó 90% kedvezménnyel üdülési beutalót kapott, amelyért 360 hrivnyát fizetett. Mennyibe kerül a beutaló?



11. §. TÖBBTAGOK ÖSSZEADÁSA ÉS KIVONÁSA

Két többtag összeadásához, azaz a többtagok összegének meghatározásához elegendő pluszjelet tenni közéjük.

Például az $a^2 + ax + x^3$ és a $c^2 + cx + x$ többtagok összege az $a^2 + ax + x^3 + c^2 + cx + x$ többtag. Ha a kapott összegben egynemű tagok vannak, akkor ezeket össze kell vonni. Ugyanígy kell három vagy több többtagot is összeadni.

Példa. Adjuk össze az alábbi többtagokat!

$$x^2 + 2x + 4,\ 3x^2 - 4 \text{ és } 3 - 2x.$$

M e g o l d á s.

$$x^2 + 2x + 4 + 3x^2 - 4 + 3 - 2x = 4x^2 + 3.$$

A többtagok összeadására is vonatkozik a *felcserélhetőség* és *csoportosítás törvénye*: bármely A, B és C többtagra nézve mindig igaz:

$$A + B = B + A \text{ és } (A + B) + C = A + (B + C).$$

Két többtag különbsége úgy határozható meg, hogy az első többtagból kivonják a másodikat.

Ennek végrehajtása során a változatlan formában leírt első többtag után mínuszjelet tesznek, a második többtagot pedig zárójelbe foglalják.

A mínuszjel után álló zárójel felbontásakor a zárójelben lévő tagok előjelei az ellenkezőjükre változnak.

Példa. Határozzuk meg a következő többtagok különbségét:

$ab + c - 4$ és $2ab + c - 3$.

Megoldás: $ab + c - 4 - (2ab + c - 3) =$
$= ab + c - 4 - 2ab - c + 3 = -ab - 1$.

Tetszőleges többtagok összege és különbsége többtag lesz.

Szeretnétek többet megtudni?

Milyen lehet két többtag összege? Több tagból állhat, egyenlő lehet bármilyen számmal, így nullával is. Erről meggyőződhettek, ha például a $4c - 5x$ kéttaghoz egymás után hozzáadjátok a $c^2 + 1$, $c^2 + 5x$, $5x - 7$, $5x - 4c$ kéttagokat.

Mivel egytagok és bármilyen szám, így a nulla is többtagnak minősül, ezért bármilyen többtagok összege többtag lesz. Ezért mondják azt, hogy a többtagok halmazában mindig lehetséges összeadás és kivonás.

Ellenőrizzétek magatokat!

1. Hogyan adhatók össze többtagok?
2. Hogyan vonható ki egyik többtagból egy másik?
3. Mindig többtag lesz-e több többtag összege?
4. Fogalmazzátok meg a zárójel felbontásának szabályát!
5. Hogyan értelmezitek azt, hogy a többtagok halmazában mindig lehetséges összeadás és kivonás?

Oldjuk meg együtt!

1. Határozzuk meg az alábbi többtagok összegét és különbségét!

$x^2 - 2x + 1$ és $2x^2 - x$.

✔ Megoldás. $x^2 - 2x + 1 + 2x^2 - x = 3x^2 - 3x + 1$;
$x^2 - 2x + 1 - (2x^2 - x) = x^2 - 2x + 1 - 2x^2 + x = -x^2 - x + 1$.

Felelet. $3x^2 - 3x + 1$ és $-x^2 - x + 1$.

2. Bizonyítsuk be, hogy három egymást követő természetes szám összege mindig osztható 3-mal!

✔ Bizonyítás.

Első módszer. Jelöljük az egyik tetszőleges természetes számot n-nel. Ekkor az utána következő számok $n + 1$ és $n + 2$ lesznek. Ezek összege:

$n + n + 1 + n + 2 = 3n + 3$.

A 3 és $3n$ számok minden természetes n esetén oszthatók 3-mal. Tehát bármilyen legyen is a természetes n, az $n + (n + 1) + (n + 2)$ összeg mindig osztható lesz 3-mal. Ezt kellett bizonyítanunk.

M á s o d i k m ó d s z e r. Ha n három egymás után következő számok között a második, akkor az első szám $n - 1$, a harmadik pedig $n + 1$ lesz. Ekkor

$(n - 1) + n + (n + 1) = 3n$; a $3n$ osztható 3-mal.

3. Bizonyítsuk be, hogy az $\overline{abc}$ és $\overline{cba}$ számok különbsége osztható 99-cel!

Az $\overline{abc}$ háromjegyű számot jelöl, amelyben a százas, b tízes és c egyes található.

✔ B i z o n y í t á s. Írjuk le mindegyik számot többtag alakjában, határozzuk meg a különbségüket és vonjuk össze az egynemű tagjaikat.

$$\overline{abc} = 100a + 10b + c; \quad \overline{cba} = 100c + 10b + a.$$

Ekkor $\overline{abc} - \overline{cba} = 100a + 10b + c - (100c + 10b + a) =$
$= 100a + 10b + c - 100c - 10b - a = 99a - 99c = 99(a - c)$.

Tehát $\overline{abc} - \overline{cba}$ osztható 99-cel.

Oldjátok meg fejben!

399. Határozzátok meg az alábbi többtagok összegét és különbségét!

a) $2x^3 - c$ és $3c$; b) $5ax - 4$ és $-4ax + 4$;
c) $0{,}5n - p^2$ és $2{,}5p^2$; d) $-2y + c^2$ és $c + 2y$.

400. Határozzátok meg az alábbi kifejezések összegét és különbségét!

a) 0 és $a + c + x$; b) a és $a + c + x$; c) $a + c$ és $a + c - x$.

A szint

401. Adjátok össze az alábbi többtagokat!

a) $3a^2 + 8a - 5$ és $-5a^2 + 2a + 4$; b) $12x^3 - 7x$ és $4x^2 + 3x - 2$;
c) $-7a^3 b + 5ab^2 - ab$ és $3a^2 b - 4ab + 2a^3 b$;
d) $6a^2 - 4b^2 + c^2 + 2ab - 3bc$ és $-10c^2 - 6a^2 - ac$.

402. Határozzátok meg az alábbi többtagok különbségét!

a) $2x^3 - x^2 - 3x + 7$ és $x^3 - 3x + 17$;
b) $4x^5 + x - 2x^3 - 7$ és $x^5 - x^2 + 3x - 2$;
c) $8a^2 c - 7ac^2 - a + c$ és $7a^2 c^2 - a + 4^2$.

Egyszerűsítsétek a 403–404. kifejezéseket!

403. a) $7x^2 - 2x + (5 + 11x - 6x^2)$; b) $8ab + 7b - (4ab + 7b - 3)$;

c) $1 - n + n^2 - (3n^2 - 2n + 5) - 7n$;

d) $x^2y + xy^2 - (3x^2y - 2xy^2 - 7) + 2x^2y$.

404. a) $2a^2 + 3a - 4 + (5a^2 - a + 7)$;

b) $6x^3 + 8x - 5 - (4x^2 + 8x - 5)$;

c) $3z^4 - 2z^3 + 12z - 5 - (3z^4 - 2z - 5)$;

d) $-5c^3 - 2c + 3c^2 - (1 - c - 2c^2 - 4c^3)$;

e) $(2x + y) + (3x - 4y) - (5x + 3y - 1)$;

f) $8ac - (3a^2 - 2c^2 + 2ac) - (4a^2 + 2c^2)$.

Számítsátok ki a kifejezések értékét a 405–406. példákban!

405. a) $c^3 - 2c^2 + 3c - 4 - (c^3 - 3c^2 - 5)$, ha $c = 2$;

b) $4x^2 - (-2x^3 + 4x^2 - 5)$, ha $x = -3$;

c) $2p - (1 - p^2 - p^3) - (2p + p^2 - p^3)$, ha $p = \frac{2}{3}$.

406. a) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - (3x - 3x^2)$, ha $x = 3$;

b) $5a^4 - 2a^3 - (4a^4 - 2a^3 + 1)$, ha $a = -2$;

c) $a^2 - 2ab + b^2 - (a - b - 3)$, ha $a = 5$, $b = 4$;

d) $2 + xy - x^2 - (y^2 - 2xy + 4)$, ha $x = 0{,}2$, $y = -0{,}5$.

407. Az x változó mely értéke mellett lesznek egyenlők egymással az $x^2 - 8x + 9$ és $x^2 + 6x + 4$ többtagok?

408. A t mely értékénél lesz a $t^2 - 2t + 1$ háromtag értéke 2-vel nagyobb a $t^2 + 5$ kéttag értékénél?

Oldjátok meg a 409–410. egyenleteket!

409. a) $4x - 5 - (7x + 8) = 2$; b) $9z + 17 - (4z - 5) = 38$;

c) $24 - (x^2 + 8x - 17) = 5 - 5x - x^2$;

d) $19 - (3x^2 - 2x) - (6x - x^2) = 7 - 2x^2$.

410. a) $(5x^2 + x^3 - 7) - (2x^3 - 5 + 4x^2) = -(1 + x^3)$;

b) $(x^3 - 2x^4 + 7) - (3x^3 + 3 - 5x^4) = 6 + 3x^4$;

c) $0{,}5y - (4{,}3y + 2{,}7) + 0{,}3y = 46{,}3$;

d) $\frac{1}{3}t + \frac{2}{5} + \left(\frac{3}{5} + \frac{2}{3}t\right) = 2 - 3t$;

e) $-2{,}5x - (3{,}7 - 4{,}3x) = 1{,}7$;

f) $\frac{2}{5}z = -\left(\frac{2}{5} - z\right) + \frac{3}{5}z + 8$.

B szint

411. Határozzátok meg az alábbi többtagok összegét!

a) $n^3 + 3n^2 + 3n + 1$ és $3 - 3n - n^2 - 2n^2 + n^4$;

b) $-5xy - 4x^2 + y^2$ és $y^3 - 3x^2 + 5xy - y^2 - 2$;

c) $0{,}7c^4 - 2{,}8c^2 + 7$ és $2{,}8c^2 - 0{,}7c^4 - 7$;

d) $\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + 12$ és $\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + x^4 - 10$;

e) $0{,}8x^3 + 1{,}2x^2 - 3$, $4{,}5x^2 - x - 0{,}3$ és $0{,}2x^3 - 1{,}2x^2 + 3{,}3$.

412. Határozzátok meg az alábbi többtagok különbségét!

a) $2x^2 + 3x + 1$ és $x^3 + 3x$; b) $9m^3 + 2m + 5$ és $4m^3 - m + 6$;

c) $\frac{1}{2}a + b^2$ és $3a - \frac{1}{2}b^2 - a^2$;

d) $-2xc^2$ és $0{,}25xc^2 - 2x^2$;

e) $-4a^3b + 3a^2b^2$ és $3a^3 - b^3 + 3a^2b^2 - 4ab^3$;

f) $-\frac{2}{3}xy - \frac{3}{5}x^2y$ és $2\frac{1}{3}xy - x^2y - 2\frac{1}{2}y^2$.

Egyszerűsítsétek a 413–415. kifejezéseket!

413. a) $1 - a + 3a^2 + 4a^3 + (-a^2 - 3a^3)$;

b) $x - 2xy + 3xy^2 + (4xy^3 + 2xy - 3x)$;

c) $(2az - 3z^2) + (-az - z^2) + (-5az)$;

d) $0{,}7a - 0{,}7a^2 - 0{,}7 - (5{,}7a^2 - 4{,}7a - 1{,}7)$;

e) $-4m^2 - (m - n^2) + (3m + 4m^2) - 2n^2$.

414. a) $36cx^2 + 18c^2x - (13c^2x - 16cx^2 - x)$;

b) $-z^3 + 3mz - 2 - (2 + z - 3mz)$;

c) $2\frac{1}{3}az^2 - \left(\frac{2}{3}a^2z - 2\frac{1}{6}az^2 - 1\frac{5}{6}z^3\right)$;

d) $x^2 - x + c - (x^2 + c) - (3c - 5 - x)$;

e) $2\frac{1}{2}an - 3\frac{1}{2}am - \left(\frac{1}{2}an - 5\right) - 1{,}5an$.

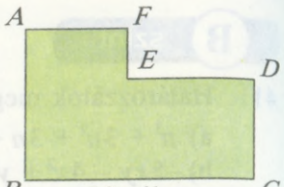
415. a) $\frac{1}{2}ax^2 - \frac{2}{3}a^2x - 2ax^2 - a^2x + \frac{1}{3}a^3x$;

b) $0{,}3m^2n - 1{,}7mn^2 - 0{,}2mn^2 - 1{,}3m^2n$;

c) $\frac{3}{4}a + \frac{2}{3}ax^3 - \left(-\frac{1}{3}ax^3 - \frac{1}{4}a + 5\right)$;

d) $2\frac{1}{2}ax^2c + 1\frac{1}{3}x^2c - \left(\frac{4}{3}cx^2 + \frac{5}{2}ax^2c\right)$.

416. Az $ABCDEF$ sokszög kerülete: $2p$, $AB = a$, $AF = c$, $EF = b$. Határozzátok meg a BC, ED és DC oldalak hosszát (36. ábra)!



36. ábra

417. Bizonyítsátok be, hogy az alábbi kifejezések a változó bármilyen értéke mellett pozitív értékűek lesznek!

a) $(x^3 + 3x^2 - 3x) + (x^6 + 4x^3 - 7x) - (5x^3 - 10x - 5)$;
b) $-((2x^3)^2 - 7x^9) - (5(x^3)^2 - (x^3)^3 - 5) + (10(x^2)^3 - (2x^3)^3$.

418. Bizonyítsátok be, hogy az alábbi kifejezések a változó bármilyen értéke mellett negatív értékűek lesznek!

a) $(5x^5 + 3x^3 - 1) - (x^8 + 4x^5 - 8x^3) - (x^5 + 5x^4 + 11x^3)$;
b) $(4 - (3x^5)^3) - ((3x^5)^2 - (2x^3)^5) - ((x^2)^5 + 9 + 5x^{15})$.

419. Helyettesítsétek a csillagot többtaggal oly módon, hogy azonosságot kapjatok!

a) $* - (8a^3 - 2a^2 + 7) = 3 - a^2$;
b) $* + (3x + 8) = -3x^2 + 2x - 15$;
c) $(2xy - 11x^2 + 10y^2) - * = 5x^2 + 4y^2 - 6$.

420. Milyen többtagot kell hozzáadni a $2a^3 - a^2 - a + 3$-hoz, hogy az alábbiakat kapjátok?

a) $3a^3 - 5a^2 - a + 7$; b) $a^2 - 6a + 13$.

421. Milyen többtaghoz kell hozzáadni az $5x^2 - x + 17$-et, hogy az alábbiakat kapjátok?

a) $x^3 - 8x^2 + 3x + 9$; b) $-6x^2 + 4x - 23$.

422. Milyen többtagból kell kivonni a $9c^2 - 6c + 2$-t, hogy az alábbiakat kapjátok?

a) $5c^3 - 8c^2 - 6c - 8$; b) $a^3 - c^2 + c + 2$.

423. Milyen többtagot kell kivonni a $6y^3 - y^2 + 3y - 1$-ből, hogy az alábbiakat kapjátok?

a) $y^3 + 3y^2 + 3y + 1$; b) $2y^4 + 3y^2 + 3y - 2$.

424. Bizonyítsátok be az azonosságot!

a) $(3a^2 + 2b^2 + c^2) - (3c^2 + 2a^2 - b^2) + (-3b^2 + 2c^2 - a^2) = 0$;
b) $-z^2 - (x^2 + (y^2 - (x^2 + y^2 + z^2) + z^2) + y^2) - x^2 = -x^2 - y^2 - z^2$;
c) $ab + bc + ac - (abc + ab - (abc - bc - (abc + ac))) = -abc$;
d) $a^3 - (b^3 - (a^2 b - ab^2)) - (-(-(a^2 b - ab^2) + b^3) - a^3) = 2a^3$.

425. Bizonyítsátok be, hogy n bármilyen természetes értékénél az alábbi kifejezések értéke:

a) $(7n + 21) - (10 - 4n)$ 11 többszöröse;

b) $8n^2 + 7n - 4 - (3n^2 + 12n - 19)$ 5 többszöröse;

c) $(12n - 5) - (5n - 9)$ 7-tel való osztáskor a maradék 4 lesz!

426*. Adjátok meg többtag alakjában az alábbi számokat!

a) $\overline{abc}$; b) $\overline{xyz}$; c) $\overline{abc} + \overline{ac}$;

d) $\overline{xyz} - \overline{xy}$; e) $\overline{abc} + \overline{bca}$; f) $\overline{xyz} - \overline{zxy}$.

427*. Bizonyítsátok be, hogy:

a) az $\overline{ab}$, $\overline{bc}$ és $\overline{ca}$ számok összege 11 többszöröse;

b) az $\overline{xyz}$, $\overline{yzx}$ és $\overline{zxy}$ számok összege 111 többszöröse;

c) az $\overline{a0b}$ és $\overline{b0a}$ számok különbsége 99 többszöröse;

d) az $(\overline{ab} + \overline{ac} + \overline{bc}) - (\overline{ca} + \overline{cb} + \overline{ba})$ különbség 18 többszöröse!

428*. Bizonyítsátok be, hogy:

a) hét egymás utáni természetes szám mindig osztható 7-tel;

b) négy egymás utáni természetes szám 4-gyel való osztásakor a maradék mindig 2 lesz;

c) három egymás utáni páros természetes szám mindig osztható 6-tal;

d) három egymás utáni nem páros természetes szám mindig osztható 3-mal, de soha nem osztható 6-tal!

$a + 7c$	a	$a + 5c$
$a + 2c$	$a + 4c$	$a + 6c$
$a + 3c$	$a + 8c$	$a + c$

37. ábra

429*. Igazoljátok, hogy a 37. ábrán látható módon elhelyezett számok bűvös négyzetet képeznek az a és c változók bármilyen értékénél!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

Számítsátok ki a 430–431. példákat!

430. a) $-\frac{1}{4} + \left(-\frac{3}{4}\right) - \frac{2}{9} + \left(-\frac{2}{3}\right)^2$;

b) $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right) \cdot (-2)^3 - 3\frac{1}{4} : \left(-\frac{1}{2}\right)^2$.

431. a) $6 - (-0{,}2) : 0{,}4 + 0{,}8 - 2{,}4 : 6$;

b) $-2\frac{3}{5} - 6 : (-1{,}5) + (3{,}2 - 0{,}2 \cdot 6)^2$.

432. A mezőn nem egyformán termett a búza: a vetésterület egyharmadán hektáronként 30 mázsát takarítottak be, a fennmaradó részen pedig hektáronként 50 mázsát arattak. Mekkora volt a termésátlag a területen?

12.§. TÖBBTAG SZORZÁSA EGYTAGGAL



Szorozzuk meg az $a + b$ kéttagot az m egytaggal. A szorzás széttagolási törvénye alapján:

$$(a + b)m = am + bm.$$

Ugyanígy szorzunk tetszőleges $a + b - c$ többtagot az m egytaggal:

$$(a + b - c)m = am + bm - cm.$$

Ezen egyenlőségek mindegyike azonosság. Ha bármelyikben bármely változót ugyanazzal a kifejezéssel helyettesítjük, akkor ismét azonosságot kapunk:

$$(2x + b)m = 2xm + bm,$$

$$(a + b - c) \cdot 4a^2 = a \cdot 4a^2 + b \cdot 4a^2 - c \cdot 4a^2 = 4a^3 + 4a^2b - 4a^2c.$$

Többtagot egytaggal úgy szorzunk, hogy a többtag mindegyik tagját megszorozzuk az adott egytaggal, és a kapott szorzatokat összeadjuk.

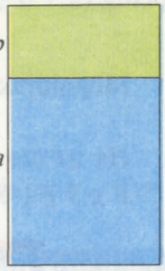
Ugyanezt a szabályt alkalmazzuk az egytag többtaggal való szorzására, mivel a tényezők felcserélhetők.

Példa.

$$2ax \cdot (3x^2 - x + 4) = 2ax \cdot 3x^2 - 2ax \cdot x + 2ax \cdot 4 = 6ax^3 - 2ax^2 + 8ax.$$

Szeretnétek többet megtudni?

Az a, b, m pozitív értékeinél az $(a + b)m = am + bm$ egyenlőség mértanilag illusztrálható (38. ábra). Az m alapú és $a + b$ magasságú téglalap területe az a és b alapú, valamint m magasságú téglalapok területeinek összegével egyenlő.



38. ábra

Az algebrában az $(a + b)m = am + bm$ egyenlőséget nem csak pozitív a, b, m számok esetén tekintik igaznak, hanem negatív számok, bármilyen más számok, sőt kifejezések esetén is. Így ha a b változót $-c$ vagy $c - d$ kifejezéssel helyettesítjük, akkor a következőt kapjuk:

$$(a - c)m = (a + (-c))m = am + (-c)m = am - cm,$$
$$(a + c - d)m = (a + (c - d))m = am + (c - d)m = am + cm - dm.$$

Tehát $(a - c)m = am - cm$, $(a + c - d)m = am + cm - dm$.

Ezen egyenlőségek mindegyike azonosság, vagyis az egyenlőség igaz tetszőleges a, b, c, d számok és kifejezések esetén.

Ellenőrizzétek magatokat!

1. Hogyan szorzunk többtagot egytaggal?
2. Melyik törvényből következik ez a szabály?
3. Fogalmazzátok meg a szorzás széttagolási törvényét!
4. Igaz-e az $(a + b)c = c(a + b)$ azonosság? Miért?
5. Mivel egyenlő az $a - b$ különbség és a c szorzata?

Oldjuk meg együtt!

1. Szorozzuk össze a $2a + 3b - c$ és $5xy$ kifejezéseket!

   ✔ M e g o l d á s. $(2a + 3b - c) \cdot 5xy =$
   $= 2a \cdot 5xy + 3b \cdot 5xy - c \cdot 5xy = 10axy + 15bxy - 5cxy.$

   F e l e l e t. $10axy + 15bxy - 5cxy.$

2. Oldjuk meg a $(3x - 5) \cdot 2x = 6x^2 + 7$ egyenletet!

   M e g o l d á s. $3x \cdot 2x - 5 \cdot 2x = 6x^2 + 7$,
   $6x^2 - 10x = 6x^2 + 7$, $-10x = 7$, $x = -0{,}7$.

   F e l e l e t. $-0{,}7$.

3. A fivér 6 évvel idősebb öccsénél, és 3 évvel ezelőtt kétszer volt idősebb nála. Hány évesek most a testvérek?

✔ M e g o l d á s. Ha a fiatalabb testvér x éves, akkor az idősebb $(x + 6)$ éves. Három évvel ezelőtt az öcs $(x - 3)$ éves volt, bátyja pedig $(x + 6 - 3)$, vagyis kétszer annyi éves volt, mint az öccse, tehát

$$x + 3 = 2(x - 3).$$

Megoldjuk a kapott egyenletet:

$$x + 3 = 2x - 6, \; -x = -9, \; x = 9.$$

Ha az öcs 9 éves volt, akkor a bátyja $9 + 6 = 15$ éves.

F e l e l e t. A fivérek 9 és 15 évesek.

Oldjátok meg fejben!

433. Adjátok meg többtag alakjában a szorzatokat!

a) $(x + y)c$, $(x - y)c$, $(2x - y)c$;
b) $(x + y)n$, $(x - y)n$, $(3x - y)n$;
c) $(2 + a)c$, $(2 - a)c$, $(2 - an)c$.

434. Azonosak-e a kifejezések?

a) $2(a - 5)$ és $2a - 10$; b) $(x - y)5$ és $5x - 5y$;
c) $3c(a - x)$ és $3ac - 3cx$; d) $(x - 7)(-2)$ és $14 - 2x$.

435. Oldjátok meg az egyenletet!

a) $x(x - 3) = 0$; b) $x(x + 5) = 0$; c) $(y - 12) \cdot 7y = 0$.

A szint

Szorozzátok össze a 436–438. kifejezéseket!

436. a) $3a + c$ és $2a$; b) $8x - y$ és $3xy$; c) $x^2 - x$ és $2x$;
d) $m^3 + 3m$ és m^2; e) $2a + 3$ és $4a$; f) $3x - y$ és $2xy$.

437. a) $8ac - 1$ és $2ac^2$; b) $6an - m$ és amn;
c) $a^2 - 2c$ és $0{,}5c^2$; d) $4c^3 - ac$ és $0{,}5ac^2$;
e) $-x - 3y^2$ és $5x^4y$; f) $-0{,}5a - xy^2$ és $-2a^2$.

438. a) $x^3 + 3x - 1$ és x^2; b) $x^2 + mx + m^2$ és $-3mx$;
c) $2 - a + a^2$ és $-\frac{1}{2}ab^2$; d) $1\frac{2}{3}x - x^2 - \frac{2}{3}$ és $-9xy^2$.

439. Adjátok meg többtagok alakjában a kifejezéseket!

a) $(x + 1)x^2$; b) $a^2(b - c)$; c) $(n^2 - n)n^3$;
d) $(2a + 3b) \cdot 0{,}1$; e) $(-a + ac)c^2$; f) $-2a(a^2 - 1)$.

440. Egyszerűsítsétek a kifejezéseket!

a) $2a^3(4a^2 + 3a) - 6a^4$; b) $7x^2 - 2x(3x - y)$;
c) $2x(x - 1) - x^2$; d) $(3 - a)a^2 - 3a^2$;
e) $(m - n)mn + 2n^2 m$; f) $(z - 2) \cdot (-3z)$;
g) $-3c^3 + (c - 1)c^2$; h) $2p - (p^2 + 2)p$.

441. Azonosak-e a kifejezések?

a) $(a - x)a$ és $a^2 - ax$; b) $(x - y)x^2$ és $x^3 - x^2y$;
c) $(2p^2 + q)q$ és $q^2 + 2p^2q$; d) $(m - n - 1)mn$ és $m^2n - n^2m$.

442. Számítsátok ki a kifejezések értékét!

a) $(b^2 - 4)b - b^3 + 3b$, ha $b = -2{,}7$;
b) $(a^2 - 1)a - (a - 1)a^2$, ha $a = 0{,}8$;
c) $c + c^2 + c^3 - c(1 + c)$, ha $c = 0{,}5$;
d) $(x - y)x + (x - y)y$, ha $x = 2$ és $y = 3$.

Oldjátok meg a 443–445. egyenleteket!

443. a) $2(x - 3) + 5(x - 2) = 12$; b) $3(1 - x) - 2(3 - x) = 5$;
c) $3z - 7(2z + 4) = 18$; d) $2 + 3y - 7(5 - y) = 15$.

444. a) $2z - 15(1 - 2z) = 7z$; b) $8c - (3 - 7c) = 9c + 2$;
c) $1 - 8(3 - 2y) = 2(1 - y)$; d) $3z - (z - 5) \cdot 4 = (1 - 5z) \cdot 3$.

445. a) $x^2 - 3x + 1 = x(x + 2)$; b) $3t - t^2 = t(2 - t)$;
c) $0{,}7x + 0{,}8 = 2{,}6(x - 1{,}5)$; d) $1{,}7(a - 3) - a = 2{,}3(a + 1)$.

B szint

Szorozzátok össze a 446–447. kifejezéseket!

446. a) $3x^2 - 4x + 5$ és $2x^3$; b) $0{,}5t^3 - 1{,}2t^2 + t - 0{,}2$ és $10t^2$;
c) $5y^3 - 7y^2 + y - 9$ és $5yx$; d) $\frac{1}{3}z^4 - \frac{2}{5}z^3 - 2z + \frac{3}{5}$ és $-15yz^2$.

447. a) $2ac^3$ és $3a^2 - 4ac + 5c - a$;
b) $-2nx$ és $-3x^3 - 5x^2n + x - 4n^2$;
c) $0{,}4a^2c$ és $5a^3 - 10a^2c + 7c^2 - 20$;
d) $-\frac{2}{3}xy^2$ és $6x^4 - 3x^2y - xy^2 - 9xy$.

448. Adjátok meg többtagok alakjában a kifejezéseket!

a) $(2ax + 3) \cdot a^2x^3$; b) $(-0{,}7cy^2 - z^2) \cdot 2c^3z$;
c) $0{,}3nz \cdot \left(\frac{1}{3}n^2 - \frac{2}{3}z^3\right)$; d) $-2\frac{1}{3}x^3y \cdot \left(6xy^2 + \frac{3}{7}x^2\right)$.

Egyszerűsítsétek a 449–451. kifejezéseket!

449. a) $3x^2(x^3 - 5x) + 15x^3$; b) $4a^3 - 2a(a - 2a^2 + 1)$;
c) $0{,}8ac^2 + a^2 - (a - c^2) \cdot a$; d) $x^3 + (x - 5) \cdot (-x^2) + x^2$.

450. a) $(a^2 b - 1)a - b(a^3 - 1)$; b) $2c^4 + (c^2 - 3)c^2 - 3c^4$;
c) $-5a^2 x - ax^2 + ax(a + x)$; d) $\frac{1}{4}x^2 z - \frac{1}{3}z^3 - (x^2 - z^2)z$.

451. a) $2ac + 3a^2 c^2 - ac(2 + 3ac) + 7$;
b) $3acx^2 - bcx^2 + a^2 - (3a - b) \cdot cx^2$;
c) $-2 - 3a^2 - a(5a^3 - 3a + 1) + 6a^4$;
d) $3{,}4ax^3 - 2{,}5a^3 x - 1{,}5 - ax(x^2 - 2{,}5a^2)$.

Oldjátok meg a 452–456. egyenleteket!

452. a) $3(2x - 5) + 7(3x - 4) = 3x + 77$;
b) $5(4 - 7x) - 3(5x + 1) = x - 85$;
c) $6(2z - 12) - 5(11 - 3z) = 5z + 5$;
d) $4(3y - 13) + 7(15 - 3y) = 9y + 47$.

453. a) $0{,}8(x - 0{,}4) + 0{,}6(x - 0{,}6) = 1$;
b) $0{,}4(2x - 3) - 0{,}5(3x - 0{,}2) = -2{,}5$;
c) $-\frac{2}{3}(y - 6) - \frac{3}{4}(2y - 16) = -3\frac{1}{2}$;
d) $4{,}3 - 2x - 3\left(1{,}1 + \frac{2}{3}x\right) = x + \frac{2}{3}$.

454. a) $5(8y - 1) - 7(4y + 1) + 8(7 - 4y) = 19$;
b) $7(6z - 1) + 5(7 - 12z) + 3(1 + 2z) = 23$;
c) $6(3y - 4) - 5(y - 3) + 3(2y - 1) = 83$;
d) $9(3x - 4) + 4(x + 2) - 7(2x - 1) = 30$.

455. a) $x(3x - 4) + 5(x - 2) - 3x(x + 1) = 0$;
b) $y^2 - 3(y - 5) + y(4 - y) + 5y = 10y + 7$;
c) $5z(1 - 2z) - 4(z - 3) + 2z(3 + 5z) = 14$;
d) $0{,}4x - 3{,}5(2 - 4x) + 0{,}5(2x - 1) = x^2 + 132$.

456. a) $\frac{1}{3}(3x - 2) - \frac{1}{3}(9 - 2x) = \frac{1}{2}x$;
b) $\frac{1}{6}(8 - z) - \frac{1}{3}(5 - 4z) = \frac{1}{2}z + 3$;
c) $0{,}5(9x + 7) - \left(x - \frac{1}{7}x\right) = 36\frac{2}{7}$;

d) $2 - \frac{1}{4}y - \frac{1}{2}y + \frac{7}{4} = -\frac{1}{5}(y + 17)$.

457. Bizonyítsátok be, hogy a kifejezések a változók bármely értékénél ugyanazokat az értékeket veszik fel!

a) $2(a^3 + 6) + 5a(3a - a^2) - 3a^2(5 - a)$;
b) $2x^3(8 - 5x) - 8x(2x^2 + x^3) + 6(3x^4 - 4)$;
c) $6x(2y^2 - (5x + y) \cdot 3y) + 3xy(2y + 30x)$;
d) $3ab + 6((2a + b)a + 5) - 3a(3b + 4a)$.

458. A gazdaságban összesen 305 tehén és borjú volt. Miután a tehenek számát 15-tel, a borjúk számát pedig 90-nel növelték, borjúkból négyszer annyi lett mint tehenekből. Hány tehén van a gazdaságban?

459. Két szám összege 60. Ha az egyik számot 2-vel, a másikat 7-tel szorozzuk, akkor a szorzatok összege 70 lesz. Határozzátok meg ezeket a számokat!

460. 31,5 hrivnya értékben vásároltak füzeteket 60 kopijkájával és jegyzettömböket 1,3 hrivnyájával, összesen 35 darabot. Hány füzetet és hány jegyzettömböt vásároltak?

461. A téglalap egyik oldala 4-szerese a másiknak. Ha a kisebbik oldalát 3 cm-rel meghosszabbítjuk, akkor a téglalap területe 24 cm^2-rel megnő. Határozzátok meg a téglalap oldalainak hosszát!

462. A téglalap egyik oldala 3-szorosa a másiknak. Ha a nagyobbik oldalát 5 cm-rel rövidítjük, akkor a téglalap területe 200 cm^2-rel csökken. Határozzátok meg a téglalap oldalainak hosszát!

463. Két szám egyike 6-szorosa a másiknak. Ha a kisebbik számot 5-tel megnöveljük, akkor a számok szorzata 75-tel megnő. Határozzátok meg a két számot!

464. Három évvel ezelőtt az apa ötször volt idősebb a fiánál, most már csak négyszer idősebb nála. Hány évesek jelenleg?

465. Hány éves a tanuló, ha ismeretes, hogy 10 év múlva ötször lesz idősebb annál, mint amennyi 10 évvel ezelőtt volt?

466. Az egyik hordóban 99 liter, a másikban 57 liter benzin volt. Az elsőből naponta 12 litert, a másodikból pedig 10 litert használnak el. Hány nap múlva lesz az elsőben 3-szor annyi, mint a másodikban?

467. Az egyik edényben 84 g, a másikban pedig 12 g sav volt. Hány gramm savat kell áttölteni az elsőből a másodikba, hogy az elsőben kétszer annyi legyen, mint a másikban?

468. Helyettesítsétek a csillagokat egytagokkal oly módon, hogy azonosságokat kapjatok!

a) $-4x^2 \cdot (* - *) = 2x^3 + 12x^4$;
b) $5ac \cdot (* + * - *) = 50a^2c - 15ac^2 - ac$;
c) $(-x^2 + *) \cdot (-6x) = * + 42x^5$;
d) $(* + 0{,}25xy - *) \cdot 4x^2y = 2x^2y^2 + * + 20x^2y^3$;
e) $(2m^3 - 9m) \cdot * = 10m^6 - *$;
f) $*(* - xy^3 + 4y^4) = 12x^2y^3 - 4x^3y^4 + *$.

469. Egyszerűsítsétek a kifejezéseket és határozzátok meg az értékeiket!

a) $-4x(x^2 - x - 3) + 2x(2x^2 + x - 5)$, ha $a = -3$;
b) $3a(4a^2 - 3a) - 6(4 + 2a^3) - 5a(2 - 5a)$, ha $a = \frac{1}{2}$;
c) $(5a(a - 4b) + 12ab) \cdot 2b + 16ab^2$, ha $a = 3$, $b = 1{,}2$;
d) $\frac{1}{2}x(6y(3x + 2y) - 8xy) - 5x^2y$, ha $x = -\frac{1}{6}$, $y = 11$.

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

470. Pozitívak vagy negatívak a kifejezések értékei?

a) $(-5)^7 \cdot (-8)^5$; b) $(-4)^8 \cdot (-13)^{10}$;
c) $(-61)^{12} \cdot (-7)^{17}$; d) $(-9)^3 \cdot 0^{25}$.

471. Az alábbi kifejezések közöl melyik normálalakú egytag?

a) $5a^2 \cdot 3x$; b) $-0{,}5a^2c$; c) $2a \cdot (-3x)$; d) $(-2y)^3$; e) $2x^2yx$.

472. Kártyalapokra írt betűkből az a szó van kirakva, hogy CIVILIZÁCIÓ. A kártyákat lefordították, összekeverték és találomra húztak közülük egyet. Mekkora a valószínűsége annak, hogy: a) C; b) I; c) Ó betű lesz a kártyalapon?

473. Rajzoljátok át a füzetetekbe a 39. ábrát, és az üres kockáit töltsétek ki oly módon, hogy bűvös négyzetet kapjatok!

	3	2	13
5		11	
	6	7	
4			

39. ábra

13. §. TÖBBTAGOK SZORZÁSA



Szorozzuk össze az $a + b - c$ és az $x + y$ többtagokat! Ha az $x + y$ többtagot m betűvel jelöljük, akkor:

$$(a + b - c)(x + y) = (a + b - c)m = am + bm - cm =$$
$$= a(x + y) + b(x + y) - c(x + y) =$$
$$= ax + ay + bx + by - cx - cy.$$

Tehát $(a + b - c)(x + y) = ax + ay + bx + by - cx - cy.$

Ha először az a-t megszorozzuk x-szel és y-nal, majd a b-t x-szel és y-nal, végül a $-c$-t x-szel és y-nal, vagyis az első többtag minden tagját megszorozzuk a második többtag minden tagjával, és a kapott szorzatokat összeadjuk, akkor ugyanazt az eredményt kapjuk: $ax + ay + bx + by - cx - cy$.

Többtagot többtaggal úgy szorzunk, hogy az első többtag mindegyik tagját megszorozzuk a második többtag minden egyes tagjával, és a kapott szorzatokat összeadjuk.

Példa.

$$(x^2 - 2x + 3)(a - 5) = x^2a + x^2(-5) - 2xa - 2x(-5) + 3a + 3(-5) = ax^2 - 5x^2 - 2ax + 10x + 3a - 15.$$

A többtagok kétféle módon szorozhatók az alábbi vázlatok szerint:

$$(a + b + c + \ldots)(x + y + z + \ldots) = ax + bx + cx + \ldots;$$

$$(a + b + c + \ldots)(x + y + z + \ldots) = ax + ay + az + \ldots .$$

Ha kettőnél több többtagot kell összeszorozni, akkor először az első kettőt szorozzuk össze, és az eredményül kapott többtaggal

megszorozzuk a harmadikat és így tovább. Például szorozzuk össze az $x - a$, $x + a$ és $x^2 - a^2$ többtagokat.

$$(x - a)(x + a) = x^2 + ax - ax - a^2 = x^2 - a^2,$$
$$(x^2 - a^2)(x^2 - a^2) = x^4 - a^2x^2 - a^2x^2 + a^4 =$$
$$= x^4 - 2a^2x^2 + a^4.$$

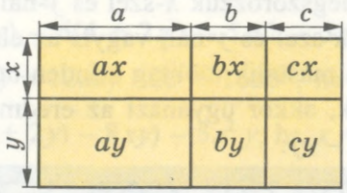
Tehát $(x - a)(x + a)(x^2 - a^2) = x^4 - 2a^2x^2 + a^4$.

Szeretnétek többet megtudni?

Az $(a + b + c)(x + y) = ax + bx + cx + ay + by + cy$ azonosság a változók pozitív értékeinél megfelel a 40. ábrának. Ugyanis ha a téglalap oldalai rendre a következőkkel egyenlők: $a + b + c$ és $x + y$, akkor a területe:

$(a + b + c)(x + y)$ vagy $ax + bx + cx + ay + by + cy$.

Vagyis e két kifejezés azonosan egyenlő.



40. ábra

Az algebrában az $(a + b + c)(x + y) = ax + bx + cx + ay + by + cy$ egyenlőség abban az esetben tekintendő igaznak, ha a betűi nem csak pozitív számokat, hanem bármilyen számokat vagy kifejezéseket jelölnek.

Figyeljétek meg: ha háromtagot szorzunk kéttaggal, akkor eredményül hattagot kapunk. Ha olyan többtagokat szorzunk össze, amelyekben rendre k és p tag van, akkor $k \cdot p$ számú taggal rendelkező többtagot kapunk. Csak az egynemű tagok összevonásával csökkenhet a szorzat tagjainak száma. Például:

$$(x^2 + x + 1)(x - 1) = x^3 + x^2 + x - x^2 - x - 1 = x^3 - 1.$$

Ellenőrizzétek magatokat!

1. Fogalmazzátok meg a többtag egytaggal való szorzásának szabályát!
2. Fogalmazzátok meg a többtag többtaggal való szorzásának szabályát!
3. Hogyan szorozható össze három többtag? És négy többtag?
4. Hány tagja lehet annak a többtagnak, amely két kéttag szorzatával egyenlő? És két háromtag szorzatával?

Oldjuk meg együtt!

1. Szorozzuk össze a $2x + 3$ és az $a - x$ többtagokat!

✔ M e g o l d á s. $(2x + 3)(a - x) = 2xa + 3a - 2x^2 - 3x$.

2. Egyszerűsítsük a $4a - 2ax - (2a - 1)(2 - x)$ kifejezést!

✔ M e g o l d á s. $4a - 2ax - (4a - 2 - 2ax + x) =$
$= 4a - 2ax - 4a + 2 + 2ax - x = 2 - x$.

Oldjátok meg fejben!

474. Adjátok meg többtagok alakjában!

a) $(1 + y)(1 + x)$; b) $(x + 1)(a + 1)$; c) $(x - 1)(n + 1)$;
d) $(1 + a)(c + 1)$; e) $(1 - y)(1 + c)$; f) $(2 - a)(c + 1)$.

475. Bontsátok fel az egyenletet!

a) $(x + 1)(x + 1)$; b) $(1 - y)(1 - y)$; c) $(a + c)(a - c)$.

A szint

476. Szorozzátok össze a többtagokat!

a) $a + b$ és $m - n$; b) $x - y$ és $x + y$; c) $2a - 1$ és $a - 2$;
d) $c + ax$ és $a + x$; e) $1 - c$ és $a + c^2$; f) $-a + 1$ és $2a - 3$.

Adjátok meg többtagok alakjában a 477–480. kifejezéseket!

477. a) $(a - b)(c + d)$; b) $(x - 2)(x - 3)$;
c) $(2x - 3)(a - b)$; d) $(a^2 - b)(a - b^2)$.

478. a) $(1 - 2xz)(1 + 2xz)$; b) $(0{,}5 + c^2)(0{,}5 + c^2)$;
c) $(a^2 + b)(a^2 + b)$; d) $\left(\frac{1}{2}x + 2\right)\left(\frac{1}{2}x + 2\right)$.

479. a) $(2x + 3)(3x - 2)$; b) $(5a - 4)(3a - 2)$;
c) $(7c - 1)(5 - 6c)$; d) $(-2n + 3)(3n - 2)$.

480. a) $(-a - b)(c + d)$; b) $(-2 + c)(-3 + c)$;
c) $x^2 - x + 1)(x + 1)$; d) $(p - 1)(p^2 + p + 1)$;
e) $(c + z - q)(1 - cq)$; f) $(0{,}5x - 1{,}3)(0{,}5x + 1{,}3)$.

481. Azonosak-e az alábbi kifejezések?

a) $(a - b)(a + b)$ és $a^2 - b^2$; b) $(x + a)(x + a)$ és $x^2 + 2xa + a^2$;
c) $(c^2 + c - 1)(c - 1)$ és $c^3 - 1$; d) $c^2 + 1$ és $(c + 1)(c^2 - c + 1)$.

482. Egyszerűsítsétek a kifejezéseket!

a) $(x - 1)(x^2 - 2x + 2)$; b) $(1 + a)(a^2 - a + 1)$;

c) $(m + n)(m^2 - mn + n^2)$; d) $(m - 1)(m + 1) + 1$;
e) $(a + 2)(a - 5) + 3a$; f) $(x - 4)(x + 5) + 20$;
g) $(n - 2)(n - 2) + 4n$; h) $4ab - (a + 2b)(a + 2b)$.

483. Számítsátok ki a kifejezések értékét!

a) $(a + b)(a - b) + b^2$, ha $a = 0{,}6$ és $b = 0{,}237$;
b) $(x + y)(x + y) - x^2 - y^2$, ha $x = 0{,}2$ és $y = 5$;
c) $(a^2 - b)(a^2 + b) - a^4$, ha $b = 0{,}2$ és $a = 3{,}27$;
d) $-x^2 + y^4 + (x - y^2)(x + y^2)$, ha $x = 5$ és $y = -7$.

Egyszerűsítsétek a 484–485. kifejezéseket!

484. a) $3x(x - 6) + (2x^2 + 14)$; b) $(a - 3)c + 3(c - c^2)$;
c) $(3a + b)(a - b) - (2a^2 - b^2)$; d) $(a - 3)(a + 3) - 9a^2$.

485. a) $(a - b)(a - 3) + 2a(1 - a)$; b) $(1 - ab)(1 + ab) + a^2b^2$;
c) $(x - y)(x + y) - x(x - 3)$; d) $(c^2 - 1)(c^2 + 1) - c^4 + 1$.

486. Adjátok meg többtagok alakjában a kifejezéseket!

a) $(a + b)^2$; b) $(x - y)^2$; c) $(2a - x)^2$; d) $(3a + 2)^2$.

487. Egyszerűsítsétek a kifejezéseket!

a) $(b + 1)^2 + 2b(3b - 1)$; b) $6xy + 3(x - y)^2$.

488. Oldjátok meg az egyenleteket!

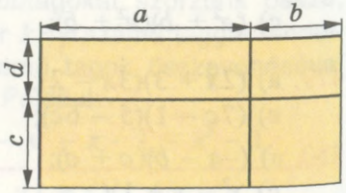
a) $(x - 1)(x - 3) = x^2$; b) $(y + 2)(y - 5) = y^2$;
c) $(2x + 1)(x - 5) = 2x^2$; d) $3z^2 = (1 - z)(1 - 3z)$.

B szint

489. A többtagok szorzási szabályának és a 41. ábrának a felhasználásával bizonyítsátok be az azonosságot!

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

Melyik bizonyítás általánosabb?



41. ábra

490. Ábrázoljátok téglalapok alakjában azt a mértani modellt, amely az alábbi kifejezések összeszorzását illusztrálja!

$a + b + c + d$ és $m + n$.

491. Egyszerűsítsétek a kifejezéseket!

a) $2a(5 - a) - 5(2a + a^2) + 2a^2$;

b) $(x - y)(x + 7) - (y + x)(x + 7) + 7y$;

c) $-(a^2 - 3)(3 + a^2) - (x + 3)^2 + 6x$.

Adjátok meg többtagok alakjában a 492–495. kifejezéseket!

492. a) $(a^2 - 2a + 2)(a - 1)$; b) $(0{,}1x - 1{,}2y)(0{,}1x + 1{,}2y)$;

c) $(2{,}5c + 7z)(7z - 2{,}5c)$; d) $(-0{,}3a - 1{,}2b)(-0{,}3a + 1{,}2b)$.

493. a) $(x^3 + 3x^2 + 2)(x - 5)$; b) $(x + 1)(x^3 - x^2 + x - 1)$;

c) $(4a^2 - 2ab + b^2)(2a + b)$; d) $\left(\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{3}x + 1\right)\left(\frac{1}{3}x - 1\right)$.

494. a) $(x^3 + 2x^2y - 5xy^2 - 3y^3)(5x - 4y)$;

b) $(a^3 + 3a^2c - 3ac^2 + 4c^3)(2a + 3c)$;

c) $(4a^2 - 3a + 1)(a^2 + 2a + 1)$;

d) $(2x^2 - 5x + 1)(x^2 - 2x - 1)$.

495. a) $\left(\frac{1}{4}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{2}c\right)\left(\frac{1}{3}a - \frac{1}{2}b + \frac{1}{4}c\right)$;

b) $\left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}z\right)\left(\frac{1}{3}y - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}z\right)$;

c) $\left(\frac{2}{3}c + \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{4}c - \frac{3}{4}a - \frac{1}{3}\right)$;

d) $\left(1\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}y + 1\right)\left(1\frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2}y + 1\right)$.

Egyszerűsítsétek a 496–498. kifejezéseket!

496. a) $(a^2 - a + 1)(a + 1) - a^3$; b) $(x^2 + ax + a^2)(x - a) + a^3$;

c) $(c - 5)(c + 2) + 3c + 10$; d) $(x^2 - y)(x - y^2) - y^3 + xy$.

497. a) $(1 - 2x)(4x^2 + 2x + 1) + 8x^3$;

b) $(9 - 6a + 4a^2)(2a + 3) - 8a^3$;

c) $(2a + 3x)(4a^2 - 6ax + 9x^2) - 27x^3$;

d) $(3 - c^2)(c^4 - 3c^2 + 9) + c^6 - 27$.

498. a) $0{,}01a^4 - (0{,}1a^2 + 1)(0{,}1a^2 - 1)$;

b) $0{,}008x^3 - (0{,}2x - 1)(0{,}04x^2 + 0{,}2x + 1)$;

c) $\frac{4}{9} - \left(\frac{2}{3} - a^3\right)\left(\frac{2}{3} + a^3\right)$;

d) $\frac{1}{8}x^3 - \left(\frac{1}{2}x - a^2\right)\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}a^2x + a^4\right)$.

499. Bizonyítsátok be az azonosságokat!

a) $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$;

b) $(x - y)(x + y) = x^2 - y^2$.

500. Adjátok meg többtagok alakjában a kifejezéseket!

a) $(2x - 3y)^2$; b) $(3ac + b^2)^2$; c) $(2a - 1)^3$.

501. Adjátok meg többtagok alakjában a kifejezéseket!

a) $(a - 1)(a + 1)(a^2 + 1) + 1$; b) $(2a - 3)^2 + 12a$;

c) $c^4 - (c - 1)(c + 1)(c^2 + 1)$; d) $(a - b)^3 - 3a^2b$.

502. Bizonyítsátok be, hogy az alábbi kifejezések értékei nem függnek a változó értékeitől!

a) $(x + 5)(x^2 - 2x - 3) - (5x + x^2)(x - 2) + 3(x + 5)$;

b) $(2x^2 - 3x + 6)(x + 4) - (x^2 + 4x + 3)(2x - 3)$;

c) $(2x - 4)(3x + 2) - (2x - 3)(4x + 2) + 2x^2$;

d) $(x - 3)(x + 3)(x^2 + 9) - (x + 1)(x - 1)(x^2 + 1)$.

Oldjátok meg az 503–507. egyenleteket!

503. a) $(x - 1)(x + 5) = (x - 2)(x + 3)$;

b) $(2x + 3)(x - 7) = (x + 3)(2x + 1)$;

c) $(3z^2 - 1)(z - 1) = 3z^2(z - 1) + 5z + 7$;

d) $(y - 2)(y^2 + 2y + 4) = y(y^2 - 4)$.

504. a) $(0{,}1 - x)(x + 0{,}1) = 2x(0{,}5 - 0{,}5x)$;

b) $(y - 0{,}2)(y^2 + 0{,}2y + 0{,}04) = y(y^2 - 8)$;

c) $\left(\frac{1}{2}x + 2\right)\left(\frac{1}{4}x^2 - x + 4\right) = \frac{1}{4}x^2\left(\frac{1}{2}x - 2\right)$;

d) $-\left(\frac{2}{3}x + \frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{3}x - \frac{3}{2}\right) + 2\frac{1}{4} = \left(\frac{2}{3}x\right)^2$.

505. a) $(2x + 1)^2 = 2(x - 1)(2x + 3)$; b) $(3z - 2)^2 = 9(z - 2)(z + 3)$;
c) $(1 - 2y)^2 = 2(y - 2)(2y - 3)$; d) $(x - 1)^3 = x^2(x - 3) + 5$.

506. a) $(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1) = x^4 + x^2 + x$;
b) $(x^3 + x^2 + x + 1)(x - 1) = x^4 + 10x$.

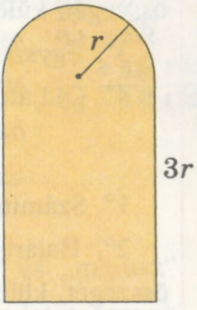
507. a) $0{,}5c^2 - (0{,}5c - 1)(c + 2) = 1$;
b) $-(y + 2)(0{,}3y - 1) = 1 - 0{,}3y^2$;
c) $\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) = x^2 - \frac{1}{3}$; d) $\frac{2}{5}x^2 = (x + 1)\left(\frac{2}{5}x + 2\right)$.

508. Adva vannak a következő szorzatok: $11 \cdot 44$ és $16 \cdot 32$. Milyen számmal kell növelni mind a négy tényezőt, hogy a szorzatok egyenlők legyenek?

509. Adva vannak a következő szorzatok: $25 \cdot 51$ és $31 \cdot 40$. Milyen számmal kell csökkenteni mind a négy tényezőt, hogy a szorzatuk egyenlő legyen?

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

510. Határozzátok meg a 42. ábrán látható alakzat területét, ha $r = 0{,}8$ m!



42. ábra

511. Számítsátok ki!

a) $\left(2 - \frac{1}{2}\right)^2 - 3^2 - (1 - 3^3) - 1{,}5^2$;

b) $\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2$;

c) $\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{4}{3} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{16} - 3$;

d) $\left(-\frac{3}{7} + \frac{5}{17} + \frac{1}{27}\right) - \left(\frac{3}{7} + \frac{5}{17} + \frac{1}{27}\right)$.

512. Határozzátok meg az aránypárok ismeretlen tagját!
a) $2 : x = 7 : 10$; b) $1 : 4 = 3 : (x + 2)$;
c) $6 : 5 = 0{,}9 : 3x$.

513. Adjátok meg többféle módon az egytagokat két normálalakú egytag szorzataként!
a) $36a^8$; b) $30x^4y^9$; c) $-18a^{10}b^5$;
d) $100x^5y^3$; e) $\frac{6}{16}m^2n^6$; f) $-\frac{1}{3}x^4y^4$.

ÖNÁLLÓ MUNKA

I. változat

1°. Számítsátok ki a $3x^2 - x + 2$ kifejezés értékét, ha $x = -1{,}3$!

2°. Határozzátok meg az $a^2 + a - 3$ és $a^2 - 2$ többtagok összegét, különbségét és szorzatát!

3•. Egyszerűsítsétek a kifejezést: $(3 + x)(3 - x) + x^2$!

4•. Oldjátok meg az egyenletet: $(x - 5)(x + 1) = x^2 - 13$!

II. változat

1°. Számítsátok ki az $a^2 - 3a + 1$ kifejezés értékét, ha $a = -1{,}6$!

2°. Határozzátok meg az $n^2 - n - 2$ és $n^2 - 1$ többtagok összegét, különbségét és szorzatát!

3•. Egyszerűsítsétek a kifejezést: $25 - (5 - c)(5 + c)$!

4•. Oldjátok meg az egyenletet: $(x - 2)(x + 4) = x^2$!

III. változat

1°. Számítsátok ki a $c^2 - 2c + 3$ kifejezés értékét, ha $c = -1{,}2$!

2°. Határozzátok meg a $2a^2 - a - 1$ és $a^2 + 2$ többtagok összegét, különbségét és szorzatát!

3•. Egyszerűsítsétek a kifejezést: $p^2 - (2 + p)(2 - p)$!

4•. Oldjátok meg az egyenletet: $x^2 + 3 = (x - 1)(x + 3)$!

IV. változat

1°. Számítsátok ki a $z^2 - 2z + 3$ kifejezés értékét, ha $x = -2{,}1$!

2°. Határozzátok meg a $c^2 + 2c + 1$ és $c^2 + 3$ többtagok összegét, különbségét és szorzatát!

3•. Egyszerűsítsétek a kifejezést: $x^2 - c^2 + (c - x)(c + x)$!

4•. Oldjátok meg az egyenletet: $x(x - 3) = x^2 - 5x + 4$!

MATEMATIKATÖRTÉNETI ADALÉKOK

A *változót tartalmazó kifejezések* akkor alakultak ki, amikor a számokat már nemcsak számjegyekkel, hanem betűkkel is jelölték. Az ilyen jelölések kezdetleges formában már Diophantosznál (III. sz.) is előfordultak, de nem terjedtek el. A műveleti jelek sem azonnal váltak használatosakká. Az egyiptomiak az összeadás és kivonás jelét különböző irányokba lépő két lábra emlékeztető rajzzal jelölték, jobbról balra írtak. Még Al-Kvarizmi is minden egyenletet szavakkal írt le. Csak F. Viete (1540–1603), az ismert francia matematikus, akit az algebra atyjának is szoktak nevezni, alkalmazott előszeretettel betűket a számok jelölésére. x, x^2 és x^3 jelek helyett megfelelően az N, Q, C betűket használta a latin numerus (szám), quadratus (négyzet), cubus (köb) szavak első betűjét. Más matematikusok másmilyen jeleket használtak.



$$\begin{array}{r} 2R+1 \\ 3R\div 2 \\ \hline 6q+3R \\ \div 4R\div 2 \\ \hline 6q\div 1R\div 2 \end{array}$$

Egyes XV. századi matematikusok a „plusz” és „mínusz” jeleket p és m betűkkel, azaz a *plus* és *minus* latin szavak kezdőbetűivel jelölték. A „+” és a „–” jelölést 1489-ben vezette be J. Widman, a szorzás jelét (W. Outraid. A szorzásra, illetve osztásra használt másik jelet (·) és (:) G. Leibnitz vezette be.

Az első matematikakönyv, L. Magnyickij orosz nyelven írt *Arifmetika* című műve 1703-ban jelent meg. Ebben a $2x + 1$ és $3x - 2$ kéttagok $2R + 1$ és $3R \div 2$ alakúak. A változó négyzetét q-val jelölték és az 1-es együtthatót nem hagyták el. Az ilyen alakú kéttagok szorzását ajánlatos oszlopban végezni.

AZ 2. FEJEZET TANANYAGÁNAK ÖSSZEFOGLALÁSA

Több egyenlő tényező szorzatát *hatványnak* nevezzük.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-szer}}, \quad n > 1, \quad a^1 = a.$$

Természetes m és n számoknál a hatványok tulajdonságai a következők:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \qquad a^m : a^n = a^{m-n}; \qquad (a^n)^m = a^{nm};$$

$$(ab)^n = a^n b^n; \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad b \neq 0.$$

Vannak *számkifejezések* és *változót* tartalmazó kifejezések. Ha a kifejezésben nincs más művelet az összeadáson, kiadáson, szorzáson, hatványra emelésen és osztáson kívül, akkor a kifejezést *racionálisnak* nevezzük. Azt a racionális kifejezést, amely nem tartalmaz változót tartalmazó kifejezéssel való osztást, *egész kifejezésnek* nevezzük.

Két kifejezést azonosan egyenlőnek vagy azonosnak nevezünk, ha a változók bármely értéke mellett a megfelelő számértékeik egyenlők. Egyenlőségjellel összekapcsolt két azonosan egyenlő kifejezés *azonosságot* képez.

A legegyszerűbb olyan kifejezéseket, mint a számok, változók, ezek hatványai vagy szorzatai, *egytagoknak* nevezzük.

Az egytagok szorzásakor szorzásjelet tesznek közéjük és a kapott szorzatot normálalakú egytaggá alakítják. Az egytag hatványra emelésekor valamennyi tényezőjét ugyanerre a hatványra emelik, s a kapott hatványokat összeszorozzák.

Több egytag összegét *többtagnak* nevezzük. Az egyszerűség kedvéért valamennyi egytagot többtagnak tekintünk.

A többtagok összeadásakor a zárójel felbontásának szabályát alkalmazzák.

A többtag egytaggal való szorzásánál a többtag minden tagját megszorozzák az adott egytaggal, a kapott eredményeket pedig összeadják. Többtag többtaggal való szorzásánál az első többtag minden tagját megszorozzák a második többtag minden tagjával, és a kapott szorzatokat összeadják.

ÖNELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

1. Mondjatok példákat számkifejezésekre és változókat tartalmazó kifejezésekre!
2. Milyen kifejezéseket nevezünk racionálisaknak?
3. Milyen kifejezéseket nevezünk egész kifejezéseknek?
4. Mondjatok modulusokat tartalmazó kifejezéseket!
5. Mit nevezünk hatványnak, a hatvány alapjának, hatványkitevőnek?
6. Mit nevezünk azonosságnak? Mondjatok példákat!
7. Mit nevezünk a kifejezések azonos átalakításának?
8. Egyenlőség-e minden azonosság?
9. Azonosság-e minden egyenlőség?
10. Milyen kifejezéseket nevezünk azonosan egyenlőknek vagy azonosságnak?
11. Fogalmazzátok meg a hatvány alaptulajdonságát!
12. Fogalmazzátok meg a hatványok szorzásának szabályát!
13. Milyen szabály szerint emelnek hatványt hatványra?
14. Milyen szabály szerint emelnek hatványra szorzatot?
15. Hogyan emelnek hatványra törtet?
16. Mit nevezünk egytagnak?
17. Mit nevezünk normálalakú egytagnak?
18. Mit nevezünk az egytag együtthatójának?
19. Mit nevezünk az egytag fokszámának?
20. Fogalmazzátok meg az egytag hatványra emelésének szabályát!
21. Mit nevezünk többtagnak; háromtagnak; kéttagnak?
22. A többtagok mely tagjait nevezzük egyneműeknek?
23. Hogyan írják a többtagokat normálalakban?
24. Hogyan adják össze a többtagokat? Hogyan vonnak ki többtagokat?
25. Fogalmazzátok meg a többtag egytaggal való szorzásának szabályát!
26. Fogalmazzátok meg a többtagok szorzásának szabályát!

FELKÉSZÜLÉS A TEMATIKUS ÉRTÉKELÉSRE

3. sz. tesztfeladatok

1. Az alábbi kifejezések közül melyek többtagok?

a) $(x + y)^2$; b) $x^2 + y^2$; c) $\frac{x^2}{y^2}$; d) $x^2 : y^2$.

2. Írjátok le normálalakban a $3x^2 - 1 - 5x - 4x^2 - 7 + 5x - x^3 + 8$ többtagot:

a) $x^3 + x^2$; b) $-x^3 + x^2$; c) $-x^3 - x^2$; d) $-x^3$!

3. Határozzátok meg a $4{,}5x^6 + 3x - 2{,}5x^2 - 6x^8$ többtag hatványát!

a) 8; b) 1; c) 2; d) 6.

4. Egyszerűsítsétek a $(2a + 3b) + (7b - 3a) - (8a - 6b)$ kifejezést!

a) $13a - 4b$; b) $-9a + 16b$; c) $7a - 16b$; d) $-32a + 4b$.

5. Végezzétek el az $(x - 1)(x + 1)$ szorzást!

a) $x^2 - 2x + 1$; b) $x^2 + 1$; c) x^2; d) $x^2 - 1$.

6. Számítsátok ki a $0{,}6x^3 + 0{,}4x^3$ többtag értékét, ha $x = 0{,}2$!

a) 0,8; b) 0,08; c) 0,008; d) 0,0008.

7. Az x mely értéke mellett lesz az $5x^3 - 9x + 17$ és $5x^3 + 4x + 17$ többtag egyenlő 13-mal?

a) 1; b) –1; c) 2; d) –2.

8. Írjátok le kéttag alakjában azt a számot, amelynek m számmal való osztásakor a hányados 8, a maradék r lesz!

a) $8m + r$; b) $8m - r$; c) $8r - m$; d) $8r + m$.

9. Oldjátok meg az $x(x + 1) - x(x - 2) = 3$ egyenletet!

a) –1; b) 0; c) 1; d) 2.

10. Milyen többtagot kell az $a^3 - a^2 + 3$ többtaghoz adni, hogy az eredmény $a^2 + 3$ legyen?

a) $a^3 - a^2$; b) $a^2 - a^3$; c) $2a^2 - a^3$; d) $2a^2 - a^2$.

A 3. sz. dolgozat típusfeladatai

1°. Számítsátok ki a $3x^2 - 2x - 6{,}42$ kifejezés értékét, ha:

a) $x = 3$; b) $x = -1{,}2$!

2°. Írjátok le normálalakban az alábbi többtagot!

$$a^2 + 2a + 2 - a + 5 + 3a^2.$$

3°. Határozzátok meg az alábbi többtagok összegét és különbségét!

a) $n^2 - 2n - 1$ és $n^2 + 3$; b) $3x^2 - 2xy + y^2$ és $5x^2 + 2xy - 2y$.

4°. Határozzátok meg az egyenlet gyökeit!

$$y^2 + 3 = y(y + 1).$$

5•. Szorozzátok össze a kifejezéseket!

a) $2x^2$ és $x + y$; b) $a - 2b$ és $a^2 + 2ab + 4b^2$.

6•. Egyszerűsítsétek a kifejezést!

a) $5x^2(x - 3) + 15x^2$;
b) $3a(a^2 - a + 2) + 3a^3 - 6a^2$;
c) $(2x - 1)(1 + 2x) - 4x^2$.

7•. Oldjátok meg az egyenletet!

a) $(x - 2)(x + 3) = x^2 - x$;
b) $(3y - 4)(y + 1) = y(3y + 1)$.

8•. Az A és B kikötők közötti távolságot a folyás irányában a csónak 3 óra alatt, a folyással szemben 4 óra alatt teszi meg. Határozzátok meg az A és B pontok közötti távolságot, ha a vízfolyás sebessége 3 km/h!

9••. Bizonyítsátok be, hogy a

$$3ab + 6((2a + b)a + 5) - 3a(3b + 4a)$$

kifejezésnek a változók bármilyen értékei mellett ugyanaz lesz az értéke!

10••. Bizonyítsátok be, hogy ha az a, b, c betűk számjegyek, akkor a

$$(\overline{ab} + \overline{ac} + \overline{bc}) - (\overline{ca} + \overline{cb} + \overline{ba})$$

különbség 18 többszöröse!

3. FEJEZET

TÖBBTAGOK TÉNYEZŐKRE BONTÁSA



A matematikusoknak megvan a saját nyelvük – a képletek nyelve.

Sz. V. Kovalevszka

A többtagok tényezőkre bontása a többtagok szorzásával ellentétes művelet. Már tudjátok, hogy a különböző feladatok megoldása során szükség van két vagy több szám összeszorzására, néha az adott szám tényezőkre bontására. Hasonló feladatok merülnek fel az egész algebrai kifejezések átalakításánál.

Ebben a fejezetben a következőkről lesz szó:

- **közös tényező kiemelése a zárójel elé;**
- **csoportosítás;**
- **a rövidített szorzás képletei;**
- **a többtagok tényezőkre bontásának különböző módszerei.**

14. §. A KÖZÖS TÉNYEZŐ KIEMELÉSE A ZÁRÓJEL ELÉ



Már megtanultátok, hogyan kell a természetes számokat tényezőkre bontani. Például:

$$15 = 3 \cdot 5,\ 120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5,\ 1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13.$$

A többtagokat is tényezőkre bontjuk. *A többtagok tényezőkre bontása* azt jelenti, hogy felcseréljük az adott többtagot egy vele azonosan egyenlő több többtag szorzatával. Például az $x^2 - 1$ többtag felbontható az $x + 1$ és $x - 1$ tényezőkre, mert az $x^2 - 1 = (x + 1) \times (x - 1)$ igaz azonosság.

A többtagok tényezőkre bontásának egyik módszere a *közös tényező kiemelése a zárójel elé.* Megvizsgáljuk ezt az esetet.

Az $ax + ay$ többtag minden tagja tartalmazza az a közös tényezőt. A szorzás széttagolási törvényéből következik, hogy $ax + ay = a(x + y)$. Ez azt jelenti, hogy az $ax + ay$ többtag felbontható az a és $x + y$ tényezők szorzatára. Más példák:

$$4ab - 2ab^2 = 2ab \cdot 2 - 2ab \cdot b = 2ab(2 - b),$$
$$3x + 6x^2 - 9x^3 = 3x \cdot 1 + 3x \cdot 2x - 3x \cdot 3x^2 = 3x(1 + 2x - 3x^2).$$

A tényezőkre bontás helyességéről meggyőződhetünk, ha a kapott tényezőket összeszorozzuk. Ha helyesen jártunk el, akkor eredményül az adott többtagot kell kapnunk.

Néha olyan kifejezést is tényezőkre kell bontanunk, amelynek többtag a közös tényezője. Például az $a(b-c)+x(b-c)$ kifejezésben a közös tényező $b-c$. Ez kiemelhető a zárójel elé:

$$a(b-c)+x(b-c)=(b-c)(a+x).$$

Szeretnétek többet megtudni?

Ugyanaz a többtag többféleképpen bontható tényezőkre. Például:

$$4x^4+2ax^2=2(2x^4+ax^2);$$
$$4x^4+2ax^2=2x(2x^3+ax);$$
$$4x^4+2ax^2=2x^2(2x^2+a).$$

A zárójel elé rendszerint olyan közös tényezőt emelünk ki, hogy a zárójelben a legegyszerűbb kifejezés maradjon. Ezért leggyakrabban a közös tényező együtthatójaként az adott többtag vagy annak összes tagjai és azok modulusai együtthatóinak legnagyobb közös osztóját veszik, de nem mindig. Minden attól függ, hogy milyen célból bontják tényezőkre a többtagot.

Határozzuk meg például a $4x^4+2ax^2$ kifejezés értékét, ha $x^2+\frac{1}{2}a=0$.

A feltételek figyelembevételével a gyakorlat a következőképpen oldható meg:

$$4x^4+2ax^2=4x^2(x^2+\frac{1}{2}a)=4x^4\cdot 0=0.$$

Itt a zárójel elé nem a $2x^2$-et, hanem a $4x^2$-et vittük ki, s a zárójelben ezért az a kifejezés maradt, amelynek az értéke a feladat feltételeiből ismert.

Ellenőrizzétek magatokat!

1. Milyen kifejezéseket nevezünk többtagoknak?
2. Mit jelent a többtag tényezőkre bontása?
3. Hogyan bontható tényezőkre az $ax+ay$ többtag?
4. Mely műveleti törvényekből fakad a többtag tényezőkre bontásának és a közös tényező zárójel elé történő kivitelének módszere?

Oldjuk meg együtt!

1. Bontsuk tényezőkre a $-6a^2 + 24a - 9$ többtagot!

✔ M e g o l d á s. $-6a^2 + 24a - 9 = 3(-2a^2 + 8a - 3)$ vagy $-6a^2 + 24a - 9 = -3(2a^2 - 8a + 3)$.

2. Bontsuk tényezőkre a többtagot!

$$15ab^4 + 10a^2b^3 - 5a^3b^2 - 15a^4b^2.$$

✔ M e g o l d á s. $15ab^4 + 10a^2b^3 - 5a^3b^2 - 15a^4b^2 =$
$= 5ab^2 \cdot 3b^2 + 5ab^2 \cdot 2ab - 5ab^2 \cdot a^2 - 5ab^2 \cdot 3a^3 =$
$= 5ab^2(3b^2 + 2ab - a^2 - 3a^3)$.

3. Bizonyítsuk be, hogy a $19^{15} + 19^{14}$ osztható 20-szal!

✔ B i z o n y í t á s. $19^{15} + 19^{14} = 19^{14} \cdot (19 + 1) = 19^{14} \cdot 20$. Az utolsó szorzat osztható hússzal, ezért az adott összeg is osztható 20-szal.

4. Oldjuk meg az $5x^4 - x^3 = 0$ egyenletet!

✔ M e g o l d á s. $5x^4 - x^3 = x^3(5x - 1)$, ezért az adott egyenlet egyenértékű az $x^3(5x - 1) = 0$ egyenlettel.
Két szám szorzata egyenlő nullával, amikor legalább az egyikük nullával egyenlő.
Vagyis $x^3 = 0$, ahonnan $x = 0$ vagy $5x - 1 = 0$, ahonnan $x = 0{,}2$.
F e l e l e t. Az egyenletnek két gyöke van: 0 és 0,2.

Oldjátok meg fejben!

514. Határozzátok meg a többtag közös tényezőjét!

a) $cx + cy$; b) $a^2x - a^2y$; c) $nx + ax$;
d) $2ax + 4ax^2$; e) $6cy - 9cy^2$; f) $-ac^2 + c^2$.

515. Bontsátok tényezőkre az előző feladat többtagjait!

516. Helyesen vannak-e tényezőkre bontva az alábbi többtagok?

a) $ay - 5y = y(a - 5)$; b) $cx + x = x(c + x)$;
c) $-9 + 6x = -3(3 + 2x)$; d) $a^6 - a = a(a^5 - 1)$.

A szint

517. Bontsátok egyszerű tényezőkre a következő számokat: 45, 121, 150, 819!

Vigyétek ki a zárójel elé a közös tényezőt az 518–521. példákban!

518. a) $xa + xb$; b) $2m + 2p$; c) $cp + tp$;
d) $ab + 3b^2$; e) $4b^2 - 2ab$; f) $6x^2 - 2x$.

519. a) $2a^2 + 3a$; b) $7n - 14n^2$; c) $5p^3 - 5p$;
d) $12a + 12b$; e) $13x - 26y$; f) $15ab + 45c$.

520. a) $ax - ay$; b) $m^2x + my$; c) $n^3c - n^2x$;
d) $3a^2x - 2ax$; e) $4cy^2 - 2c^2y$; f) $10a^2x + 5a^2x^2$.

521. a) $a^3b^3 - 6ab^4$; b) $5y^3z + 20az^3$; c) $-12x - 15x^2$;
d) $-3a^2b - 6ab^2$; e) $3a^6 + 6a^5 + a^4$; f) $2y - 3y^2 - y^3$;
g) $6z^2 - 3z^3 + 3z$; h) $x^4 - 4x^3 + 3x^2$.

Bontsátok tényezőkre a többtagokat az 522–524. példákban!

522. a) $2ac^2 - 8c^3d + 4acd$; b) $3acx - 6a^2x - 9a^3c^2x$;
c) $8a^4x + 7a^2x^2 + ax^3$; d) $10n^2c^3 - 15nc^2 - 20nc^3$;
e) $3x^3 - 6x^2y - 12xy^4$; f) $-2a^2x^3 - a^5cx^4 + 3acx^2$;
g) $-5c + 12c^2 - c^3$; h) $-6py^2 + 8p^2y - 4p^3z$.

523. a) $0{,}5x + x^2 - 1{,}5x^3$; b) $a^2b - 2a^3b^2 + 3ab^3 - ab^2$;
c) $-m^2x + 4mx^2 + 3m^3$; d) $0{,}7x^3 - 1{,}4x^2 + 2{,}1x - 2{,}8x^4$.

524. a) $3x(a + b) - 2y(a + b)$; b) $3(2x + 5) + x(5 + 2x)$;
c) $5a(x - y) + 3(x - y)$; d) $2(m^2 - 2) - x(m^2 - 2)$.

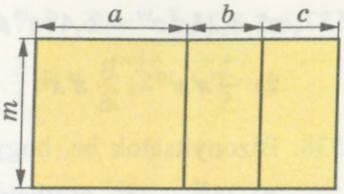
525. Számítsátok ki a kifejezés értékét!

a) $12{,}3x + 12{,}3y$, ha $x = 0{,}23$, $y = 0{,}77$;
b) $2{,}63x + 2{,}63y$, ha $x = 0{,}16$, $y = 0{,}84$;
c) $x^2 - 1{,}3x$, ha $x = 11{,}3$;
d) $5{,}24x - x^2$, ha $x = 4{,}24$.

526. Bizonyítsátok be, hogy:

a) $16^{17} + 16^{16}$ osztható 17-tel;
b) $5^{12} + 5^{10}$ osztható 13-mal;
c) $49^5 + 7^8$ osztható 350-nel.

527. Tisztázzátok a 43. ábra alapján az $am + bm + cm = (a + b + c)m$ azonosság geometriai tartalmát, az a, b, c és m pozitív értékeinél!



43. ábra

Oldjátok meg az 528–529. egyenleteket!

528. a) $x(x - 3) = 0$; b) $y(5 - y) = 0$; c) $3z(z + 4) = 0$;
d) $2x(5 - 2x) = 0$; e) $x^2 - 12x = 0$; f) $4x^2 + x = 0$.

529. a) $2x^2 - 2x = 0$; b) $3z^2 - z = 0$; c) $4y^2 = 8y$;
d) $12x^2 - 6x = 0$; e) $10x^2 + x = 0$; f) $5x^2 - \frac{1}{2}x = 0$;
g) $1{,}8x^2 = 3x$; h) $x = x^2$; i) $1{,}5x = 5x^2$.

B szint

Bontsátok tényezőkre az 530–537. kifejezéseket!

530. a) $3a^2b + 2ab - 5a$; b) $7xy^3 + 8x^2y^2 - 9y^4$;
c) $5ac^2 - ac^3 - 3a^2c$; d) $8az^4 - 7az^3 - 4az^2$.

531. a) $4a^2 - 5ab + a$; b) $3x^2 + 8x^2y - x^2$;
c) $-7m^2 - m^2z + m^2$; d) $-x^6 - 10x^4y^2 - x^2$.

532. a) $4a^2b^3c^4 - 5ab^3c^2$; b) $9x^3yz^4 + 7x^4y^2z^3$;
c) $18a^3c^2x - 9ac^2x^3$; d) $15mn^2y + 45m^2n^3$.

533. a) $15a^3mx^4 + 20a^2m^2x^3 - 25a^4mx$;
b) $32x^4y^3z - 8x^3yz^3 + 16x^2y^3z^4$.

534. a) $a^3 + 3a^2x - 3ax^2 - a^4 + 2a$;
b) $3x^3 - 2ax^2 + 4a^2x + ax - x^4$.

535. a) $0{,}8ax^3 + 0{,}2a^2x^4 + 0{,}4a^3x^5 + 0{,}6a^4x^6$;
b) $1{,}2a^2b^3c^4 - 0{,}6a^3b^3c^4 + 1{,}8a^4b^3c^4$;
c) $10{,}5b^2c^4 + 1{,}5b^3c^2d^2 - 20b^5c^3d$.

536. a) $144x^{20}y^{18} + 36x^{18}y^{10}$; b) $169a^{23}b^{20} - 49a^{20}b^{18}$;
c) $529a^{15}m^{35} - 46a^{17}b^{30}$; d) $576n^{20}x^{31} + 240n^{17}x^{32}$.

537. a) $3{,}24a^7c^{19} - 6{,}48a^{10}c^{15}$; b) $28{,}9m^{30}x^{15} - 57{,}8m^{45}x^{13}$;

c) $\frac{2}{5}a^3x^{10} - \frac{3}{5}a^4x^7$; d) $\frac{6}{7}x^5y^{18} + \frac{5}{7}x^{18}y^5$.

538. Bizonyítsátok be, hogy:

a) $25^{25} - 25^{24}$ osztható 100-zal;

b) $81^{31} - 9^{60}$ osztható 6480-nal;

c) $7^{100} + 3 \cdot 7^{99}$ osztható 490-nel;

d) $37^{60} + 63 \cdot 37^{59}$ osztható 100-zal!

Bontsátok tényezőkre az 539–542. kifejezéseket!

539. a) $x(a - 2) + y(a - 2)$; b) $c^2(x + y) - 3(x + y)$;

c) $a(a^2 + 1) + 5(a^2 + 1)$; d) $x^2(a - c) - (a - c)^2$.

540. a) $(x + 1)^2 - 2x(x + 1)$; b) $8(a^2 - 3) + (a^2 - 3)^2$;

c) $2y(y - 6)^3 - 3y(y - 6)^2$; d) $5b(a + 2c)^5 + 2b^3(a + 2c)^3$.

541. a) $x(a - b) + 3y(b - a)$; b) $4(x - y) - 3a(y - x)$;

c) $3(2x - 5) - 2x(5 - 2x)$; d) $(m - n)^2 - m(n - m)$;

e) $7(a - 4)^2 + (4 - a)$; f) $4(b - 3)^2 + 5b(3 - b)$.

542. a) $(4x - 3y)(x + 2y) + 2x(x + 2y)$;

b) $5a(3a - b) + (b - 3a)(5a + 2b)$;

c) $(a + b)(x - y) + (b - a)(y - x)$;

d) $(2a + 7b)(a - 5b) - (8b - 3a)(a - 5b)$.

543. Vigyétek a zárójel elé a számtényezőt!

a) $(5x + 10)^2$; b) $(3 - 12y)^2$; c) $(4a - 4b)^2$;

d) $(16y + 12x)^3$; e) $(15 - 5y)^3$; f) $(6x - 8)^4$.

544. Vigyétek a zárójel elé a tényezőt!

a) $(ab^2 - a^2)^3$; b) $(2x^3y + 4x^4)^2$; c) $(-6a - 2ab)^3$;

d) $(-2x^3 + 4x^2)^4$; e) $\left(\frac{1}{2}a^2b + \frac{1}{4}ab^2\right)^2$; f) $(0{,}5x^3 - 0{,}3x^5)^2$.

Oldjátok meg az 545–547. egyenletet!

545. a) $0{,}5z^3 - 1{,}5z^2 = 0$; b) $3(4x - 1)^2 - (1 - 4x) = 0$.

546. a) $3x^2 + 6(x + 2) = 12$; b) $x^2 - 5(x - 3) = 15$;

c) $x^3 - 5(x^2 - 2) = 10$; d) $2z^4 - 7(z^3 - 3) = 21$.

547. a) $6x^3 + 3(x^2 + 7) = 21$; b) $0{,}7y^2 - 2(y - 1{,}3) = 2{,}6$;

c) $2z^4 - \frac{1}{3}z(6z - 3) = z$; d) $-\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}(2 - x^3) = 1$.

548. Számítsátok ki!

a) $\dfrac{3{,}72 \cdot 2{,}41 - 2{,}41 \cdot 2{,}72}{24{,}1 \cdot 1{,}4 + 24{,}1 \cdot 1{,}01 - 24{,}1 \cdot 1{,}41}$;

b) $\dfrac{1{,}3 \cdot 27 + 1{,}3 \cdot 63 + 2{,}3 \cdot 74 + 2{,}3 \cdot 26}{1{,}8 \cdot 5{,}7 + 1{,}8 \cdot 4{,}3}$;

c) $\dfrac{7{,}6 \cdot 4{,}6 - 6{,}7 \cdot 8{,}5 + 7{,}6 \cdot 5{,}4 - 6{,}7 \cdot 1{,}5}{0{,}4 \cdot 2{,}3 - 0{,}4 \cdot 1{,}3}$;

d) $-\dfrac{17{,}3 \cdot 2{,}4 - 3{,}27 \cdot 1{,}2 - 8{,}8 \cdot 3{,}27 - 3{,}4 \cdot 17{,}3}{12{,}5 \cdot 8{,}7 + 3{,}2 \cdot 12{,}5 - 10{,}9 \cdot 12{,}5}$.

549. Vigyétek ki a zárójel elé a közös tényezőt!

a) $6a(x - 2) + 8b(x - 2) + 4c(2 - x)$;

b) $x^3(2x + 3) + 3(2x^3 + 3x^2) + 3x^3(3 + 2x)$;

c) $x^3 - 1 + 5a(x^3 - 1) + b(1 - x^3)$;

d) $(2x - 1)(x^2 + 1) + (x^2 - 1)(2x - 1) + (1 - 2x)(x + 2)$.

550*. Adjátok meg szorzat alakjában!

a) $x^{n+1} + x^n$; b) $a^m - a^{m+2}$; c) $x^{k+1} + x^{k+3}$;

d) $y^{m+5} - y^m$; e) $4x^{n+6} + 12x^{n+1}$; f) $9a^{k+5} - 3a^{k+2}$;

g) $8^{2n+1} - 4^{2n+4}$; h) $3^{2n+1} + 9^{n+2}$; i) $16^{n+5} - (8^{n+2})^2$.

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

Az 551–553. feladatokat oldjátok meg a megfelelő egyenletek és diagramok segítségével!

551. A fiú 3-szor fiatalabb az apjánál. Hány éves az apa, ha 28 évvel idősebb a fiánál?

552. Egy tehergépkocsira 4-szer több rakományt raktak, mint az utánfutóra. Hány mázsa rakomány van az utánfutón, ha 12 mázsával kevesebb van rajta, mint a tehergépkocsin?

553. Egy tehergépkocsira 4-szer több rakományt raktak, mint az utánfutóra. Hány mázsa rakomány van a tehergépkocsin, ha az utánfutóval együtt 40 mázsát raktak rá?

15. §. CSOPORTOSÍTÁSI MÓDSZER



Bontsuk tényezőkre az $ab + ac + xb + xc$ többtagot. Először két csoportra osztjuk fel a tagjait: $(ab + ac) + (xb + xc)$. Az első zárójelből kiemeljük az a közös tényezőt, a másodikból pedig az x-et. Ekkor a következő kifejezést kapjuk: $a(b + c) + x(b + c)$. Ebben mindegyik összeadandó tartalmazza a $b + c$ közös tényezőt. Ha ezt kiemeljük a zárójel elé, akkor a $(b + c)(a + x)$ kifejezést kapjuk.

Ezek az átalakítások felírhatók egymás után is:

$$ab + ac + xb + xc = (ab + ac) + (xb + xc) = \\ = a(b + c) + x(b + c) = (b + c)(a + x).$$

A többtag tényezőkre bontásának ezt a módját *csoportosítási módszernek* nevezzük.

M e g j e g y z é s. Ez a többtag másképp is csoportosítható:

$$ab + ac + xb + xc = (ab + xb) + (ac + xc) = \\ = b(a + x) + c(a + x) = (a + x)(b + c).$$

Ugyanazt az eredményt kaptuk.

Bontsuk tényezőkre az $an + cn + a + c$ többtagot:

$$an + cn + a + c = n(a + c) + 1(a + c) = (a + c)(n + 1).$$

Az $a + c$ összeget nem feltétlenül kell $1(a + c)$ alakban leírni, de először így is írható a hibák elkerülése érdekében.

Szeretnétek többet megtudni?

A csoportosítás módszerét alkalmazva néha szükség van arra, hogy az adott többtag valamely tagját egytagok összegének vagy különbségének alakjában adjuk meg. Az $x^2 + 5x + 6$ háromtag tényezőkre bontása érdekében az $5x$ egytagot $2x + 3x$ alakjában írjuk le:

$$x^2 + 5x + 6 = x^2 + 3x + 2x + 6 = (x^2 + 3x) + (2x + 6) = \\ = x(x + 3) + 2(x + 3) = (x + 3)(x + 2).$$

Hasonló átalakítások az **578.** gyakorlatban szereplő azonosságok felhasználásával is elvégezhetők.

Ellenőrizzétek magatokat!

1. Mit jelent a „többtag tényezőkre bontása”?
2. A többtagok tényezőkre bontásának milyen módszereit ismeritek?
3. Mondjátok el, hogyan kell a többtagot tényezőkre bontani csoportosítási módszerrel?

Oldjuk meg együtt!

1. Bontsátok tényezőkre a többtagot!

a) $3c - x^2 + cx - 3x$; b) $2 - a - x + ac + cx - 2c$.

✔ M e g o l d á s.

a) $3c - x^2 + cx - 3x = (3c + cx) - (x^2 + 3x) =$
$= c(3 + x) - x(x + 3) = (3 + x)(c - x)$;

b) $2 - a - x + ac + cx - 2c = 2 - a - x - (2c - ac - cx) =$
$= 2 - a - x - c(2 - a - x) = (2 - a - x)(1 - c)$.

F e l e l e t. a) $(3 + x)(c - x)$; b) $(2 - a - x)(1 - c)$.

2. Oldjátok meg az egyenletet!

$2y^3 - 3y^2 + 10y - 15 = 0$.

✔ M e g o l d á s.

Az egyenlet bal oldalát tényezőkre bontjuk:

$2y^3 - 3y^2 + 10y - 15 = 0$, $y^2(2y - 3) + 5(2y - 3) = 0$.

$(2y - 3)(y^2 + 5) = 0$, ahonnan $2y - 3 = 0$ vagy $y^2 + 5 = 0$.

Az első egyenlet gyöke $y = 1{,}5$, a második egyenletnek pedig nincs megoldása, mert $y^2 \neq -5$.

F e l e l e t. $y = 1{,}5$.

Oldjátok meg fejben!

554. Bontsátok tényezőkre a kifejezést!

a) $(a + 1)x + (a + 1)y$; b) $x(2 - c) - y(2 - c)$;
c) $p - n + c(p - n)$; d) $(x + y)^2 + x + y$.

555. Helyesen vannak-e elvégezve az alábbi átalakítások?

$ax + 7x + a + 7 = (ax + a) + (7x + 7) =$
$= a(x + 1) + 7(x + 1) = (x + 1)(a + 7)$.

556. Az $ax + ay + bx + by + x + y$ többtag tényezőkre bontásával a tanuló az $(x + y)(a + b)$ kifejezést kapta. Milyen hibát követett el a tanuló?

A szint

Az 557–560. kifejezéseket írjátok le szorzatok alakjában!

557. a) $x(a + 1) + y(a + 1)$; b) $m(3 - x) - m(3 - x)$;
c) $c + y + a(c + y)$; d) $a(x - y) - x + y$.

558. a) $x + y + a(x + y)$; b) $x(a - b) + a - b$;
c) $2a + c(a - b) - 2b$; d) $5x - z(x + y) + 5y$;
e) $ax - ay - b(y - x)$; f) $n(x + y) - mx - my$;
g) $(x + y)^2 - 4x - 4y$; h) $3x + 6y - (x + 2y)^2$.

559. a) $a(x + y + z) + b(x + y + z)$; b) $a(z - x + 1) + z - x + 1$;
c) $m(a - b - c) + n(a - b - c)$; d) $n(a - b + c) - a + b - c$.

560. a) $a(x + 3) + b(x + 3) + c(x + 3)$;
b) $m(a - z) - n(a - z) + 2(a - z)$;
c) $x(a^2 - 5) + y(a^2 - 5) + a^2 - 5$;
d) $mx - my + n(x - y) + x - y$.

Bontsátok tényezőkre az 561–563. többtagokat!

561. a) $ax - ay + bx - by$; b) $ca - cx + na - nx$;
c) $az - z^2 + ac - cz$; d) $5a - 10 + ac - 2c$.

562. a) $2ax - bx + 10ay - 5by$; b) $10ax - 4ay + 5cx - 2cy$;
c) $3mp + mq - 3np - nq$; d) $ac + bc + a^2 + ab$.

563. a) $x^2 + ax + xy + ay$; b) $3a^3 + 12a^2 - a - 4$;
c) $a^2 - an - 3a + 3n$; d) $y^3 - 3y^5 + 3y^3 - 9$;
e) $4x^2 - 4xz - 5x + 5z$; f) $a^3 + a^2 + a + 1$;
g) $5a^2 - 5ax - 8a + 8x$; h) $x^5 + x^3 - x^2 - 1$.

564. Számítsátok ki a kifejezések értékét!
a) $x^3 - 9x^2 + x - 9$, ha $x = 19$;
b) $m^2 - mn - 2m + 2n$, ha $m = 0{,}35$ és $n = 0{,}25$.

565. Számítsátok ki!
a) $20{,}5 \cdot 17 + 79{,}5 \cdot 17 + 20{,}5 \cdot 0{,}28 + 79{,}5 \cdot 0{,}28$;
b) $42{,}2^2 - 42{,}2 \cdot 41{,}2 + 57{,}8^2 - 57{,}8 \cdot 56{,}8$.

Oldjátok meg az 565–567. egyenletet!

566. a) $x(x - 15) + 3(x - 15) = 0$; b) $y(y - 2) - 7(2 - y) = 0$;
c) $x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0$; d) $x^3 + 4x^2 + 3x + 12 = 0$.

567. a) $2z^3 - 3z^2 + 2z - 3 = 0$; b) $x^3 - 5x^2 + 2x - 10 = 0$;
c) $y^3 + 3y^2 + 5y + 15 = 0$; d) $3x^3 + 9x^2 + x + 3 = 0$.

B szint

Adjátok meg az 568–574. kifejezéseket szorzatok alakjában!

568. a) $4a^2 - 4az - 3a + 3z$; b) $3x^2 - 3xy + 3y^2 - 3xy$;
c) $a + a^2 - a^3 - a^4$; d) $a^3 + a^2b - a^2c - abc$.

569. a) $a^2 - ab - 4a + 4b$; b) $ax + 3 + 3x + a$;
c) $ac + b - bc - a$; d) $3m - bx + mx - 3b$.

570. a) $ax + ay - az + nx + ny - nz$;
b) $a + b - 2 - ax - bx + 2x$;
c) $2ax + cx - 6ax^2 - 3cx^2 + 2ac + c^2$;
d) $x^2 + 2x - ca - 2c - cx + ax$.

571. a) $az^2 - bz^2 - bz + az - a + b$;
b) $a + b + ax^2 + bx^2 - bx - ax$;
c) $ax^2 + bx^2 + ax - cx^2 + bx - cx$;
d) $ax^2 + bx^2 - bx - ax + cx^2 - cx$.

572. a) $2am + 3mx - 7m - 2ac - 3cx + 7c$;
b) $4ax^2 - ax + 5a - 4bx^2 + bx - 5b$;
c) $9c^3x^2 + 2c^3x - c^3 + 9x^2 + 2x - 1$;
d) $4abc^2 - 4ac + 4b + abc^2x - acx + bx$.

573. a) $x^4 - a^4 + a^3x - ax^3 + c^3x - ac^3$;
b) $a^3 - a^2 + x^3 - x^2 + a^2x + ax^2$;
c) $x^3 + y^3 + xy^2 + x^2y + x^2z + y^2z$;
d) $a^3 + a + ab^2 - a^2b - b - b^3$.

574. a) $x^3 + x^2y + x^3y - xy^3 - xy^2 - y^3$;
b) $x^2 - x^3 + y - y^3 - xy - x^2y^2$;
c) $0{,}9ax + 1{,}2x^2 - 1{,}2ac - 1{,}6cx$;

d) $\frac{3}{13}ax^2y - \frac{1}{13}x + \frac{12}{13}a^2xy^2 - \frac{4}{13}ay$.

575. Bontsátok tényezőkre a többtagokat, és ellenőrizzétek a megoldást!

a) $15a^2mx - 20am - 21ax + 28$;

b) $a^2 + 10ab - 20a - 0{,}1a - b + 2$.

576. Bizonyítsátok be, hogy:

a) $2^9 \cdot 3^5 + 2^9 \cdot 3^3 - 2^6 \cdot 3^5 - 2^6 \cdot 3^3$ osztható 420-szal;

b) $5^{10} \cdot 7^{10} + 5^{10} \cdot 7^8 - 5^8 \cdot 7^{10} - 5^8 \cdot 7^8$ osztható 1200-zal;

c) $2^{11} \cdot 3^6 - 2^7 \cdot 3^6 - 2^7 \cdot 3^4 + 2^{11} \cdot 3^4$ osztható 150-nel!

577. Bizonyítsátok be, hogy:

a) $2^{10} \cdot 3^{12} + 2^8 \cdot 3^{12} + 2^{10} \cdot 3^{10} + 2^8 \cdot 3^{10}$ osztható 300-zal;

b) $5^{10} \cdot 3^{15} - 5^8 \cdot 3^{16} + 5^{11} \cdot 3^{12} - 5^9 \cdot 3^{13}$ osztható 11-gyel;

c) $-7^{10} \cdot 2^{10} + 7^9 \cdot 2^{14} - 7^8 \cdot 2^{10} + 7^7 \cdot 2^{14}$ osztható 45-tel!

578. Bizonyítsátok be az azonosságot kétféle módszerrel!

a) $x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$;

b) $x^2 - (a + b)x + ab = (x - a)(x - b)$;

c) $x^2 + (a - b)x - ab = (x + a)(x - b)$;

d) $x^2 - (a - b)x - ab = (x - a)(x + b)$.

579*. Az 578. feladat azonosságát felhasználva bontsátok az alábbiakat tényezőkre!

a) $x^2 + (2 + 3)x + 2 \cdot 3$; b) $x^2 + 6x + 5$; c) $y^2 + 7y + 12$;

d) $z^2 + 8z + 3 \cdot 5$; e) $x^2 + 3x - 10$; f) $x^2 - x - 6$;

g) $a^2 + 3ab + 2b^2$; h) $2x^2 - 7xy + 3y^2$.

Ellenőrizzétek a megoldást!

Oldjátok meg az 580–581. egyenleteket!

580*. a) $x(x + 7) - 2(x + 7) = 0$; b) $3x(x - 1{,}5) + 6(x - 1{,}5) = 0$;

c) $2x(x^2 + 4) - 8x^2 - 32 = 0$; d) $y^4 - 3y^3 + y = 3$.

581*. a) $x^3 - 5x^2 + x = 5$; b) $13z - 78 - 2z(z - 6) = 0$;

c) $z^5 + z^3 + z - 2z^4 - 2z^2 = 2$;

d) $x^4 + 5x^3 + 6x^2 + x^2 + 5x + 6 = 0$.

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

Számítsátok ki az 582–583. példákat!

582. a) $-2\frac{1}{8} + \frac{2}{3}$; b) $3\frac{2}{5} + \left(-\frac{3}{7}\right)$; c) $-4\frac{3}{4} + \left(-5\frac{1}{2}\right)$;
d) $4\frac{1}{2} + \left(-1\frac{1}{3}\right)$; e) $\frac{3}{4} + (-0{,}5)$; f) $-\frac{3}{5} + 4{,}2$.

583. a) $-\frac{3}{5} + (-1{,}8)$; b) $0{,}7 + \left(-\frac{9}{10}\right)$; c) $\frac{1}{3} + (-2{,}3)$;
d) $-\frac{2}{3} + (-0{,}3)$; e) $2{,}05 + \left(-\frac{1}{8}\right)$; f) $1{,}5 + \left(-\frac{4}{5}\right)$.

584. Melyik igaz az alábbi állítások közül?
a) ha $|a| < b$, akkor $a < b$; b) ha $a < |b|$, akkor $a < b$;
c) ha $|a| < |b|$, akkor $a < b$.

585. Hány olyan egész szám létezik, amely kielégíti az $|x| < 5$ egyenlőtlenséget? Jelöljétek be őket a koordináta-tengelyen!

16. §. KÉTTAG NÉGYZETE



Különböző feladatok megoldása során gyakran kell a következőkhöz hasonló kéttagokat összeszorozni: $a + b$ és $a - b$, $a + b$ és $a + b$. Hogy az ilyen esetekben azonnal leírhatók legyenek a feleletek, érdemes megjegyezni bizonyos azonosságokat, amelyeket a *rövidített szorzás képleteinek* nevezünk. Nézzünk meg néhányat közülük.

Szorozzuk össze az $a + b$ és $a + b$ kéttagokat:

$(a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Vagyis

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

A kéttag négyzete az első tag négyzetének, az első és második tag kétszeres szorzatának és a második tag négyzetének összegével egyenlő.

A bebizonyított egyenlőség azonosság, amelyet a *kéttag négyzete képletének* nevezünk. Ezt alkalmazva azonnal leírhatjuk:

$(2x + y)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot y + y^2 = 4x^2 + 4xy + y^2$,

$(a - 3c)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot (-3c) + (-3c)^2 = a^2 - 6ac + 9c^2$.

A közbeeső átalakításokat ajánlatos fejben elvégezni, például:

$$(m + 5a^2b)^2 = m^2 + 10ma^2b + 25a^4b^2.$$

A kéttag négyzetének képlete alapján bármilyen kéttag négyzetre emelhető, köztük az $a - b$, $-a + b$ és $-a - b$ alakúak is:

$$(a - b)^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$
$$(-a + b)^2 = (-a)^2 + 2(-a)b + b^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$
$$(-a - b)^2 = (-a)^2 + 2(-a)(-b) + (-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Jegyezzétek meg a következő képletet:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2!$$

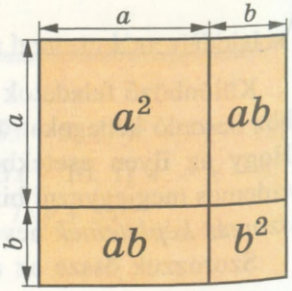
A kéttag négyzetének képlete „fordított irányban” is alkalmazható:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2;$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2.$$

Szeretnétek többet megtudni?

Az $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ képletre gyakran mondják azt, hogy két kifejezés összege négyzetének a képlete, az $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ képletre pedig azt, hogy két kifejezés különbsége négyzetének a képlete.

Az a és b pozitív számok esetében az $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ képlet mértanilag bizonyítható a 44. ábrán látható módon. Ezt így bizonyították az ókori görögök is. Az $a + b$ oldalú négyzet területe az a^2 és b^2 négyzetek és az ab és ab téglalapok területeinek összegével egyenlő.



44. ábra

A rövidített szorzásnak léteznek más képletei is:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$
$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Ellenőrizzétek magatokat!

1. Mivel egyenlő a kéttag négyzete?
2. Mivel egyenlő két kifejezés különbségének négyzete?
3. Lehet-e negatív szám két szám különbségének négyzete? És két szám négyzetének a különbsége?

Oldjuk meg együtt!

1. Emeljétek négyzetre a $3x - c$ kéttagot!

✔ M e g o l d á s. $(3x - c)^2 = (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot c + c^2 = 9x^2 - 6xc + c^2$.

2. Egyszerűsítsétek a következő kifejezést: $(2n + 3)^2 - 4n^2$!

✔ M e g o l d á s. $(2n + 3)^2 - 4n^2 = 4n^2 + 12n + 9 - 4n^2 = 12n + 9$.

3. Adjátok meg többtag alakjában az alábbi kifejezéseket!

a) $(2 + c)^3$; b) $(n^2 + 2n)^3$.

✔ M e g o l d á s. a) $(2 + c)^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot c + 3 \cdot 2 \cdot c^2 + c^3 = 8 + 12c + 6c^2 + c^3$;

b) $(n^2 + 2n)^3 = (n^2)^3 + 3(n^2)^2 \cdot 2n + 3n^2 (2n)^2 + (2n)^3 = n^6 + 6n^4 n + 12n^2 n^2 + 8n^3$.

4. Adjátok meg az alábbi kifejezéseket kéttagok hatványa alakjában!

a) $1 + 8m + 16m^2$; b) $9a^2c^2 - 60ab^2c + 100b^4$;

c) $27x^3 + 54x^2y + 36xy^2 + 8y^3$.

✔ M e g o l d á s. a) $1 + 8m + 16m^2 = (1 + 4m)^2$;

b) $9a^2c^2 - 60ab^2c + 100b^4 = (3ac - 10b^2)^2$;

c) $27x^3 + 54x^2 y + 36xy^2 + 8y^3 = (3x)^3 + 3 \cdot (3x)^2 \cdot (2y) + 3 \cdot (3x) \cdot (2y)^2 + (2y)^3 = (3x + 2y)^3$.

Oldjátok meg fejben!

586. Melyik háromtaggal azonosan egyenlők az alábbi kifejezések?

a) $(a + x)^2$; b) $(x + 1)^2$; c) $(x - 1)^2$.

587. Emeljétek négyzetre az alábbi kéttagokat!

a) $1 + c$; b) $1 - x$; c) $a - n$; d) $x + 2$.

588. Adjátok meg hatványok alakjában!

a) $1 + 2a + a^2$; b) $x^2 - 4yx + 4y^2$; c) $16 - 8c + c^2$;
d) $9z^2 + 12z + 4$; e) $25p^2 + 20px + 4x^2$; f) $y^2 - 14y + 49$.

A szint

Emeljétek négyzetre az 589–592. kéttagokat!

589. a) $a + c$; b) $x + y$; c) $n + 2$; d) $m + 3$;
e) $1 + ab$; f) $p + 3q$; g) $2x + 4$; h) $3a + b$.

590. a) $m + 2$; b) $2a + 5x$; c) $3 + a^2$; d) $x - 1$;
e) $2c - a$; f) $5 - x^2$; g) $1 - ab$; h) $cq - 2p$.

591. a) $ax + 5$; b) $a + c^2$; c) $n + 2a$; d) $3x + 2y$;
e) $5a + 3b$; f) $1 + 2abc$; g) $4n + 3c$; h) $-2 + 5ac$.

592. a) $3c - 5$; b) $ab - 2c$; c) $3a - 7c$;
d) $a^2 - x$; e) $3a - c^3$; f) $2a^2 - 3cx^2$.

Adjátok meg az 593–596. kifejezéseket többtagok alakjában!

593. a) $(m + 2)(m + 2)$; b) $(3 + p)(3 + p)$;
c) $(2a + b)(2a + b)$; d) $(5 + c)(5 + c)$.

594. a) $\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)$; b) $(p + 0{,}1)(p + 0{,}1)$;
c) $(2a^3 + 1)(2a^3 + 1)$; d) $(1 + xy)(1 + xy)$.

595. a) $(b + c^3)^2$; b) $(b + 4c^2)^2$; c) $(2m - q^5)^2$;
d) $\left(\frac{1}{2}c+2a\right)^2$; e) $\left(\frac{2}{3}m+\frac{3}{2}p\right)^2$; f) $(4q^2 + 5p)^2$.

596. a) $(3a - 5)(3a - 5)$; b) $(4x^2 - 3y)(4x^2 - 3y)$;
c) $(1{,}3x^3 - 1)(1{,}3x^3 - 1)$; d) $(2{,}5ac - x^3)(2{,}5ac - x^3)$.

597. Bizonyítsátok be az azonosságokat!

a) $(a - b)^2 = (b - a)^2$; b) $(-a - b)^2 = (a + b)^2$;
c) $(a + b)^2 - 2ab = a^2 + b^2$; d) $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$.

Adjátok meg az 598–599. háromtagokat kéttagok négyzeteinek alakjában!

598. a) $9 - 6x + x^2$; b) $4x^2 + 25y^2 - 20xy$;

c) $a^8 + 4a^4b + 4b^2$; d) $a^2b^2 + 36c^2 + 12abc$;
e) $16m^6 + 24m^3 - 9$; f) $40a^2b^2 - 4b^2 - 100a^4b^2$.

599. a) $9a^2 + 6ac + c^2$; b) $x^4 - 10x^2 + 25$;
c) $4m^2 + 4m + 1$; d) $b^4 - 6b^2 + 9$.

Egyszerűsítsétek a 600–601. kifejezéseket!

600. a) $(x - 3)^2 - x(x - 6)$; b) $(m + 5)^2 - (m - 5)$;
c) $1 - (2a - 1)^2$; d) $z^2 + 1 - (1 + z)^2$.

601. a) $(x - 2)^2 + (x - 5)(x + 7)$; b) $3(a - 1)^2 + 8a$;
c) $y(y + 2x) - (x + y)^2$; d) $(b + 4)^2 - (b - 3)^2$.

Oldjátok meg a 602–603. egyenletet!

602. a) $(x - 2)^2 = x^2$; b) $(3y + 5)^2 = 9y^2$;
c) $(c - 7)^2 = c^2 - 7$; d) $(6 - z)^2 = z^2 + 36$;
e) $3(x - 2)^2 = 3$; f) $(2x - 1)^2 + 2 = 0$.

603. a) $(x + 7)^2 + x^2 = 0$; b) $-3(x - 5)^2 = -3$;
c) $(x - 4)^2 = 8x + 16$; d) $(5 - y)^2 = 10y + 25$;
e) $(1 - 2z)^2 + 4z = 0$; f) $(3 - 5x)^2 = 25x^2$.

B szint

Adjátok meg többtag alakjában a 604–606. kifejezéseket!

604. a) $(x + 3y)^2$; b) $(m + 5ab)^2$; c) $(7 + a^2)^2$;
d) $(2x + y^3)^2$; e) $(3c^2 + y)^2$; f) $(5x^2 - y^3)^2$.

605. a) $(0{,}2c - p^3)^2$; b) $(1{,}2 + 2q^3)^2$; c) $(4x^2 - 3y^2)^2$;
d) $(a^2 - 8c^5)^2$; e) $(a^2 - c)^2$; f) $(-x + y^3)^2$.

606. a) $\left(-\frac{1}{2} - 2c^2\right)^2$; b) $\left(-0{,}3x^3 + \frac{1}{4}c\right)^2$;

c) $\left(-\frac{1}{5}c - 0{,}5a^2\right)^2$; d) $\left(\frac{2}{3}m^3 - 1\frac{1}{2}x\right)^2$.

607. Adjátok meg hatványként!

a) $x^2 + 12x + 36$; b) $121 - 22y + y^2$;
c) $9a^2 - 30ab + 25b^2$; d) $16m^2 + 16mn + 4n^2$;

e) $0{,}25x^2 - x + 1$; f) $\frac{1}{36}a^2 + ab + 9b^2$.

608. Helyettesítsétek a csillagokat egytagokkal oly módon, hogy az alábbi azonosságokat kapjátok!

a) $(* + b)^2 = c^2 + 2cb + b^2$; b) $(a + *)^2 = a^2 + 2am + *$;

c) $(3x - *)^2 = 9x^2 - * + 1$; d) $(* - 3bx)^2 = * - 6abx + *$.

609. Határozzátok meg az alábbi kifejezések értékét!

a) $(a - 5)^2 - a(a + 8)$, ha $a = 0{,}5$;

b) $(3c + 0{,}5)^2 - (3c - 0{,}5)^2$, ha $c = \frac{1}{9}$;

c) $(2x - 5)^2 - 4x^2 - 20x$, ha $x = 0{,}25$.

Egyszerűsítsétek a 610–611. kifejezéseket!

610. a) $(a + 5)^2 - (a - 3)(a + 3) + 10a$;

b) $(2c - 1)^2 - (2c + 7)(2c - 7) + 5c$;

c) $(3a - 2b)^2 - (2a - 3b)^2 + 5b^2$;

d) $(4a^2 + c)^2 + (a^2 - 4c)^2 - 17a^4$.

611. a) $3(2x - y)^2 - 2(3x - y)^2 + 6x^2$;

b) $1{,}5(ac - 2x^2)^2 - 2{,}5(x^2 - 2ac)^2$;

c) $11c^2 - (x^2 + 3c)^2 - (3x^2 - c)^2$;

d) $10 - \left(\frac{2}{3}az - 3\right)^2 + \left(3az - \frac{2}{3}\right)^2$.

612. Számítsátok ki az alábbi kifejezések értékét!

a) $(2a - 5)^2 - (2a - 5)(2a + 5)$, ha $a = 1{,}5$;

b) $(6x - 2)(6x + 2) - (6x - 2)^2$, ha $x = 0{,}5$;

c) $2(x - 1)^2 + 3(5 - x)^2 + 14x$, ha $x = 2$;

d) $0{,}5(2c - 3)^2 + 0{,}75(c + 4)^2$, ha $c = 2$.

613. Bizonyítsátok be az alábbi azonosságokat!

a) $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$;

b) $(2a + b)^2 + (a - 2b)^2 = 5(a^2 + b^2)$;

c) $(3a + b)^2 + (a - 3b)^2 = 10(a^2 + b^2)$.

614. Határozzátok meg a 614–616. egyenletek gyökeit!

a) $(x - 6)^2 = x(x - 8)$; b) $2(3 - x)^2 = x(2x + 6)$;

c) $(2x + 5)^2 = 4x^2 + 21$; d) $(1{,}2x - 1)^2 = 1{,}44x^2 - 1{,}4$;

e) $(3x + 8)^2 = (3x - 4)^2$; f) $(6x - 5)^2 = 9(2x + 1)^2$.

615. a) $(x - 5)^2 - x(x + 3) = 12$; b) $(3z + 1)^2 - 9z(z + 6) = -1$;
c) $(0{,}2y + 3)^2 - (0{,}2y - 3)^2 = 0{,}8$;
d) $\left(\frac{2}{3}x - 1\right)^2 = \left(\frac{1}{3}x + 1\right)\left(\frac{4}{3}x - 1\right)$.

616. a) $x^2 + 10x + 25 = 0$; b) $4x^2 - 12x + 9 = 0$;
c) $1 + 16x^2 - 8x^2 = 0$; d) $\frac{1}{4}x^2 + 1 + x = 0$;
e) $x - 9 - \frac{1}{36}x^2 = 0$; f) $2x + 25 + 0{,}04x^2 = 0$.

617. Számítsátok ki az alábbi példákat a kéttag négyzete képletének alkalmazásával!
a) 11^2; b) 99^2; c) 101^2; d) 202^2;
e) 52^2; f) 61^2; g) 79^2; h) 81^2.

618. Az a és b mely értékeinél igaz az $(a - b)^2 = (a + b)^2$ egyenlőség?

619. Mutassátok meg, hogy a elég kis értékeinél az $(1 + a)^2 \approx 1 + 2a$ közelítő egyenlőség igaz! A képlet felhasználásával határozzátok meg fejben az alábbi kifejezések értékeit!
a) $(1 + 0{,}001)^2$; b) $1{,}003^2$; c) $0{,}99^2$; d) $0{,}998^2$.

620*. Az $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ azonosság felhasználásával bizonyítsátok be, hogy:
a) két pozitív szám összegének négyzete nagyobb e két szám négyzetének összegénél;
b) két tetszőleges szám összegének négyzete nem kisebb e két szám kétszeres szorzatánál;
c) ha két szám összege osztható kettővel, akkor négyzeteik összege is osztható 2-vel;
d) ha két különböző természetes szám összegei egyenlők, akkor négyzeteik összege annál nagyobb lesz, minél kisebb a szorzatuk!

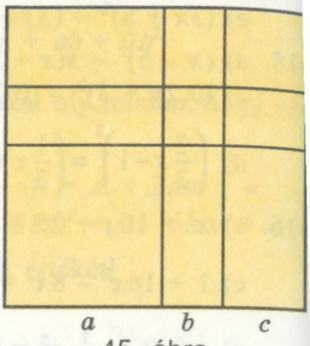
621. Bizonyítsátok be, hogy egy páratlan szám 1-gyel kisebbített négyzete osztható 8-cal!

622. Bizonyítsátok be, hogy egymást követő három egész szám összegének négyzete nem osztható 3-mal!

623. Bizonyítsátok be az $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ azonosságot két különböző módszerrel, és magyarázzátok meg a mértani értelmét a 45. ábra alapján!

624. Az előző feladatban szereplő azonosság felhasználásával írjátok le többtagok alakjában az alábbi kifejezéseket!

a) $(x - y + 5)^2$; b) $(x + 2y + 3z)^2$;
c) $(x + y^2 + z^3)^2$.



45. ábra

625. Adjátok meg többtagok alakjában!

a) $(x^n + 1)^2$; b) $(a^{2m} - 1)^2$;
c) $(a^n + a^m)^2$; d) $(x^{n-1} - x)^2$;
e) $\left(\frac{1}{2}\left(y^m + y^{2m}\right)\right)^2$; f) $\left(\frac{1}{4}\left(b^n - 2b^2\right)\right)^2$.

626. *Al-Karkhi-féle feladat* (XI. sz.). Ha $a = mn$, akkor mutassátok meg, hogy $\left(\frac{m-n}{2}\right)^2 + a$ és $\left(\frac{m+n}{2}\right)^2 - a$ mindig meghatározott kifejezések négyzetei!

627*. *Lagrange-feladat* (1736–1813). Ellenőrizzétek az alábbi azonosságot!

$$(A^2 + B^2 + C^2)(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2) - (A \cdot A_1 + B \cdot B_1 + C \cdot C_1)^2 =$$
$$= (A \cdot B_1 - A_1 B)^2 + (A \cdot C_1 - A_1 C)^2 + (B \cdot C_1 - B_1 \cdot C)^2.$$

628. Bizonyítsátok be a kéttag köbének képletét!

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3.$$

A képlet felhasználásával emeljétek köbre a kéttagokat!

a) $x + 3$; b) $4a + c$; c) $1 - ax$;
d) $m^2 + 2ac$; e) $x - y$; f) $\frac{1}{3}c - x^2$.

629. Adjátok meg többtagok alakjában a kifejezéseket!

a) $(x + 2)^3$; b) $(y - 2)^3$; c) $(2x - 1)^3$;
d) $(3x + 1)^3$; e) $(m - 2n)^3$; f) $(2a + 3)^3$.

630. Adjátok meg hatványként a többtagokat!

a) $a^3 - 3a^2 + 3a - 1$; b) $8y^3 - 36y^2 + 54y - 27$;
c) $27x^3 + 108x^2 + 144x + 64$;
d) $a^9 - 15a^6 b + 75a^3 b^2 - 125b^3$.

631. Bizonyítsátok be az azonosságokat!

a) $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$;

b) $(a - b)^3 = a^3 - b^3 + 3ab(a - b)$.

632. Bizonyítsátok be, hogy ha két természetes szám összege (különbsége) osztható 3-mal, akkor köbeik összege (különbsége) is osztható 3-mal!

633*. Bizonyítsátok be, hogy három egymást követő természetes szám köbeinek összege osztható 3-mal!

634. Adjátok meg többtagok alakjában a kifejezéseket!

a) $(2a + 3c)^3$; b) $(ab + 0{,}1c)^3$; c) $(0{,}2c^3 - 1)^3$;

d) $\left(\frac{1}{2}a^2 + 2c\right)^3$; e) $\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y^2\right)^3$; f) $(-ab^2c^3 - a^2)^3$.

Oldjátok meg a 635–636. egyenleteket!

635*. a) $(x - 1)^3 = x^2(x - 3)$;

b) $(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 2$.

636*. a) $(x - 2)^3 + 6x^2 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$;

b) $(x + 2)^3 - 6x^2 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$.

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

637. Számítsátok ki a 637–638. többtagok összegét!

a) $3a^2 + 2a + 7$ és $a^3 + a - 3$;

b) $1{,}5x - x^2 - x^3$ és $2{,}5x^4 - 1{,}5x^3 - 2x + 3$.

638. a) $2ac^2 - 3a^3 - c^2$ és $3a^2c - 3c^3 - a^3 - 2ac^2$;

b) $7{,}3 + 1{,}8x - x^3$ és $4x^3 - x^2 - 2{,}8x - 5{,}3$.

639. Mi a valószínűsége annak, hogy a dobókocka leesésekor felül: a) páros számú pontok lesznek; b) páratlan számú pontok lesznek; c) a pontok száma 3 többszöröse lesz; d) a pontok száma 5 többszöröse lesz?

640. A v km/h sebességgel haladó gépkocsi t óra alatt 300 km-t tett meg. Fejezzétek ki képlettel a v és t közötti összefüggést! Hogyan változik v értéke, ha t értékét kétszeresére, háromszorosára, négyszeresére növelik?

17. §. A NÉGYZETEK KÜLÖNBSÉGE



Szorozzuk össze az a és b változók összegét a különbségükkel!

$$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2.$$

Tehát $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

Ez az egyenlőség – azonosság. Szavakba foglalva így fogalmazható meg:

Két kifejezés összegének és különbségének szorzata egyenlő e kifejezések négyzetének különbségével.

A levezetett képlet alapján a következő egyszerűsítések könnyen elvégezhetők:

$$(2a + 3c)(2a - 3c) = 4a^2 - 9c^2,$$
$$(1 - ax)(1 + ax) = 1 - a^2x^2.$$

A levezetett képlet bal és jobb oldalát felcserélhetjük. Ekkor a *két négyzet különbségének* képletét kapjuk:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

Két kifejezés négyzetének különbsége a kifejezések összegének és különbségének szorzatával egyenlő.

Példák.

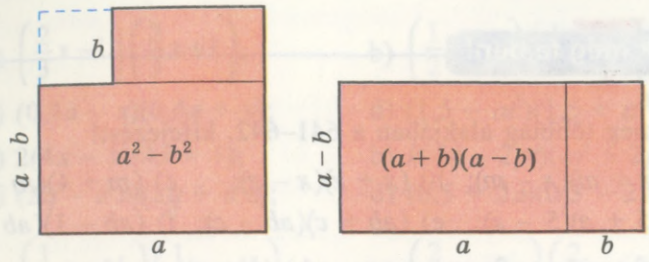
$$x^2 - 16 = x^2 - 4^2 = (x + 4)(x - 4),$$
$$25a^2 - c^4 = (5a)^2 - (c^2)^2 = (5a + c^2)(5a - c^2).$$

A négyzetek különbségének képlete elég jól alkalmazható többtagok tényezőkre bontásához.

Szeretnétek többet megtudni?

Az a és b pozitív számok esetében az $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ képlet mértanilag bizonyítható a 46. ábrán látható módon. Azonban ez az azonosság nem csak pozitív számokra, hanem bármilyen más számokra és kifejezésekre igaz.

A négyzetek különbsége képletének helytállósága a többtagok szorzásának szabályából fakad, ez a szabály pedig az összeadás és szorzás műveleti törvényeiből. Vagyis a számok összeadásának és szorzásának a törvényei sajátságos saroktételek (axiómák), amelyeknek algebraikus azonosságok a következményei.



46. ábra

Ellenőrizzétek magatokat!

1. Mivel egyenlő két kifejezés összegének és különbségének szorzata?
2. Mivel egyenlő két kifejezés négyzeteinek a különbsége?
3. Behelyettesíthetők-e a négyzetek különbségének képletében a változók bármilyen számokkal, egytagokkal vagy többtagokkal?
4. Felbontható-e tényezőkre valamennyi két tagból álló kifejezés négyzetének különbsége?

Oldjuk meg együtt!

1. Írjátok le a $2a$ és $x - 1$ kifejezések négyzeteinek különbségét és különbségük négyzetét!

✔ M e g o l d á s. $(2a)^2 - (x - 1)^2$ – a négyzetek különbsége; $(2a - x + 1)^2$ – az adott kifejezések különbségének négyzete.

2. Írjátok le két kéttag szorzatainak alakjában a kifejezéseket!

a) $a^2 - 4n^2$; b) $9 - 25x^2$; c) $1 - 16a^2c^4$.

✔ M e g o l d á s. a) $a^2 - 4n^2 = a^2 - (2n)^2 = (a - 2n)(a + 2n)$;

b) $9 - 25x^2 = 3^2 - (5x)^2 = (3 - 5x)(3 + 5x)$;

c) $1 - 16a^2c^4 = 1^2 - (4ac^2)^2 = (1 - 4ac^2)(1 + 4ac^2)$.

3. Adjátok meg kéttagok alakjában a kifejezéseket!

a) $(x + 2y)(x - 2y)$; b) $(3xy - 1)(3xy + 1)$;

c) $2{,}5a^3 + 4mn)(2{,}5a^3 - 4mn)$.

✔ M e g o l d á s. a) $(x + 2y)(x - 2y) = x^2 - (2y)^2 = x^2 - 4y^2$;

b) $(3xy - 1)(3xy + 1) = (3xy)^2 - 1^2 = 9x^2y^2 - 1$;

c) $(2{,}5a^3 + 4mn)(2{,}5a^3 - 4mn) = (2{,}5a^3)^2 - (4mn)^2 =$

$= 6{,}25a^6 - 16m^2n^2$.

A négyzetek különbségének képletét felhasználva fejben is elvégezhetitek a közbülső számításokat és átalakításokat, s csak a végeredményt írjátok le.

Oldjátok meg fejben!

Adjátok meg többtag alakjában a 641–642. kifejezést!

641. a) $(x + m)(x - m)$; b) $(x + z)(x - z)$; c) $(m + 4)(m - 4)$;
d) $(5 + a)(5 - a)$; e) $(ab + c)(ab - c)$; f) $(ab - 1)(ab + 1)$.

642. a) $(x - c)(x + c)$; b) $(a + x)(x - a)$;
c) $(2a - y)(2a + y)$; d) $(z - 3x)(z + 3x)$;
e) $(4a - 5b)(4a + 5b)$; f) $(7c - xy)(7c + 2xy)$.

643. Milyen kifejezéssel kell megszorozni a $6x - p$ kéttagot, hogy $36x^2 - p^2$-et kapjatok?

644. Milyen kifejezéssel kell megszorozni az $1 + 9a^2$ kéttagot, hogy $1 - 81a^4$-t kapjatok?

645. Bontsátok tényezőkre a kéttagokat!
a) $25 - x^2$; b) $a^2 - 1$; c) $m^2 - 4n^2$;
d) $100a^2 - 9b^2$; e) $1{,}44x^2 - 0{,}01y^2$; f) $\frac{25}{36} - \frac{n^2}{4}$.

A szint

646. Adva vannak a $2a$ és $5x^3$ kifejezések. Írjátok le: a) négyzeteik különbségét; b) különbségük négyzetét; c) négyzeteik összegét; d) összegük négyzetét!

647. Írjátok le a $2ab$ és $a - b$ kifejezések négyzeteinek különbségét és különbségük négyzetét!

Adjátok meg többtag alakjában a 648–654. kifejezéseket!

648. a) $(4a + 1)(4a - 1)$; b) $(2a - c)(2a + c)$;
c) $(2d + x)(2d - x)$; d) $(a - c^2)(a + c^2)$;
e) $(8x - y^2)(y^2 + 8x)$; f) $(2a^2 + 3b)(2a^2 - 3b)$.

649. a) $(3p - q)(q + 3p)$; b) $(m - 4c^2)(m + 4c^2)$;
c) $(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)$; d) $(n^2 - n^2)(n^2 + n^2)$;
e) $(4a - b^3)(4a + b^3)$; f) $(5 + abc)(5 - abc)$.

650. a) $\left(\frac{2}{3}x-1\right)\left(\frac{2}{3}x+1\right)$; b) $\left(\frac{1}{2}c-p\right)\left(\frac{1}{2}c+p\right)$;

c) $(0{,}4a - x)(0{,}4a + x)$; d) $(1{,}5 - m^2)(1{,}5 + m^2)$.

651. a) $2(4x - 1)(4x + 1)$; b) $k(m^2 - 2pt)(m^2 + 2pt)$;

c) $(2q - c^3n)(2q + c^3n)$; d) $(0{,}5 + 2a)(0{,}5 - 2a) \cdot 2c^2$.

652. a) $\left(\frac{1}{4}a+4b\right)\left(\frac{1}{4}a-4b\right) \cdot 4a$; b) $\left(\frac{2}{5}m-2n\right)\left(\frac{2}{5}m+2n\right) \cdot 5m$;

c) $7a^2 (1 + 3a^2b)(1 - 3a^2b)$; d) $-cq(c + 2q)(c - 2q)$.

653. a) $(a - 2b)(a + 2b) + 4b^2$; b) $(m^2 + 3y)(m^2 - 3y) - m^4$;

c) $c^2 - (c - 1)(c + 1)$; d) $\left(a-\frac{1}{3}c^2\right)\left(a+\frac{1}{3}c^2\right) + \frac{2}{3}c^4$.

654. a) $(x - 3)(x + 3)(x^2 + 9)$; b) $(m + 5)(m - 5)(m^2 + 25)$;

c) $(4a^2 + 1)(2a + 1)(2a - 1)$; d) $(9y^2 - z^2)(z + 3y)(3y - z)$.

655. Szorozzátok össze a kifejezéseket!

a) $-x - y$ és $-x + y$; b) $-1 + 3a$ és $-1 - 3a$;

c) $-2a + 3b$ és $-2a - 3b$; d) $-c - 7$ és $7 - c$;

e) $-0{,}5 - 2x^4$ és $-0{,}5 + 2x^4$; f) $3{,}5 - xy$ és $-xy - 3{,}5$.

656. Helyettesítsétek be a csillagokat egytagokkal, hogy az alábbi azonosságokat kapjátok!

a) $(5m - *)(5m + *) = 25m^2 - 9a^2b^2$;

b) $(4a - *)(* + 3x^2) = 16a^2 - 9x^4$.

657. Adjátok meg szorzatok alakjában!

a) $x^2 - m^2$; b) $a^2 - 9$; c) $b^2 - c^4$; d) $1 - 16z^2$;

e) $q^2 - p^2n^2$; f) $0{,}04 - x^2$; g) $\frac{1}{4}a^2 - m^4$; h) $-c^4 + 9a^2$.

658. Számítsátok ki!

a) $35^2 - 15^2$; b) $43^2 - 27^2$; c) $136^2 - 64^2$;

d) $51{,}5^2 - 49{,}5^2$; e) $21{,}3^2 - 1{,}3^2$; f) $\left(3\frac{2}{3}\right)^2 - \left(1\frac{1}{3}\right)^2$.

659. Számítsátok ki zsebszámológép nélkül!

a) $104 \cdot 96$; b) $1007 \cdot 993$; c) $0{,}95 \cdot 1{,}05$.

B szint

Írjátok le a 660–662. többtagok alakjában!

660. a) $(2abc - 3a^2)(2abc + 3a^2)$; b) $(5x^3 - 3abc)(5x^3 + 3abc)$;
c) $(4ab^2 + 5ac)(4ab^2 - 5ac)$; d) $(8xz^3 + 3z^2)(3z^2 - 8xz^3)$.

661. a) $(0{,}2ax - 1{,}2ay)(0{,}2ax + 1{,}2ay)$;
b) $(-3a + 5x^2y)(3a + 5x^2y)$;
c) $\left(\frac{1}{2}ax - \frac{2}{3}az^2\right)\left(\frac{1}{2}ax + \frac{2}{3}az^2\right)$;
d) $\left(1\frac{1}{2}a - 2\frac{1}{3}c\right)\left(1\frac{1}{2}a + 2\frac{1}{3}c\right)$.

662. a) $(-3x + y^2)(-3x - y^2)$; b) $(-0{,}5ac + 1{,}1c^2)(-0{,}5ac - 1{,}1c^2)$;
c) $(-2ax^2 - 3a^2x)(-2ax^2 + 3a^2 + x)$;
d) $\left(-1\frac{1}{2}ac - \frac{1}{3}a^2\right)\left(-1\frac{1}{2}ac + \frac{1}{3}a^2\right)$.

Egyszerűsítsétek a 663–665. kifejezéseket!

663. a) $(0{,}5a - 0{,}4b)(0{,}5a - 0{,}4b) \cdot 2ab$;
b) $10x^2y(0{,}2x + 2y)(-0{,}2x + 2y)$;
c) $\left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y\right)\left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y\right) \cdot (-9xy)$;
d) $\left(1\frac{1}{2}a^2b + 1\right)\left(1 - 1\frac{1}{2}a^2b\right) \cdot (-4b)$.

664. a) $(a - 2)(a + 2)(a^2 + 4)$; b) $(ab - c)(ab + c)(a^2b^2 + c^2)$;
c) $(3x^2 + y)(3x^2 - y)(9x^4 + y^2)$;
d) $(16a^4c^2 + 9x^6)(4a^2c - 3x^3)(4a^2c + 3x^3)$.

665. a) $(2x^2 - 1)(2x^2 + 1)(4x^4 + 1) + 1$;
b) $(0{,}1 - 2c)(0{,}1 + 2c)(0{,}01 + 4c^2) + 16c^4$;
c) $16a^4 - (2a - c^2)(2a + c^2)(4a^2 + c^4)$;
d) $\frac{1}{16} - \left(\frac{1}{2} - 3a^2b\right)\left(\frac{1}{2} + 3a^2b\right)\left(\frac{1}{4} + 9a^4b^2\right)$.

666. Milyen kifejezéssel kell megszorozni a $2a^4x^2 + b^3$ összeget, hogy a $4a^8x^4 - b^6$ különbséget kapjuk?

667. Milyen kifejezéssel kell megszorozni a $0{,}1x^2y - 2xy^2$ különbséget, hogy a $0{,}01x^4y^2 - 4x^2y^4$ különbséget kapjuk?

668. Bontsátok tényezőkre a kéttagokat!

a) $0{,}04x^6 - 1$; b) $-x^2y^4 + a^6b^8$; c) $a^2b^2c^2 - 121x^6$;
d) $\frac{4}{81}z^{10} - x^{16}$; e) $-64 + 36m^4n^2$; f) $a^2 - (b + c)^2$.

669. Bizonyítsátok be!

a) $60^2 + 899^2 = 901^2$; b) $65^2 + 2112^2 = 2113^2$.

670. Bizonyítsátok be!

a) $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$;
b) $21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2$.

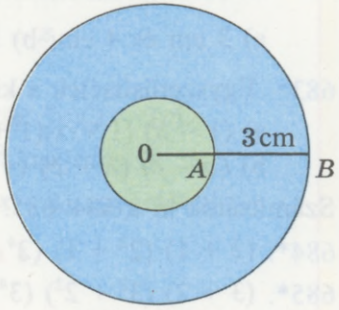
671. Igaz-e az egyenlőség?

$36^2 + 37^2 + 38^2 + 39^2 + 40^2 = 41^2 + 42^2 + 43^2$.

672. Bizonyítsátok be, hogy n minden természetes értékénél:

a) az $(n + 5)^2 - n^2$ szám osztható 5-tel;
b) az $(n + 7)^2 - n^2$ szám osztható 7-tel;
c) a $(6n + 1)^2 - 1$ szám osztható 12-vel!

673. A 47. ábrán látható gyűrű területe 18,84 cm^2. Határozzátok meg külső és belső sugarát, ha azok különbsége 3 cm!



47. ábra

Oldjátok meg a 674–675. egyenleteket!

674. a) $(x - 2)(x + 2) = x^2 + 8x$;
b) $(3 + c)(3 - c) = 3c - c^2$;
c) $-x^2 + (x + 5)(x - 5) = x$;
d) $(y + 4)(y - 4) - y^2 = 18y$.

675. a) $(9 - x)(x + 9) = -x^2 + 3x$; b) $z^2 = 2z - (z + 3)(3 - z)$;
c) $4x^2 + (3 - 2x)(3 + 2x) = 81x$;
d) $9b^2 - (2 - 3b)(2 + 3b) = -4$.

676. Bizonyítsátok be a Platón-féle azonosságot (Kr. e. IV. sz.)!

$(p^2 + 1)^2 - (p^2 - 1)^2 = 4p^2$.

677. Bizonyítsátok be a Pithagorasz-féle azonosságot (Kr. e. VI. sz.)!

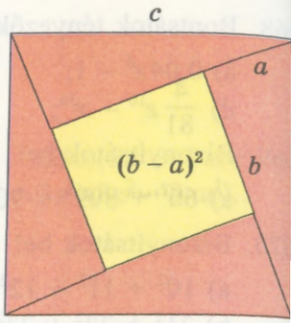
$(2a^2 + 2a + 1)^2 - (2a^2 + 2a)^2 = (2a + 1)^2$.

678. Bizonyítsátok be, hogy minden 1-nél nagyobb páratlan természetes szám két egymás utáni természetes szám négyzeteinek különbsége!

679. Bizonyítsátok be, hogy két egymás utáni természetes szám összege négyzeteik különbségével egyenlő!

680. Bizonyítsátok be, hogy minden páros természetes szám négyzete két egész szám négyzeteinek a különbségével egyenlő!

681. A 48. ábra és a különbség négyzete képletének felhasználásával bizonyítsátok be, hogy mindegyik derékszögű háromszögben a befogók négyzetének összege az átfogó négyzetével egyenlő (Pitagorasz tétele)!



48. ábra

682. Az előző feladat felhasználásával határozzátok meg annak a derékszögű háromszögnek az átfogóját, amelynek a befogói:

a) 3 cm és 4 cm; b) 5 m és 12 m; c) 7 dm és 24 dm!

683*. Egyszerűsítsétek a kifejezéseket!

a) $(1 - x)(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8)(1 + x^{16})$;

b) $(a - b)(a + b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4)(a^8 + b^8)(a^{16} + b^{16})$.

Számítsátok ki a 684–685. példákat!

684*. $(2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1) - 2^{32}$;

685*. $(3 + 2)(3^2 + 2^2)(3^4 + 2^4)(3^8 + 2^8)(3^{16} + 2^{16}) - 3^{32} + 2^{32}$.

Oldjátok meg a 686–689. egyenleteket!

686. a) $(2x - 1)(2x + 1) = 9 + 4x(x + 5)$;

b) $(3z + 2)(3z - 2) = 7z + 9(z^2 - 2)$.

687. $8z^2 - (3z + 5)(3z - 5) = z(5 - z)$.

688. $x^2 - (1{,}2x - 3)(3 + 1{,}2x) = 0{,}2x(1{,}5 - 2{,}2x)$.

689. $(2{,}5y - 2)(2{,}5y + 2) - (1{,}5y + 3)(1{,}5y - 3) = 4x(x - 5)$.

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

690. Azonosak-e a kifejezések?

a) $x + 2x$ és $3x$; b) $7a^2 - a^2$ és $6a^2$; c) $3a + a^2$ és $4a^3$.

691. Határozzátok meg két mellékszög méretét, ha egyikük 40°-kal nagyobb a másiknál!

692. Határozzátok meg két mellékszög méretét, ha egyikük 20%-kal kisebb a másiknál!

ÖNÁLLÓ MUNKA

I. változat

1°. Emeljük négyzetre a kéttagokat!

a) $x + 3$; b) $a^2 - c$.

2°. Adjuk meg többtag alakjában!

a) $(ax + b^2)^2$; b) $(1 + 2c^3)(1 - 2c^3)$.

3•. Egyszerűsítsük a $12ab - (2a + 3b)^2$ kifejezést!

4•. Oldjuk meg az $(x - 3)^2 = (x - 5)(x + 4)$ egyenletet!

II. változat

1°. Emeljük négyzetre a kéttagokat!

a) $m - 5$; b) $x^2 - z$.

2°. Adjuk meg többtag alakjában!

a) $(cx + 2b)^2$; b) $(2 + 3c)(2 - 3c)$.

3•. Egyszerűsítsük a $30xc - (3x + 5c)^2$ kifejezést!

4•. Oldjuk meg az $(x - 2)^2 = (x + 3)(x - 4)$ egyenletet!

III. változat

1°. Emeljük négyzetre a kéttagokat!

a) $3 - y$; b) $a - x^3$.

2°. Adjuk meg többtagok alakjában!

a) $(2x + ab)^2$; b) $(1 + 4a)(1 - 4a)$.

3•. Egyszerűsítsük a $24ma - (4m + 3a)^2$ kifejezést!

4•. Oldjuk meg az $(x + 2)^2 = (x - 1)(x + 4)$ egyenletet!

IV. változat

1°. Emeljük négyzetre a kéttagokat!

a) $7 - a$; b) $t^2 - a$.

2°. Adjuk meg többtag alakjában!

a) $(3c - xy)^2$; b) $(3 + 5a)(3 - 5a)$.

3•. Egyszerűsítsük a $9a^2b^2 - (2 - 3ab)^2$ kifejezést!

4•. Oldjuk meg az $(x - 4)^2 = (x - 5)(x + 2)$ egyenletet!

FELKÉSZÜLÉS A TEMATIKUS ÉRTÉKELÉSRE

4. sz. tesztfeladatok

1. Határozzátok meg a $6cx - 9cy$ többtag közös tényezőjét!

a) $6c$; b) $3x$; c) $3c$; d) $6x$.

2. Az alábbi kifejezések közül melyik két kifejezés négyzetének különbsége?

a) $x^2 - y^2$; b) $(x - y)^2$; c) $2(x - y)$; d) $x - y$.

3. Az alábbi kifejezések közül melyik két kifejezés összegének köbe?

a) $(a + b)^3$; b) $3(a + b)$; c) $a^3 + b^3$; d) $a + b$.

4. Emeljétek $(a + 2b)^2$ hatványra!

a) $a^2 + 4b^2$; b) $a^2 + 4ab + 4b^2$;
c) $a^2 + 4ab + 2b^2$; d) $a^2 + 2ab + 2b^2$.

5. Adjátok meg az $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ kifejezést hatványként!

a) $(x + 3)^3$; b) $(x - 3)^3$; c) $(x + 1)^3$; d) $(x - 1)^3$.

6. Fejezzétek ki kéttag négyzetének alakjában a $0{,}25x^2 + y^2 - xy$ kifejezést!

a) $(y + 0{,}5x)^2$; b) $(y - 0{,}5x)^2$;
c) $0{,}25(2y - x)^2$; d) $0{,}5^2(2x - y)$.

7. Milyen számtényező vihető ki a zárójel elé a $60x^2 + 30x + 45$ kifejezésben?

a) 9; b) 10; c) 15; d) 20.

8. Milyen számmal kell helyettesíteni a $*$ jelet, hogy a $(6x - 8)^2 = * (3x - 4)^2$ egyenlőség azonosság legyen?

a) 6; b) 8; c) 4; d) 2.

9. Milyen kifejezéssel kell megszorozni a $2a^4 + b^3$ összeget, hogy $4a^8 - b^6$ különbséget kapjunk?

a) $2a^4b^3$; b) $2a^4 - b^3$; c) $2a^2b^2$; d) $2a^4 + b^3$.

10. Oldjátok meg az $x^2 - 16x + 64 = 0$ egyenletet!

a) $x = 8$; b) $x = -8$; c) $x = 16$; d) $x = -16$.

A 4. sz. dolgozat típusfeladatai

1°. Vigyétek ki a közös tényezőt a zárójel elé!

a) $12a^3 - 18a^2$; b) $60a^4b^5 + 36a^3b^6 - 48a^3b^2$.

2°. Bontsátok tényezőkre a kifejezéseket!

a) $5a + 5b + ab + b^2$; b) $x - 3xy - 21y + 7$.

3°. Adjátok meg a többtagokat hatványokként!

a) $x^2 - 8x + 16$; b) $9x^2 + 6x + 1$.

4°. Adjátok meg a többtagokat szorzatok alakjában!

a) $2ab + 2ac + xc + xb + 5c + 5b$;

b) $16x^2 - 25$; c) $(3a + 2)^2 - 36a^2$.

5•. Számítsátok ki a kifejezések értékeit!

$2xy - 2x + 4y - x^2$, ha $y = 2{,}55$; $x = 5{,}1$.

6•. Adjátok meg a $27x^3 + 108x^2 + 144x + 64$ többtagot hatványként!

7•. Oldjátok meg az egyenleteket!

a) $9x^2 + 6x + 1 = 0$; b) $48x^3 + 12x = 0$.

8•. Bizonyítsátok be!

$13 \cdot 3^8 + 12 \cdot 3^7 + 45 \cdot 3^6 - 54 \cdot 3^5$ osztható 270-nel.

9••. Bizonyítsátok be, hogy két egymást követő páratlan szám négyzeteinek a különbsége mindig osztható 8-cal!

10••. Számítsátok ki!

$(6 + 1)(6^2 + 1)(6^4 + 1)(6^8 + 1)(6^{16} + 1) - 0{,}2 \cdot 6^{32}$.

18.§. A RÖVIDÍTETT SZORZÁS KÉPLETEINEK ALKALMAZÁSA



A többtagok egy része a rövidített szorzás képleteinek segítségével tényezőkre bontható. Például az $x^2 - a^2$ kéttag a *négyzetek különbségének képletével* alakítható szorzattá:

$$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a).$$

Példák.

$$x^4 - 4 = (x^2)^2 - 2^2 = (x^2 + 2)(x^2 - 2);$$

$$4a^2x^6 - 1 = (2ax^3)^2 - 1 = (2ax^3 + 1)(2ax^3 - 1);$$

$$0{,}04c^2 - \frac{1}{4}n^2 = (0{,}2c)^2 - \left(\frac{1}{2}n\right)^2 = \left(0{,}2c + \frac{1}{2}n\right)\left(0{,}2c - \frac{1}{2}n\right).$$

Az $x^2 + 2xy + y^2$ és $x^2 - 2xy + y^2$ háromtagokat a *kéttag négyzetének* képlete szerint bontjuk tényezőkre:

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2 = (x + y)(x + y),$$
$$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 = (x - y)(x - y).$$

Példák.

$$36 + 12x^2 + x^4 = 6^2 + 2 \cdot 6 \cdot x^2 + (x^2)^2 = (6 + x^2)^2;$$
$$a^2c^4 - 2ac^2x + x^2 = (ac^2)^2 - 2ac^2x + x^2 = (ac^2 - x)^2.$$

A tényezőkre bontott kapott kifejezések a következőképpen írhatók le: $(6 + x^2)(6 + x^2)$, $(ac^2 - x)(ac^2 - x)$.

Az $a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ többtagot a *kéttag köbének képlete* szerint bontjuk tényezőkre:

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b);$$
$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3 = (a - b)(a - b)(a - b).$$

Szeretnétek többet megtudni?

Nem csak többtagok bonthatók tényezőkre, hanem néhány más kifejezés is.

Például az $(x-3)^2 - a^4$ és $(a-1)^2 + 2(a-1)x + x^2$ nem többtagok, de megadhatók többtag szorzatának alakjában:

$$(x-3)^2 - a^4 = (x-3+a^2)(x-3-a^2);$$
$$(a-1)^2 + 2(a-1)x + x^2 = ((a-1)+x)^2 = (a-1+x)^2.$$

Ellenőrizzétek magatokat!

1. Mivel egyenlő két kifejezés négyzetének különbsége?
2. Mivel egyenlő két kifejezés különbségének négyzete?
3. Milyen tényezőkre bontható az $a^2 + 2ac + c^2$ kifejezés?
4. Milyen tényezőkre bontható az $a^2 - 2ac + c^2$ kifejezés?
5. Milyen tényezőkre bontható az $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ kifejezés?

Oldjuk meg együtt!

1. Bontsuk tényezőkre a többtagokat!

a) $3x^2 + 6x + 3$; b) $20c^4 - 45a^2c^2$.

✔ M e g o l d á s. a) $3x^2 + 6x + 3 = 3(x^2 + 2x + 1) = 3(x+1)^2$;

b) $20c^4 - 45a^2c^2 = 5c^2(4c^2 - 9a^2) = 5c^2(2c + 3a)(2c - 3a)$.

2. Oldjuk meg az $x^2 - 4x + 4 = 0$ egyenletet!

✔ M e g o l d á s. $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$.

Tehát az adott egyenlet az alábbival egyenértékű:

$$(x-2)^2 = 0.$$

A szám négyzete csak akkor lesz nullával egyenlő, ha a szám is 0-val egyenlő. De $x - 2 = 0$, amikor $x = 2$.

F e l e l e t. $x = 2$.

3. Bontsuk tényezőkre a többtagokat!

a) $8x^6 + 60x^4y^2 + 150x^2y^4 + 125y^6$;

b) $1 - 0{,}6c + 0{,}12c^2 - 0{,}008c^3$.

✔ Megoldás. a) $8x^6 + 60x^4y^2 + 150x^2y^4 + 125y^6 =$
$= (2x^2)^3 + 3 \cdot (2x^2)^2 \cdot 5y^2 + 3 \cdot 2x^2 \cdot (5y^2)^2 + (5y^2)^3 =$
$= (2x^2 + 5y^2)^3 = (2x^2 + 5y^2)(2x^2 + 5y^2)(2x^2 + 5y^2)$;
b) $1 - 0{,}6c + 0{,}12c^2 - 0{,}008c^3 =$
$= 1^3 - 3 \cdot 1^2 \cdot 0{,}2c + 3 \cdot 1 \cdot (0{,}2c)^2 - (0{,}2c)^3 =$
$= (1 - 0{,}2c)^3 = (1 - 0{,}2c)(1 - 0{,}2c)(1 - 0{,}2c)$.

Oldjátok meg fejben!

693. Bontsátok a táblázatban lévő többtagokat tényezőkre!

	A	B	C
1	$a^2 - 1$	$a + 2a + 1$	$1 + 2x + x^2$
2	$x^2 - 4$	$x^2 - 2x + 1$	$1 - 2c + c^2$
3	$4c^2 - 1$	$m^2 - 2m + 1$	$x^2 + y^2 + 2xy$
4	$9x^2 - c^2$	$a^2 - 2am + m^2$	$x^2 + a^2 - 2ax$

A szint

Bontsátok tényezőkre a 694–705. kifejezéseket!

694. a) $p^2 - q^2$; b) $x^2 - 16$; c) $x^2 - 9y^2$;
d) $p^2 - x^4$; e) $a^2 - c^2x^2$; f) $9a^2 - 4b^2$.

695. a) $1 - p^4$; b) $25 - c^6$; c) $0{,}01 - x^2$;
d) $\frac{1}{4} - \frac{1}{9}c^2$; e) $-c^2 + 16$; f) $-1 + a^2b^4c^6$.

696. a) $9m^2 - 4x^2$; b) $49c^2 - x^4$; c) $x^4 - 4c^4$;
d) $0{,}01x^2 - x^6$; e) $a^6 - 0{,}04c^4$; f) $1 - a^2b^4c^6$.

697. a) $x^2 + 10x + 25$; b) $x^2 - 10x + 25$;
c) $a^2 - 8ax + 16x^2$; d) $c^2 + 8cx + 16x^2$.

698. a) $a^2 + 2am + m^2$; b) $x^2 + 4x + 4$;
c) $a^2 + 4ab + 4b^2$; d) $b^2 - 6b + 9$.

699. a) $1 + 6x + 9x^2$; b) $1 + x + \frac{1}{4}x^2$;
c) $3a^2 - 6ab + 3b^2$; d) $-x^2 + 2x - 1$.

700. a) $-4c^2 - 4c - 1$; b) $a + 2ax + ax^2$;
c) $4c - c^2 - 4$; d) $\frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}$.

701. a) $(2a - 1)^2 - 100$; b) $1 - (a - b)^2$;
c) $(x + c)^2 - 9x^2c^4$; d) $(1 - x^2)^2 - 4x^2$.

702. a) $(3x - 5)^2 - 49x^2$; b) $4 - (7y - 5)^2$;
c) $(0{,}5 - 3a)^2 - 16a^4$; d) $64n^2 - (1{,}5 - 2n)^2$.

703. a) $(3x - 2)^2 - 9$; b) $64 - (a - 4)^2$;
c) $16x^2 - (5x + 1)^2$; d) $36x^2 - (3 - 2x)^2$;
e) $4(a + 2b)^2 - (a - 2b)^2$; f) $(3x + y)^2 - 9(3x - y)^2$.

704. a) $(5a + 7)^2 - (3a + 6)^2$; b) $(12n - 1)^2 - (3 - 5n)^2$;
c) $(0{,}3x^2 - x + 2)^2 - 0{,}09x^4$; d) $9(4ab^2 - c)^2 - (2ab^2 + c)^2$.

705. a) $(3 + a)^2 + 2(3 + a) + 1$; b) $(5x - 7)^2 - 2(5x - 7) + 1$;
c) $(x^2 - 4)^2 - 6(x^2 - 4) + 9$; d) $4(a - 2c)^2 - 4(a - 2c) + 1$.

706. Adjátok meg a kifejezést három tényező szorzataként!
a) $81a^4 - 1$; b) $a(a^2 - x^2) + 2(x^2 - a^2)$.

707. Bontsátok tényezőkre az alábbi kifejezéseket!
a) $3a^2 - 3$; b) $7x^2 - 28$; c) $5x^2 - 20$;
d) $0{,}5 - 0{,}5c^2$; e) $a^2n^2 - n^2$; f) $a^4 - c^4$.

Oldjátok meg a 708–711. egyenleteket!

708. a) $x^2 - 9 = 0$; b) $25y^2 - 4 = 0$;
c) $\frac{1}{4}z^2 - 25 = 0$; d) $\frac{36}{49} - a^2 = 0$.

709. a) $x^2 - 6x + 9 = 0$; b) $z^2 + 4z + 4 = 0$;
c) $5(y^2 - 8y + 16) = 0$; d) $\frac{1}{3}\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) = 0$.

710. a) $c^2 + 9 = 6c$; b) $y^2 + 4 = 4y$;
c) $2x^2 - 2 - 4x = 0$; d) $x - 1 = 0{,}25x^2$.

711. a) $3x^2 + 2x + \frac{1}{3} = 0$; b) $4x^2 + 9 = 6x$;
c) $2y^2 + 2y + 0{,}5 = 0$; d) $4x^2 + 0{,}25 = 2x$.

B szint

Bontsátok tényezőkre a 712–713. példákat!

712. a) $x^2y^2 - 81$; b) $0{,}04m^2 - n^4$; c) $\frac{1}{9}p^6 - 16a^2$;
d) $-a^8y^6 + 0{,}0001$; e) $0{,}0144 - x^2y^{10}$; f) $-1 + a^{10}b^8c^4$.

713. a) $1 - (a + b + c)^2$; b) $(2x + y - 3)^2 - 4y^2$;
c) $(5a^2 - a + 3)^2 - 25a^4$; d) $(x^2 - 3x + 1)^2 - 9x^2$.

Bontsátok tényezőkre a 714–715. kifejezéseket!

714. a) $a^4 - 2a^2n + n^2$; b) $a^2 + 2an^2 + n^4$;
c) $c^8 - 6c^4y^3 + 9y^6$; d) $9c^8 + 6c^4x^3 + x^6$.

715. a) $(2n + 3)^2 - (n - 1)^2$; b) $(3a + 2p)^2 - (a + p)^2$;
c) $4(x - y)^2 - (x + y)^2$; d) $9(p + q)^2 - (p - q)^2$;
e) $(x - 2)^2 + 2(x - 2) + 1$; f) $(3c + 2)^2 - 4(3c + 2) + 4$.

716. Adjátok meg a kifejezéseket négy tényező szorzataként!
a) $x^5 - x^4 - x + 1$; b) $c(c^4 - 16) - c^4 + 16$.

717. Számítsátok ki a kifejezések értékét!
a) $(5x + 1)^2 - (5x - 3)^2$, ha $x = 0{,}7$;
b) $(a - b)^2 + 2(a - b)b + b^2$, ha $a = 0{,}3$;
c) $17a^2 - 34ax + 17x^2$, ha $a = 3{,}7$ és $x = 2{,}7$;
d) $(5x - 3y)^2 + (3x + 5y)^2$, ha $x = 5{,}5$ és $y = 4{,}5$.

Számítsátok ki a 718–719. példákat!

718. a) $7^{50} \cdot 5^{50} - (35^{25} - 1)(35^{25} + 1)$;
b) $8^{30} \cdot 9^{30} + (1 - 72^{15})(1 + 72^{15})$.

719. a) $5^{30} \cdot 3^{30} - (15^{15} - 1)(15^{15} + 1)$;
b) $7^{24} \cdot 8^{24} + (1 - 56^{12})(1 + 56^{12})$;
c) $(32^{32} - 2)(32^{32} + 2) - 8^{64} \cdot 4^{64}$;
d) $(3 + 54^8)(3 - 54^8) + 6^{16} \cdot 9^{16}$.

720. Hasonlítsátok össze nullával a kifejezések értékét!
a) $x^2 - 22x + 121$; b) $-x^2 + 20x - 100$;
c) $x^2 - 10x + 26$; d) $-x^2 + 6x - 10$.

721. Helyettesítsétek a csillagokat olyan egytagokkal, hogy azonosságokat kapjatok!

a) $* - 1 = (a^2b^2 - *)(* + 1)$; b) $\frac{1}{9}x^6 - * = \left(\frac{1}{3}x^3 - 4y^4\right)(* + *)$;

c) $* - * = (m^2 - *)(0{,}5m^5 + *)$; d) $(1 + *)^2 = * + 8xy^2 + *$;

e) $(* - 1{,}2ab)^2 = 0{,}04 - * + *$; f) $(* - *)^2 = 36x^4 - 24x^2y^2 + *$.

722. Helyettesítsétek a csillagokat olyan egytagokkal, hogy azonosságokat kapjatok!

a) $* - 1 = (5c - *)(* + 1)$; b) $4a^4 - * = (2a^2 - 3c)(* + *)$;

c) $m^4 - * + * = (* - 3a)^2$; d) $c^3 + * + * + 8 = (* + 2)^3$.

723. Az adott háromtagok m mely értékeinél adhatók meg kéttag négyzetének alakjában?

a) $a^2 + 4ac + m$; b) $0{,}01x^4 - x^2 + m$;

c) $mx^4 + 6x^2 + 1$; d) $4z^2 - m + 81$.

724. Bizonyítsátok be az azonosságokat!

a) $(a^2 - x^2)^2 + (2ax)^2 = (a^2 + x^2)^2$;

b) $(a^2 - c)^2 + 2(a^2 - c)(a^2 + c) + (a^2 + c^2) = 4a^4$;

c) $a^8 - x^8 = (a^4 + x^4)(a^2 + x^2)(a + x)(a - x)$;

d) $(a + x - y)^2 - (a - x + y)^2 = 4a(x - y)$.

Adjátok meg a 725–727. kifejezéseket szorzat alakjában!

725. a) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$; b) $a^3 - 3a^2 + 3a + 1$;

c) $a^3 + 6a^2 + 12a + 8$; d) $8y^3 + 12y^2 + 6y - 1$.

726. a) $m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3$; b) $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$;

c) $27a^3 - 27a^2b + 9ab^2 - b^3$; d) $p^3 + 6p^2q + 12pq^2 + 8q^3$.

727*. a) $27x^3 + 54x^2y + 36xy^2 + 8y^3$;

b) $8x^3 - 60x^2y + 150xy^2 - 125y^3$;

c) $0{,}001x^{12} - 0{,}03x^8 + 0{,}3x^4 - 1$;

d) $0{,}125a^3 + 0{,}75a^2b^2 + 1{,}5ab^4 + b^6$.

Oldjátok meg a 728–731. egyenleteket!

728. a) $x^2 - 10x + 25 = 0$; b) $z^2 + 14z + 49 = 0$;

c) $x^2 - x + 0{,}25 = 0$; d) $x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} = 0$.

729. a) $4y^2 - 4y + 1 = 0$; b) $9x^2 + 12x + 4 = 0$;
c) $16z^2 + 9 = 24z$; d) $121 + 1{,}21x^2 = 24{,}2x$.

730*. a) $(x^2 + x + 2)^2 - (x^2 + x - 2)^2 = 0$;
b) $(2y^2 + 2y + 1)^2 - (2y^2 + 2y - 1)^2 = 0$.

731*. a) $(x - 4)(x^2 - 2x + 1) = 0$;
b) $(2z + 1)(z^2 - 6z + 9) = 0$.

732. Milyen x és y mellett teljesülnek az egyenlőségek?
a) $(x - y)^2 = x^2 - y^2$; b) $(x + y)^2 = x^2 + y^2$.

733. Két egymás utáni páratlan természetes szám négyzeteinek különbsége 144. Határozzátok meg a két számot!

734. Két szám összege 34, négyzeteik különbsége pedig 408. Határozzátok meg ezeket a számokat!

735. Két szám különbsége 21, négyzeteik különbsége pedig 1155. Határozzátok meg a két számot!

736*. Adjátok meg szorzatok alakjában!
a) $x^{2n} - 1$; b) $a^{4p} - 4$; c) $9x^{2n+2} - y^{6n}$;
d) $a^{4m-2} - 49b^{2m-4}$; e) $a^{2p} - 2a^p + 1$; f) $x^{2n+6} + 8x^{n+3} + 16$.

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

737. Határozzátok meg!
a) $\frac{5}{6}$ és $\frac{1}{3}$ félkülönbségének és összegének arányát;
b) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ és $\frac{6}{7}$ összegének és szorzatának arányát.

738. Az iskola hetedik osztályainak hat kitűnő tanulója számára jutalmul nyári pihenőtáborba szóló két azonos beutalót adtak. Hányféle módon osztható el a két beutaló a kitűnő tanulók között?

739. Bizonyítsátok be, hogy az alábbi kifejezések értékei:
a) $13^9 - 13^8 - 13^7$ 5 többszöröse;
b) $23^{11} - 23^{10} - 23^9$ 101 többszöröse!

740. Határozzátok meg az alábbi számok összegét, különbségét, szorzatát és hányadosát!
a) $4 \cdot 10^8$ és $2 \cdot 10^7$; b) $3{,}6 \cdot 10^{19}$ és $2 \cdot 10^{19}$.

19. §. A KÖBÖK KÜLÖNBSÉGE ÉS ÖSSZEGE



Összeszorozva az $a - b$ és $a^2 + ab + b^2$ többtagokat a következőket kapjuk:

$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3$.

Tehát bármilyen a és b értékére igaz:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Az $a^2 + ab + b^2$ háromtag az a és b *összegének nem teljes négyzete.* (Az $a^2 + 2ab + b^2$ kifejezéstől csak a középső tag együtthatója különbözteti meg.) Ezért a bebizonyított képletet így is megfogalmazhatjuk:

két kifejezés köbének különbsége egyenlő e kifejezések különbségének és az összegük nem teljes négyzetének szorzatával.

Megszorozzuk az $a + b$ és $a^2 - ab + b^2$ többtagokat:

$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3$.

Tehát

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Az $a^2 - ab + b^2$ háromtag az a és b *különbségének nem teljes négyzete.* A fenti képlet lényegét így fogalmazhatjuk meg:

két kifejezés köbének összege egyenlő e kifejezések összegének és különbségük nem teljes négyzetének szorzatával.

A bebizonyított képletek szerint tényezőkre bontható a kifejezések köbének összege és különbsége.

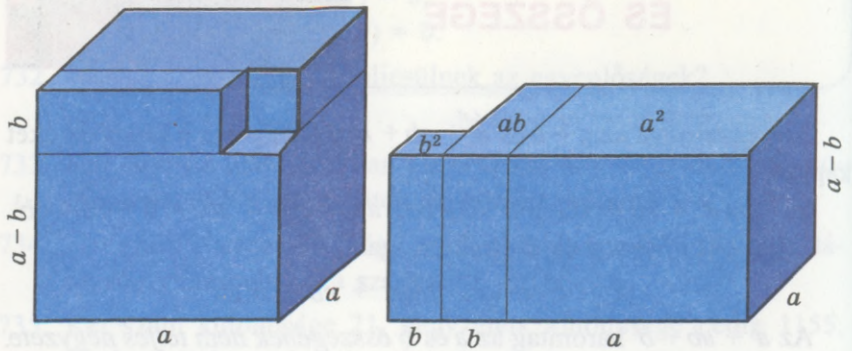
Példák.

$$x^3 - 8y^3 = x^3 - (2y)^3 = (x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2);$$

$$1 + 0{,}027a^6 = 1^3 + (0{,}3a^2)^3 = (1 + 0{,}3a^2)(1 - 0{,}3a^2 + 0{,}09a^4).$$

Szeretnétek többet megtudni?

A köbök különbségének képlete a és b pozitív értékei esetén a 49. ábrán látható módon geometriailag szemléltethető.



49. ábra

Ha megszorozzuk $a - b$-vel az

$$a^3 + a^2b + ab^2 + b^3 \text{ és } a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4$$

kifejezéseket, akkor a következő képleteket kapjuk:

$$a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3),$$
$$a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4).$$

Bebizonyíthatjuk, hogy n minden természetes értékére igaz lesz az alábbi képlet:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

A négyzetek különbségének és köbök különbségének képletei a legegyszerűbb esetei ennek az általános képletnek.

Ellenőrizzétek magatokat!

1. Milyen kifejezést nevezünk az összeg nem teljes négyzetének? Milyet a különbség nem teljes négyzetének?
2. Mivel egyenlő két kifejezés összegének és különbségük nem teljes négyzetének szorzata?
3. Mivel egyenlő két kifejezés különbségének és összegük nem teljes négyzetének szorzata?
4. Mennyivel egyenlő két kifejezés köbének különbsége? Írjátok le a megfelelő kifejezést!
5. Mivel egyenlő két kifejezés köbének összege? Írjátok le a képletét!

Oldjuk meg együtt!

1. Bontsátok tényezőkre a kéttagokat!

a) $8 - 27x^3y^3$; b) $-a^6 + c^3$.

✔ M e g o l d á s .

a) $8 - 27x^3y^3 = 2^3 - (3xy)^3 = (2 - 3xy)(2^2 + 2 \cdot 3xy + (3xy)^2) =$
$= (2 - 3xy)(4 + 6xy + 9x^2y^2)$;

b) $-a^6 + c^3 = -(a^6 - c^3) = -(a^2 - c)(a^4 + a^2c + c^2) =$
$= (c - a)^2 (a^4 - a^2c + c^2)$.

2. Határozzátok meg az $x^4 - x^2y + y^2$ és $x^2 + y$ többtagok szorzatát!

✔ M e g o l d á s.

1. m ó d s z e r. A köbök összegének képlete szerint:

$$(x^2 + y)(x^4 - x^2y + y^2) = (x^2)^3 + y^3 = x^6 + y^3.$$

2. m ó d s z e r. A többtagok szorzásának szabálya szerint:

$$(x^2 + y)(x^4 - x^2y + y^2) = x^6 - x^4y + x^2y^2 + x^4y - x^2y^2 + y^3 =$$
$$= x^6 + y^3.$$

Oldjátok meg fejben!

741. Mivel egyenlő az a és c összegének nem teljes négyzete?

742. Mivel egyenlő az a és c különbségének nem teljes négyzete?

743. Hogyan egyszerűsíthetők a kifejezések?

a) $(1 - x)(x^2 + x + 1)$; b) $(a^2 - a + 1)(a + 1)$.

744. Bontsátok tényezőkre a kifejezéseket!

a) $n^3 - 1$; b) $c^3 + 8$.

A szint

Adjátok meg többtag alakjában a 745–747. példákat!

745. a) $(a - x)(a^2 + ax + x^2)$; b) $(b + 2)(b^2 - 2b + 4)$.

746. a) $(1 + x)(1 - x + x^2)$; b) $(a - c^2)(a^2 + ac^2 + c^4)$.

747. a) $(2a - n)(4a^2 + 2an + n^2)$; b) $(1 + c + c^2)(1 - c)$.

Bontsátok tényezőkre a 748–754. kéttagokat!

748. a) $a^3 - c^3$; b) $x^3 + 8$; c) $1 - p^3$;

d) $c^3 - 64x^3$; e) $n^6 - 1$; f) $27a^3 + b^3$.

749. a) $125 - z^3$; b) $0{,}001 - a^6$; c) $27x^6 - a^3y^3$;
d) $p^3 + q^3$; e) $8 - a^3$; f) $c^3 + 8x^3$.

750. a) $1 + a^6$; b) $a^3 + c^6$; c) $27 + a^3b^3$;
d) $\frac{1}{27} - x^3$; e) $p^3x^6 + 1$; f) $27m^3 + n^6$.

751. a) $a^3c^3 + 27x^6$; b) $-c^6 + 27x^3$; c) $a^6c^9 - 27x^3$;
d) $a^3 - \frac{1}{8}b^3c^6$; e) $-z^3 - p^3$; f) $0{,}008 + y^3z^9$.

752. a) $a^3 + 8$; b) $27 + m^3$; c) $64a^3 + 27$;
d) $\frac{1}{8} + c^3$; e) $\frac{8}{27}x^3 + 1$; f) $\frac{27}{64} + z^3$.

753. a) $a^3b^3 - 1$; b) $8x^3 - a^3$; c) $64 + a^3c^3$;
d) $\frac{1}{8}a^3x^3 - c^3$; e) $\frac{1}{64}a^3 - x^3y^3$; f) $\frac{8}{27} - a^3x^3z^3$.

754. a) $x^3 - y^6$; b) $a^3 + z^6$; c) $a^6 - z^9$;
d) $8a^3 - x^6$; e) $27 - a^3y^6$; f) $-8a^9 - 27c^6$.

Adjátok meg többtag alakjában a 755–757. példákat!

755. a) $(a - 2)(a^2 + 2a + 4)$; b) $(x + m)(x^2 - xm + m^2)$;
c) $(x - a^2)(x^2 + a^2x + a^4)$; d) $(a^4 + 1)(a^8 - a^4 + 1)$.

756. a) $(a^2 - m)(a^4 + a^2m + m^2)$; b) $(2x + 3)(4x^2 - 6x + 9)$;
c) $(3c - n)(9c^2 + 3cn + n^2)$; d) $(5 + y^3)(25 - y^3 + y^6)$.

757. a) $(4 + 2x + x^2)(2 - x)$;
b) $(25 - 10m + 4m^2)(5 + 2m)$;
c) $(9x^2 - 15x + 25)(3x + 5)$.

758. Határozzátok meg a kifejezések értékét!
a) $(x + 1)(x^2 - x + 1) - x^3$, ha $x = 5{,}73$;
b) $(z - 2)(z^2 + 2z + 4) + 8$, ha $z = 0{,}02$.

Oldjátok meg a 759–760. egyenleteket!

759. a) $(x - 1)(x^2 + x + 1) = x + x^3$;

b) $(y + 2)(y^2 - 2y + 4) = y^3 + 2y$.

760. a) $(x - 3)(x^2 + 3x + 9) + x = x^3$;

b) $(1 + y)(y^2 - y + 1) - y^3 = 2y$.

761. Határozzátok meg a többtagok szorzatait!

a) $3a - 2$ és $9a^2 + 6a + 4$; b) $5 + x^2$ és $x^4 - 5x^2 + 25$;

c) $0{,}5a^2 + b$ és $0{,}25a^4 - 0{,}5a^2b + b^2$;

d) $4m - m^2$ és $m^4 + 4m^3 + 16m^2$.

B szint

Adjátok meg többtag alakjában a 762–766. példákat!

762. a) $(a^3 - 1)(a^6 + a^3 + 1)$; b) $(m - 1)(m^2 + 2m + 1)$;

c) $3a - 2b)(9a^2 + 6ab + 4b^2)$; d) $(7x + 3y)(49x^2 - 21xy + 9y^2)$.

763. a) $(a^2 + 1)(a^4 - a^2 + 1)$; b) $(x^3 - 2a)(x^6 + 2x^3a + 4a^2)$;

c) $(3x + y)(9x^2 - 3xy + y^2)$; d) $(2a + 3b)(4a^2 - 6ab + 9b^2)$.

764. a) $(4a^{14} - 2a^7b^4 + b^8)(2a^7 + b^4)$; b) $(16a^2 + 4ab + b^2)(4a + b)$;

765. a) $(a^8 - 2x)(a^{16} + 2a^8x + 4x^2)$; b) $(x^3 + y^2)(x^6 - x^3y^2 + y^4)$;

c) $(2a - xy)(4a^2 + 2axy + x^2y^2)$;

d) $(ac^2 + 3n)(9n^2 - 3ac^2n + a^2c^4)$.

766. a) $(x^3 - 1)^2 (x^6 + x^3 + 1)^2$; b) $(x^4 + 1)^3 (x^8 - x^4 + 1)^3$.

Szorozzátok meg a 767–768. többtagokat!

767. a) $x^2 + c$ és $x^4 - x^2c + c^2$; b) $p - q^2$ és $p^2 + pq^2 + q^4$;

c) $x - 0{,}2$ és $x^2 + 0{,}2x + 0{,}04$.

768. a) $a^3 - b$ és $a^6 + a^3b + b^2$; b) $a^5 + 2b$ és $a^{10} - 2a^5b + 4b^2$;

c) $x^2 + y^2$ és $x^4 + y^4 - x^2y^2$.

Bontsátok tényezőkre a 769–770. kifejezéseket!

769. a) $(a + 2)^3 - 8$; b) $27 - (x + y)^3$; c) $(z - 1)^3 + z^3$;

c) $64a^3 - (a - 1)^3$; d) $\frac{1}{8}a^3 + \left(1 + \frac{1}{2}a\right)^3$; e) $1 - (x + 1)^6$.

770. a) $8 - (a - 2)^3$; b) $(x + y)^3 - y^3$;

c) $x^3 - y^3 - x + y$; d) $a^3 - b^3 - a^2 - ab - b^2$.

Számítsátok ki a 771–772. kifejezések értékeit!

771. a) $(x + 3)(x^2 - 3x + 9) - x^3 - x$, ha $x = 2{,}5$;

b) $(2x - 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2) + 27y^3$, ha $x = 1$ és $y = -3{,}8$.

772. a) $(1 + 2x)(4x^2 - 2x + 1) - 3x^3$, ha $x = \frac{1}{5}$;

b) $37x^3 - (4x - 3)(16x^2 + 12x + 9)$, ha $x = \frac{1}{3}$;

c) $5x^3 + (3x - 2y)(9x^2 - 6xy + 4y^2) + 19y^3$, ha $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{2}{3}$;

d) $28y^3 + (5x - y)(25x^2 + 5xy + y^2) - 61x^3$, ha $x = \frac{3}{4}$, $y = 1\frac{2}{3}$.

773. Adjátok meg szorzat alakjában!

a) $x^9 - y^{3n}$; b) $a^{3m-3} + b^{21}$; c) $a^{6n+9} - c^{36-3n}$; d) $x^{12n-3} + 64y^{27+3n}$.

774. Bizonyítsátok be az azonosságot!

a) $a^3 - b^3 - (a - b)(a^2 + b^2) = ab(a - b)$;

b) $a^6 - b^6 = (a^2 - b^2)(a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2)$.

775. Bizonyítsátok be!

a) $327^3 - 227^3$ osztható 100-zal;

b) $737^3 + 263^3$ osztható 10^3-nal;

c) $2 \cdot (1001^3 + 27)$ osztható 2008-cal.

Oldjátok meg a 776–778. egyenleteket!

776. a) $(x + 1)(x^2 - x + 1) = 5x + x^3$;

b) $(z - 4)(16 + 4z + z^2) = z(z^2 - 4)$.

777. a) $(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1) = 1$;

b) $(x^3 + 3)(x^6 - 3x^3 + 9) - 26 = 0$.

778. a) $(4x^2 - 2x + 1)(2x + 1) = 2x(4x^2 + 5)$;

b) $(x^2 - 4)(x^2 - 2x + 4) = x(x^3 + 8)$.

779. Bizonyítsátok be, hogy két egymást követő természetes szám 6-tal osztva a maradék mindig egy lesz!

780. Bizonyítsátok be, hogy két egymást követő páros természetes szám köbének különbsége 24-gyel osztva a maradék mindig kettő lesz!

781. Bizonyítsátok be, hogy az $1993^3 + 7^3$ szám három utolsó számjegye nulla!

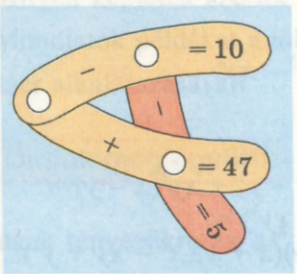
782. Bizonyítsátok be, hogy amikor két természetes szám összege osztható valamilyen számmal, akkor köbeik összege is osztható ugyanazzal a természetes számmal!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

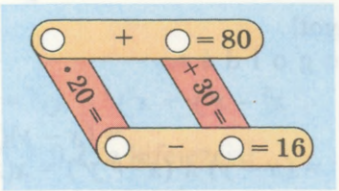
783. Egy cég 500 000 hrivnya hitelt vett fel két évre 20%-os évi kamatra. Határozzátok meg, hogy a cégnek hány hrivnyát kell visszafizetnie a banknak 2 év múlva, és mekkora lesz a bank nyeresége!

784. Rajzoljatok a koordinátasíkban egy négyszöget, amelynek a csúcsai a következő pontok: $A(1; 0)$; $B(1; 3)$; $C(5; 3)$; $D(5; 0)$. Határozzátok meg a négyszög kerületét és területét!

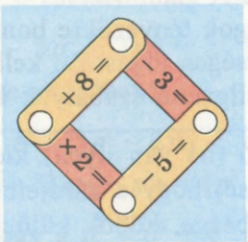
785. Oldjátok meg az 50–52. ábrán látható matematikai keresztrejtvényt!



50. ábra



51. ábra



52. ábra

786. Egyszerűsítsétek a kifejezéseket!

a) $(35 - 2^5)^{17}$; b) $(0{,}875 + 0{,}5^3)^{10}$; c) $(0{,}3^3 - 0{,}017)^6$;
d) $(3^4 + 19)^5$; e) $(2^7 - 5^3 - 4)^{15}$; f) $(4^4 - 3^5 - 13)^{12}$.

20. §. A TÖBBTAGOK TÉNYEZŐKRE BONTÁSÁNAK KÜLÖNBÖZŐ MÓDSZEREI ÉS ALKALMAZÁSUK



A többtagok tényezőkre bontásakor néha többféle módszert kell alkalmaznunk.

1. példa. Bontsuk tényezőkre a

$$4a^3 - ab^2$$

többtagot!

M e g o l d á s. $4a^3 - ab^2 = a(4a^2 - b^2) = a(2a + b)(2a - b)$.

Először az a közös tényezőt vittük ki a zárójel elé, majd a zárójelben lévő kifejezést bontottuk tényezőkre a négyzetek különbségének képletével.

2. példa. Bontsuk tényezőkre az

$$x^5 - x^4y + x^2y^3 - xy^4$$

többtagot!

M e g o l d á s.

$$x^5 - x^4y + x^2y^3 - xy^4 = x^4(x - y) + xy^3(x - y) =$$
$$= (x - y)(x^4 + xy^3) =$$
$$= (x - y)\,x\,(x^3 + y^3) = x(x - y)(x + y)(x^2 - xy + y^2).$$

Itt a csoportosítási módszert, a tényező kiemelését a zárójel elé és a köbök összegének képletét alkalmaztuk.

A bonyolultabb többtagok tényezőkre bontásakor néha az ismert módszerek mellett mesterséges fogásokat kell alkalmaznunk. Ebben az esetben a következő eligazító szabályok alkalmazhatók.

1. A közös tényező (ha van ilyen) kiemelése a zárójel elé.
2. Annak ellenőrzése, hogy a zárójelben lévő kifejezés nem négyzetek különbsége, köbök különbsége vagy összege-e.
3. Ha ez háromtag, akkor annak ellenőrzése, hogy nem kéttag négyzete-e.
4. Ha a többtag több mint három tagot tartalmaz, akkor meg kell próbálni csoportosítani őket, majd minden csoportra alkalmazni kell az 1–3. pontokat.

Szeretnétek többet megtudni?

Néha úgy bontható tényezőkre a többtag, hogy hozzáadjuk vagy kivonjuk belőle ugyanazt a kifejezést.

Példa. Bontsuk tényezőkre az $a^4 + 4$ kéttagot!

M e g o l d á s. Az adott kéttaghoz a $4a^2 - 4a^2$ kifejezést adjuk.

$$a^4 + 4 = a^4 + 4a^2 - 4a^2 + 4 = (a^4 + 4a^2 + 4) - 4a^2 =$$
$$= (a^2 + 2)^2 - (2a)^2 = (a^2 + 2 - 2a)(a^2 + 2 + 2a) =$$
$$= (a^2 - 2a + 2)(a^2 + 2a + 2).$$

Ellenőrizzétek magatokat!

1. Mit jelent a „többtag tényezőkre bontása”?
2. A többtag tényezőkre bontásának milyen módszereit ismeritek?
3. Milyen képletek szerint bontható tényezőkre a többtag?
4. Mondjatok példákat a többtag tényezőkre bontására több módszer alkalmazásával!

Oldjuk meg együtt!

1. Bontsuk tényezőkre az $ax^4 - ax^2 + 0{,}25a$ kifejezést!

✔ M e g o l d á s.

$ax^4 - ax^2 + 0{,}25a = 0{,}25a(4x^4 - 4x^2 + 1) = 0{,}25a(2x^2 - 1)^2.$

2. Adjátok meg az $n^4 - 5n^2 - 2nx - x^2 + 4$ többtagot két többtag négyzetének különbsége alakjában!

✔ M e g o l d á s. $n^4 - 5n^2 - 2nx - x^2 + 4 =$

$(n^4 - 4n^2 + 4) - (n^2 - 2nx + x^2) = (n^2 - 2)^2 - (n - x)^2.$

3. Bizonyítsátok be, hogy a $6^5 - 6^4 + 6^3$ szám osztható 31-gyel!

✔ B i z o n y í t á s. $6^5 - 6^4 + 6^3 = 6^3(6^2 - 6 + 1) = 6^3 \cdot 31.$

Az utolsó szorzat osztható 31-gyel, ezért osztható 31-gyel a vele egyenlő adott számkifejezés is.

Oldjátok meg fejben!

Bontsátok tényezőkre a 787–789. többtagokat!

787. a) $5a - 10c$; b) $4x^2 - 4x$; c) $a^2c^2 - ac$.

788. a) $a^2 - n^2$; b) $1 - c^2x^2$; c) $9 - a^4$.

789. a) $1 - 2n + n^2$; b) $x^2 - 2xy + y^2$; c) $1 + 2c^2 + c^4$.

A szint

Bontsátok tényezőkre a 790–792. többtagokat!

790. a) $ap^2 - ax^2$; b) $c^3 - cp^2$; c) $2 - 8a^2$;
d) $27x^2 - 75$; e) $18c^2x - 2x$; f) $100a^4 - a^2$.

791. a) $5a - 5a^3$; b) $49m^4 - m^2$; c) $64x^2y - 9x^2y^3$;
d) $m^6 - 27^2$; e) $x^4 - 625$; f) $x^4 - y^6$.

792. a) $xa^2 - xc^2$; b) $a^3 - an^2$; c) $20x^2 - 5$;
d) $100m^2 - 25x^2$; e) $3x^3 - 27x$; f) $45a - 5a^3$.

Oldjátok meg a 793–794. egyenleteket!

793. a) $5x^5 - x^4 = 0$; b) $x^4 + 6x^3 = 0$; c) $10x^6 = 3x^5$;
d) $3x^3 - 12x = 0$; e) $4x^4 - 9x^2 = 0$; f) $x^5 = x^3$.

794. a) $x^4 - x^2 = 0$; b) $x^3 - 25x = 0$;
c) $5x^3 - x^4 = 0$; d) $x^3 - 0{,}04x^2 = 0$.

Bontsátok tényezőkre a 795–800. többtagokat!

795. a) $ax^2 - 2ax + a$; b) $20a^3 - 20a^2 + 5a$;
c) $27a^6 + 3a^2 - 18a^4$; d) $45x^3 + 20x - 60x^2$;
e) $mx^2 + 4mx + 4m$; f) $p^2 + 6xp^2 + 9x^2p^2$.

796. a) $-4m^2 + 4m - 1$; b) $-a^2 - 6a - 9$; c) $5x^2 + 5y^4 - 10xy^2$;
d) $4ax^2 + a - 4ax$; e) $3 - 6a + 3a^2$; f) $7a^2 - 28a^4 + 28a^6$.

797. a) $ax^4 - x^4 + ax^3 - x^3$; b) $x^3 - x^2y + x^2 - xy$;
c) $x^2 - 2ax + a^2 - m^2$; d) $x^2 + 2x + 1 - a^2$.

798. a) $4ab + 12b - 4a - 12$; b) $10 + 0{,}6xy - 5y - 1{,}2x$;
c) $m^2 - x^2 - 4x - 4$; d) $x^2 - y^2 - 6x + 9$.

799. a) $x - a + x^2 - a^2$; b) $a^2 - b^2 + a - b$;
c) $k + p + k^2 - p^2$; d) $c^2 - c - m^2 - m$.

800. a) $a - b^2 + a^2 - b$; b) $c^3 - 3d^3 + 3c^2 - cd^3$;
c) $x^3 - a^3 + x - a$; d) $a + b - a^3 - b^3$.

801. Mondjatok példát olyan kéttagra, amely egyúttal négyzetek különbsége és köbök különbsége! Bontsátok tényezőkre!

B szint

Bontsátok tényezőkre a 802–812. többtagokat!

802. a) $0{,}001a + a^4$; b) $-1 - a^6$; c) $-8y^4 - 64y$;
d) $1 + c^6x^3$; e) $0{,}008a + a^7$; f) $27\,000 - y^{27}$.

803. a) $x^3y^2 - xy^4$; b) $9a^5c - a^3c^3$; c) $25a^4 - x^2y^4$;
d) $0{,}25x^2 - x^4y^4$; e) $0{,}08a^4 - 0{,}32a^2$; f) $-8 + 2x^4$.

804. a) $\frac{1}{8}x - 2x^3$; b) $\frac{2}{3}a^4 - \frac{3}{8}a^2x^4$; c) $-2\frac{1}{4}x^6 - x^2y^4$.

805. a) $\frac{1}{2}x + \frac{27}{16}x^4$; b) $\frac{1}{8}z - \frac{1}{18}z^3$;
c) $\frac{2}{9}a - 1\frac{2}{16}a^3c^2$; d) $\frac{3}{7}x^2y + \frac{3}{14}x^2$.

806. a) $0{,}04ax^3 - 0{,}4ax^2 + ax$; b) $4a^2x - 2ax^2 + 0{,}25x^5$;
c) $1{,}21nc^4 + 2{,}2nc^3 + nc^2$; d) $0{,}5a^2x^2 + 0{,}5a^2 - a^2x$.

807. a) $\frac{1}{4}ac^2 - ac + a$; b) $mx^4 - mx^2 + \frac{1}{4}m$;
c) $a^2 + a^3 - a^4 - a^5$; d) $x^2 - x^3 + x^4 - x^5$.

808. a) $ac^2 + bc - bc^2 - ac$; b) $a^2b + 3a + 3ab + a^2$;
c) $ax - a^2 + ax^2 - a^3$; d) $a^3 - ab^2 - a^2 - ab$.

809. a) $2ax - axy + 2ay - ay^2$; b) $nx + cx + c^3x + c^2nx$;
c) $x^2 - 2xy + y^2 + x - y$; d) $9a^2 + 6a + 1 + 3a + 1$.

810. a) $ac + bc - 2c - acx - bcx + 2cx$;
b) $x^3 + 2x^2 - acx - 2cx - cx^2 + ax^2$.

811. a) $a^2x^2 - a^2y^2 - 2ax^2 - 2ay^2 + x^2 + y^2$;
b) $a^2x^2 + a^2y^2 + ax^2 + ay^2 + x^2 + y^2$.

812. a) $a^2 - 2ac + c^2 - x^2 - 2x - 1$; b) $a^4 - 2a^2 + 1 - a^2 + 2ac - c^2$.

813. Adjátok meg a többtagot két kifejezés négyzetének összege alakjában!
a) $a^2 + b^2 + 2a + 2b + 2$; b) $x^4 + y^4 + 4x^2 + 4y^2 + 8$;
c) $2x^2 + 4x + 2$; d) $2x^2 + 2x + 1$.

814. Adjátok meg a kifejezést két többtag négyzetének különbsége alakjában!
a) $a^2b^2 - 2ab - 6c - c^2 - 8$; b) $(a - b)(a + b) + 4(a - b)$;
c) $a^2 + 3x^2 - 4ax + 2cx - c^2$; d) $a^4 - 5a^2 - 2ax - x^2 + 4$.

815. Adjátok meg a kifejezést kéttag négyzete alakjában!
a) $(8x + 3)^2 + (6x + 4)^2 + 4x$; b) $(3c^2 + 4)^2 + (4c^2 + 3)^2 + 2c^2$.

816. Bizonyítsátok be, hogy a kifejezéseknek x minden értékénél csak pozitív értéke lesz!
a) $(x + 2)^2 + 1$; b) $x^2 + (x - 3)^2$; c) $(x - 1)^2 + (x + 2)^2$;
d) $x^2 - 4x + 5$; e) $x^2 - x + 1$; f) $9x^2 - 6x + 2$.

817. Bizonyítsátok be, hogy a kifejezéseknek x minden értékénél csak negatív értéke lesz!
a) $6x - x^2 - 10$; b) $x - x^2 - 1$; c) $2x - x^2 - 2$.

818. Az x mely értékeinél lesz a kifejezéseknek legkisebb értékük?
a) $x^2 + 5$; b) $(x - 2)^2$; c) $(x - 3)^2 + 5$;
d) $x^2 - 6x + 9$; e) $x^2 + 4x + 6$; f) $4x^2 - 4x + 3$.

819. Számítsátok ki a kifejezések értékeit!
a) $x(x + 3)^2 + (5 + x)^3$, ha $x = -4$;
b) $(a - 3)^4 - (4 + a)^4$, ha $a = -0{,}5$;
c) $(c + 3)^2 - 2(c + 3)(c - 2) + (c - 2)^2$, ha $c = 2{,}53$;
d) $(2z + 1)^2 - 4z(2z + 1) + 4z^2$, ha $z = 3{,}75$.

820. Bizonyítsátok be az azonosságot!
$7x^3 + 5x^2 - 6x + 3 = ((7x + 5)x - 6)x + 3$.

821. Zsebszámológép alkalmazásával számítsátok ki a $37y^3 - 12y^2 + 49y - 135$ kifejezés értékét, ha:

a) $y = 19$; b) $y = 2{,}7$; c) $y = 3{,}34$.

Milyen alakban kell megadni a kifejezést, hogy a műveletek könnyen elvégezhetők legyenek számológépen?

822. Bizonyítsátok be, hogy:

a) az $5^5 - 5^4 + 5^3$ szám osztható 21-gyel;

b) a $957^2 - 43^2$ szám osztható 1000-rel!

823. Bizonyítsátok be, hogy n minden természetes értékénél:

a) $(n + 1)^2 - (n - 1)^2$ osztható 4-gyel;

b) $(3n + 2)^2 - (3n - 2)^2$ osztható 24-gyel;

c) $(5n + 3)^2 - (5n - 3)^2$ osztható 60-nal!

Bizonyítsátok be a 824–830. állításokat!

824. Két páratlan szám négyzeteinek különbsége osztható 4-gyel.

825. Két egymást követő páratlan szám négyzeteinek különbsége osztható 8-cal.

826. Két egymást követő páros szám négyzeteinek különbsége nem osztható 8-cal.

827. Egy páratlan szám négyzete 8-cal való osztásakor a maradék 1 lesz.

Bizonyítsátok be a 828–832. azonosságokat!

828. $a^2 + 3a + 2 = (a + 1)(a + 2)$.

829. $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$.

830. $c^2 - 7c + 12 = (c - 3)(c - 4)$.

831. $(a^4 + 1)(a^2 + 1)(a + 1)(a - 1) + 1 = a^8$.

832. $(a + 1)^4 = a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + 1$.

Oldjátok meg a 833–836. egyenleteket!

833. a) $x + x^3 = 0$; b) $2z^2 - 9z + 18 = z^3$;

c) $y^3 - 2y^2 - y + 2 = 0$; d) $x^3 + x = 3x^2 + 3$.

834. a) $x^3 + 2x^2 - x = 2$; b) $y^3 - 3y^2 + 4y = 12$;

c) $2x^3 - 3x^2 + 4x = 6$; d) $0{,}5z^5 + z^4 + z + 2 = 0$.

835. a) $x^2(x-3)+2x(x-3)+x-3=0$;
b) $x^2(2x+1)-4x(2x+1)+8x+4=0$.

836. a) $x^2(x^2-4x+4)-9(x^2-4x+4)=0$;
b) $x^3(x^2-6x+9)-4x(x^2-6x+9)=0$.

837. Az a mely értékeinél lesz a $8a^3-4a^2+2a-1$ kifejezés:
a) 0-val egyenlő; b) a $4a^2+1$ kifejezés értékével egyenlő?

838. Az x mely értékeinél lesz az $x+1$ és $x-1$ kifejezések négyzeteinek összege:
a) 6-tal nagyobb félösszegük négyzeténél;
b) 84-gyel nagyobb szorzatuknál?

839. Az a mely értékeinél:
a) lesz az a^3+3a^2-a kifejezés értéke egyenlő 3-mal;
b) lesznek az a^3-a^2 és $4a-4$ kifejezések értékei egyenlők egymással?

Határozzátok meg a 840–841. egyenletek gyökeit!

840. a) $x^2(x^2+4x+4)=(5x)^2+100x+100$;
b) $4x^4-12x^3+9x^2=36x^2-108x+81$.

841. a) $x^2(9x^2-6x+1)=(6x)^2-24x+4$;
b) $4x^4+56x^3+196x^2=x^2+14x+49$.

842*. Bontsátok tényezőkre a kifejezéseket!
a) a^4+4b^4; b) x^4+x^2+1;
c) x^5+x+1; d) $x^{10}+x^5+1$.

843*. Bizonyítsátok be az azonosságokat!
a) $(a-b)^3+(b-c)^3-(a-c)^3=-3(a-b)(b-c)(a-c)$;
b) $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3=3(x+y)(x+z)(y+z)$;
c) $a^3(b+c)-b^3(a+c)-c^3(a-b)=$
$=(a-b)(a+c)(b+c)(a+b-c)$.

844*. Oldjátok meg *R. Descartes* (1596–1650) *egyenletét*!
a) $y^3-8y^2-y+8=0$;
b) $x^4-4x^3-19x^2+106x-120=0$.

845*. Oldjátok meg *Bhászkara* (1114–1185) *egyenletét*!
$x^4-2x^2-400x=9999$.

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

846. Az egyik négyzet oldalhossza 1 cm-rel nagyobb a másik négyzet oldalhosszánál, területe pedig 32 cm^2-rel nagyobb a másiknál. Határozzátok meg a kisebb négyzet oldalhosszát!

847. Két négyzet kerületének különbsége 12 cm, területeik különbsége pedig 33 cm^2. Határozzátok meg a négyzetek területeit!

Számítsátok ki a 848–849. példákat!

848. a) $(2^5 - 33)^{15}$; b) $(66 - 2^6)^6$.

849. a) $(3^2 - 2^3 - 1)^{40}$; b) $(3^5 - 2^8 + 13)^{50}$.

850. Négy barátnő az újévi bálon a fivéreikkel – Andrással, Barnabással, Viktorral és Gézával – jelent meg. Az első táncot a barátnők nem a saját fivérükkel táncolták: Kati Andrással táncolt, Lívia – Mária fivérével, Beáta – Lívia fivérével, Barnabás – Viktor húgával, Viktor – András húgával. Nevezzétek meg mindegyik barátnő fivérét!



ÖNÁLLÓ MUNKA

I. változat

1°. Bontsátok tényezőkre a többtagokat!

a) $x^2 - 9c^2$; b) $27 + a^3$;
c) $x^3 - 2x^2y + xy^2$; d) $(2x + 1)^2 - 49$.

2•. Bizonyítsátok be, hogy a $7^{10} - 7^9 + 7^8$ osztható 43-mal!

3•. Oldjátok meg az $(x + 3)(x^2 - 3x + 9) = x^3 - 3x$ egyenletet!

II. változat

1°. Bontsátok tényezőkre a többtagokat!

a) $a^2 - 16c^2$; b) $8c^3 - 1$;
c) $a^4 - 2a^3c + a^2c^2$; d) $64 - (3x - 2)^2$.

2•. Bizonyítsátok be, hogy a $7^9 + 7^8 + 7^7$ osztható 57-tel!

3•. Oldjátok meg az $(x + 3)^2 - (x - 4)(x - 2) = 5$ egyenletet!

III. változat

1°. Bontsátok tényezőkre a többtagokat!

a) $m^2 - 25x^2$; b) $27n^3 + a^3$;
c) $m^2n^2 - 2mn^2 + n^2$; d) $49 - (2 - 5x)^2$.

2•. Bizonyítsátok be, hogy a $8^9 + 8^8 + 8^7$ osztható 73-mal!

3•. Oldjátok meg az $(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = x^3 + 2x$ egyenletet!

IV. változat

1°. Bontsátok tényezőkre a többtagokat!

a) $64a^2 - x^2$; b) $1 - 64z^3$;
c) $x^5 - 2x^4 + x^3$; d) $36x^2 - (1 - x)^2$.

2•. Bizonyítsátok be, hogy a $8^8 + 8^7 - 8^6$ osztható 71-gyel!

3•. Oldjátok meg az $(x + 1)(x^2 - x + 1) = x^3 - 2x$ egyenletet!

MATEMATIKATÖRTÉNETI ADALÉKOK



Francois Viete
(1540–1603)

Az algebrai jelrendszer megteremtéséért Francois Viete francia matematikus tette a legtöbbet. Ezért őt az algebra atyjának is nevezik. Gyakran használt betűjelöléseket. Az x, x^2, x^3 helyett rendre N, Q, C betűket használt, amelyek a latin *Numerus* (szám), *Quadratus* (négyzet), *Cubus* (köb) szavak első betűi. Az $x^3 + 5x^2 - 4x = 20$ egyenletet Viete a következőképpen írta le:

$$1C + 5Q - 4N \text{ aequ. } 20.$$

A számok hatványainak sokáig nem volt külön jelölésük. Az a negyedik hatványát *aaaa* szorzat alakjában írták. Később ezt a szorzatot így jelölték: $a4$, a^{IV}. Az a^3, a^4, a^5 jelölést R. Descartes vezette be.

A *rövidített szorzás képleteit* az ókori kínai és görög matematikusok már évszázadokkal időszámításunk kezdete előtt ismerték. Abban az időben nem betűkkel fejezték ki a képleteket, hanem szavakkal és mértanilag bizonyították (de csak pozitív számok esetében). Rajzokkal magyarázták, hogy bármilyen a és b számnál az $a + b$ oldalú négyzet területének négyzete két a és b oldalú négyzet és két a és b oldalú téglalap területeinek összegével egyenlő. Tehát $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Hasonló módszerrel indokoltak más egyenlőségeket is, amelyeket ma a *rövidített szorzás képleteinek* nevezünk.

Tankönyvünkben a rövidített szorzás legegyszerűbb képleteit vizsgáltuk.

A kéttag négyzetének és köbének képletei a *Newton-féle binóm* általános képletének legegyszerűbb alakjai:

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + nab^{n-1} + b^n.$$

A 3. FEJEZET TANANYAGÁNAK ÖSSZEFOGLALÁSA

A *többtag tényezőkre bontása* azt jelenti, hogy több többtag szorzatával helyettesítik, amely azonos az adott többtaggal.

A többtagok tényezőkre bontásának legegyszerűbb módszerei:

- közös tényező kiemelése a zárójel elé;
- csoportosítás;
- a rövidített szorzás képleteinek alkalmazása.

Példák.

$$6a^3x - 9abx = 3ax(2a^2 - 3b);$$
$$ax + bx - ay - by = x(a + b) - y(a + b) = (a + b)(x - y);$$
$$9m^2 - 4 = (3m - 2)(3m + 2).$$

A rövidített szorzás képletei

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ – kéttag négyzete.
$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ – kéttag köbe.
$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ – négyzetek különbsége.
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ – köbök különbsége.
$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ – köbök összege.

A többtagok tényezőkre bontása a többtagok szorzásával ellentétes átalakítás. Vázlatosan ez a két művelet az alábbi módon jeleníthető meg:

többtagok szorzása
$\longrightarrow$
$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$
$\longleftarrow$
többtag tényezőkre bontása.

Önellenőrző kérdések

1. Mit jelent a „többtag tényezőkre bontása”?
2. Nevezzétek meg a többtag tényezőkre bontásának legfontosabb módszereit!
3. Magyarázzátok meg példával a közös tényező kiemelését a zárójel elé!
4. Melyik műveleti törvényből adódik a többtagok tényezőkre bontásának algoritmusa, amikor a közös tényező zárójel elé való kivitelének módszerét alkalmazzák?
5. Magyarázzátok meg példával, hogyan bontható tényezőkre a többtag csoportosítással!
6. Mivel egyenlő két kifejezés összegének négyzete?
7. Mivel egyenlő két kifejezés különbségének négyzete?
8. Lehet-e negatív szám két szám különbségének négyzete?
9. Lehet-e negatív szám két szám négyzeteinek különbsége?
10. Mivel egyenlő két kifejezés összegének és különbségének szorzata?
11. Mivel egyenlő két kifejezés négyzeteinek különbsége?
12. Mivel egyenlő két kifejezés összegének köbe?
13. Mivel egyenlő két kifejezés különbségének köbe?
14. Milyen kifejezést nevezünk két kifejezés összege nem teljes négyzetének?
15. Milyen kifejezést nevezünk két kifejezés különbsége nem teljes négyzetének?
16. Mivel egyenlő két kifejezés összegének és összegük nem teljes négyzetének szorzata?
17. Mivel egyenlő két kifejezés összegének és különbségük nem teljes négyzetének szorzata?
18. Mivel egyenlő két kifejezés köbeinek különbsége?
19. Mivel egyenlő két kifejezés köbeinek összege?
20. Milyen képletek szerint bontható a többtag tényezőkre?
21. Mondjatok példákat többtag különböző módszerekkel történő tényezőkre bontására!

FELKÉSZÜLÉS A TEMATIKUS ÉRTÉKELÉSRE

5. sz. tesztfeladatok

1. Határozzátok meg a 4 és y^2 kifejezések összegének nem teljes négyzetét!

a) $16 - y^2$; b) $16 + y^2$; c) $(16 + y)^2$; d) $16 + 4y^2 + y^4$.

2. Az x mely értékénél lesz az $x^2 + 4x + 4$ kifejezésnek legkisebb értéke?

a) 2; b) –4; c) –2; d) 6.

3. Számítsátok ki: $5^{50} \cdot 3^{50} - (15^{25} - 1)(15^{25} + 1)$!

a) 1; b) –1; c) 15^{25}; d) 15^{50}.

4. Mivel egyenlő az a és $5c$ kifejezések különbségének nem teljes négyzete?

a) a^2; b) $a^2 - 5ac + 25c^2$; c) $(a - 5c)^3$ d) $(-5c)^2$.

5. Bontsátok tényezőkre az $x^3 - 27$ kéttagot!

a) $(x - 3)(x^2 - 3x + 9)$; b) $(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$;
c) $(x - 3)(x - 3)$; d) $(x - 3)^3$.

6. Határozzátok meg a $\left(\frac{z}{2} - 3\right)\left(\frac{z^2}{4} + \frac{3z}{2} + 9\right)$ kifejezés értékét, ha $z = 4$!

a) –19; b) 19; c) $-\frac{19}{2}$; d) $\frac{19}{2}$.

7. Melyik szám nem gyöke a $4x^3 - 16x = 0$ egyenletnek?

a) 0; b) –2; c) 2; d) –3.

8. Hány egytag összege az $x^5 - x^4 - x + 1$ többtag?

a) 2; b) 4; c) 3; d) 5.

9. Egyszerűsítsétek a $(16 - 4y^2 + y^4)(y^2 + 4)$ kifejezést!

a) $16 - y^2$; b) $64 + y^6$; c) $(4 + y)^2$; d) $(16 - y^2)^2$.

10. Az $a^3 - a$ kifejezés minden természetes a esetében osztható!

a) 5; b) 6; c) 7; d) 9.

Az 5. sz. dolgozat típusfeladatai

1°. Bontsátok tényezőkre a többtagokat!

a) $x^2 - 16$; b) $a^3 + c^3$.

2°. Oldjátok meg az egyenleteket!

a) $x^2 - 25 = 0$; b) $a^2 - 6a + 9 = 0$.

3°. Adjátok meg az alábbiakat többtagok alakjában!

a) $(a - 2)(a^2 + 2a + 4)$; b) $(3x + 1)(9x^2 - 3x + 1)$.

4°. Bizonyítsátok be az azonosságot!

$(a - x)^2 + 4ax = (a + x)^2$.

5•. Adjátok meg szorzat alakjában a kéttagokat!

a) $\frac{x^3}{27} + 0{,}008y^3$; b) $-1000a^9 - b^3c^6$.

6•. Határozzátok meg a kifejezés értékét, ha $p = 0{,}897$!

$27p^3 - (3p - 1)(9p^2 + 3p + 1) + p + 2$.

7•. Bontsátok tényezőkre a többtagokat!

a) $3a^5b^3 - 24a^2c^6$;

b) $25x^2 - 10xy + y^2 - 36$;

c) $8a^3 + 4a^2b - 2ab^2 - b^3$.

8•. Oldjátok meg az egyenleteket!

a) $x^5 - 4x^3 = 0$;

b) $x^5 + 3x^4 + 3x^3 + x^2 = 0$;

c) $x^4 - 10x^3 + 250x - 625 = 0$.

9••. Bizonyítsátok be, hogy a $97^3 + 78^3 + 97^2 - 78^2$ osztható 175-tel!

10••. Bontsátok tényezőkre a kifejezéseket!

a) $a^4 + 9b^4$; b) $y^5 + y + 1$.

4. FEJEZET

FÜGGVÉNYEK



Nincs az emberi tudásnak az a területe, amelynek ne lenne része a függvények fogalma és grafikus ábrázolásuk.

K. F. Lebegyincev



A függvény – az egyik legfontosabb matematikai fogalom. Lehetővé teszi nem csak állapotok, hanem folyamatok vizsgálatát és modellezését is. A folyamatok és jelenségek függvényekkel történő vizsgálata a korszerű tudomány egyik alapvető módszere. A függvényeket mindegyik további osztályban és a felsőfokú tanintézetekben is tanulni fogjátok.

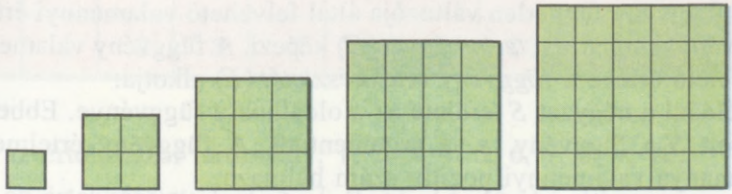
Ebben a fejezetben a következőkről lesz szó:

- **függvény-megfeleltetés;**
- **a függvénymegadás módszerei;**
- **függvénygörbék;**
- **lineáris függvény;**
- **egyenes arányosság.**



21. §. MI A FÜGGVÉNY?

A négyzet területe oldalhosszától függ. Az oldalhossz mindegyik értékének a négyzet területének egyetlen értéke felel meg (53. ábra).

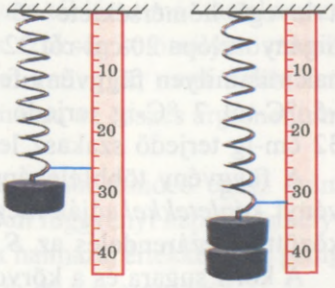


53. ábra

Egy krétadarab tömege a térfogatától függ. A V térfogat mindegyik értékének egyetlen m tömeg felel meg.

A rugóra akasztott súlyok mindegyik tömegértékének meghatározott rugóhossz felel meg (54. ábra).

A levegő mindegyik t hőmérsékleti értékének a hőmérő higanyoszlopának egyetlen h magassága felel meg.



54. ábra

Az x változó mindegyik értékének a $2x - 1$ kifejezés egyetlen értéke felel meg.

A változók közötti függőség és megfeleltetés sok példáját sorolhatnánk fel. A tudományban és gyakorlatban egyaránt fontos a megfeleltetések vizsgálata. Ezeket a *megfeleltetéseket, hozzárendeléseket függvényeknek* nevezzük.

A vizsgált példákban két változó közötti kapcsolatról van szó. Egyiküket, amelynek értékét tetszőlegesen választjuk meg, a függvény *argumentumának* vagy *független változójának* nevezzük. A független változótól függő másik változót *függő változónak* vagy *függvénynek* nevezzük.

A fenti példákban független változó (argumentum) a négyzet oldalhossza, a krétadarab térfogata, a súly tömege, a levegő hőmérséklete. Ezek értéke tetszőlegesen megadható. A példák függő változói: a négyzet területe, a kréta tömege, a rugó hossza, a hőmérő higanyoszlopának hossza.

Ha a D halmaz x változója mindegyik értékének y változó egyetlen értéke felel meg, akkor az y változót x függvénynek nevezzük.

Ebben az esetben az x változót y függvény argumentumának (független változójának), a D halmazt a függvény értelmezési tartományának, az x és y közötti megfeleltetést pedig hozzárendelésnek vagy függvénynek nevezzük.

A függvény független változója által felvehető valamennyi érték a *függvény értelmezési tartományát* (D) képezi. A függvény valamennyi megfelelő értéke a *függvény értékkészletét* (E) alkotja.

Például a négyzet S területe az a oldalhossz függvénye. Ebben az esetben S a függvény, a az argumentum. A függvény értelmezési tartománya valamennyi pozitív szám halmaza.

A hőmérő higanyoszlopának h magassága a t hőmérséklet függvénye. Itt h a függvény, t az argumentum. Ha például a nap folyamán a levegő hőmérséklete –5 °C-ról 7 °C-ra emelkedik, s a hőmérő higanyoszlopa 20 cm-ről 32 cm-re kúszik fel, akkor ennek a változásnak valamilyen függvény felel meg. Ennek értelmezési tartománya a –5 °C-tól 7 °C-ig terjedő köz, értékkészlete pedig a 20 cm-től a 32 cm-ig terjedő szakasz lesz.

A függvény többféleképpen adható meg. Leggyakrabban a függvényt *képletekkel* adják meg. Például a négyzet a oldala és S területe közötti hozzárendelés az $S = a^2$ képlettel adható meg.

A kör r sugara és a körvonal C hossza közötti megfeleltetés pedig a $C = 2\pi r$ képlettel fejezhető ki.

Az x változó és a $2x - 1$ kifejezés értékei közötti megfeleltetés az $y = 2x - 1$ képlettel adható meg.

A függvényt azért célszerű képlettel megadni, mert ezáltal tetszőleges argumentumra kiszámítható a hozzárendelt függvényérték. A függvény képlettel való megadása helytakarékos is, mivel a képlet csak egy sort foglal el.

Ha a függvény képlettel van megadva és az értelmezési tartományát külön nem tüntettük fel, akkor értelmezési tartományának tekintjük a változó összes olyan értékének halmazát, amellyel a képletnek értelme van. Például az $y = 2x - 1$ függvény értelmezési tartománya valamennyi szám halmaza, az $y = \frac{3}{x-1}$ függvény értelmezési tartománya pedig valamennyi szám halmaza az 1 kivételével, mivel 0-val osztani nem lehet.

Figyeljétek meg!



Az egyváltozós többtaggal megadott függvény értelmezési tartománya valamennyi szám halmaza.

A függvény *táblázattal* is megadható. Például az $y = 2x - 1$ függvény x első tíz természetes értékére a következő táblázattal adható meg.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

Itt:

- az értelmezési tartomány: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10;
- az értékkészlet: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19.

A függvénymegadás táblázati módszere azért célszerű, mert az argumentum meghatározott értékeire nézve a táblázat már tartalmazza a megfelelő függvényértékeket, így nincs szükség semmilyen számításokra. Ugyanakkor ez a módszer kényelmetlen is, mert a táblázat nagyon sok helyet foglal el, és nem tartalmazza az összes argumentum függvényértékét, hanem csak néhányat.

A függvény *szóban* is megadható. Ha például minden egész szám mellé hozzárendeljük a négyzetét, akkor olyan függvényt kapunk, amelynek értelmezési tartománya az egész számok halmaza, értékkészlete pedig a természetes számok négyzeteinek halmaza és a 0 szám lesz.

Szeretnétek többet megtudni?

Az *argumentum* szó magyar jelentése érv. Akkor használják, ha valamilyen állítás valódiságát vagy téves voltát bizonyítják.

Figyeljétek meg, hogyan viszonyul egymáshoz a következő két fogalom: „egyértelmű megfeleltetések (függvények)" és „nem egyértelmű megfeleltetések" (55. ábra). Az ábrából kiderül, hogy léteznek olyan megfeleltetések, amelyek nem egyértelműek. Például az $y = 5 + 0 \cdot x$, $y = 1^x$ képletek függvényeket adnak meg, de ezekben az y változók nem függnek x-től, vagyis egy adott x értékhez nem tartozik egy meghatározott y érték.



55. ábra

A koordináta-egyenesen a racionális számoknak megfelelő pontokon kívül számtalan olyan pont létezik, amelyek koordinátái nem racionális számok. Ezeket *irracionális* számoknak nevezzük.

A racionális és irracionális számok együttesen **a valós számok halmazát (*R*)** képezik. Részletesebben a valós számokkal és tulajdonságaikkal a 8. osztályban ismerkedtek meg. Addig a valós számok halmaza helyett az „összes" vagy „valamennyi szám" kifejezést fogjuk használni.

Ellenőrizzétek magatokat!

1. Fogalmazzátok meg, mit nevezünk függvénynek!
2. Mondjatok példákat függvényekre!
3. Mit nevezünk a függvény argumentumának (változójának)?
4. Mit nevezünk a függvény értelmezési tartományának?
5. Mit nevezünk a függvény értékkészletének?
6. Hogyan adhatók meg a függvények?

Oldjuk meg együtt!

1. Határozzuk meg az $y = 2x + 7$ képlettel megadott függvény azon értékeit, amelyek az argumentum következő értékeinek felelnek meg: 0; 4; 0,8; –125; 10^5! Az eredményeket foglaljátok táblázatba!

✔ M e g o l d á s.

Ha $x = 0$, akkor $y = 2 \cdot 0 + 7 = 7$;
ha $x = 4$, akkor $y = 2 \cdot 4 + 7 = 15$;
ha $x = 0{,}8$, akkor $y = 2 \cdot 0{,}8 + 7 = 8{,}6$;

ha $x = -125$, akkor $y = 2 \cdot (-125) + 7 = -243$;
ha $x = 10^5$, akkor $y = 2 \cdot 10^5 + 7 = 200\,007$.

x	0	4	0,8	−125	10^5
y	7	15	8,6	−243	200 007

2. Határozzuk meg a függvények értelmezési tartományait!

a) $y = 1 - 5x + 3x^2 + x^3$; b) $y = \frac{5}{x^2 - 9}$.

✔ M e g o l d á s.

a) A függvényt megadó képlet többtag, ezért értelmezési tartománya – valamennyi szám halmaza;

b) az x változó bármilyen értéket felvehet, azokat leszámítva, amelyeknél az $\frac{5}{x^2 - 9}$ tört nevezője nullával egyenlő. Ezek meghatározásához megoldjuk az $x^2 - 9 = 0$ egyenletet.

$(x - 3)(x + 3) = 0$, ahonnan $x = 3$, $x = -3$.

Vagyis a függvény értelmezési tartománya valamennyi szám halmaza az $x = 3$ és $x = -3$ kivételével.

Oldjátok meg fejben!

851. Függ-e a négyzet kerülete az oldalhosszától? A négyzet kerülete oldalhossza függvényének tekinthető-e?

852. A kocka térfogata a $V = a^3$ képlettel határozható meg, ahol a a kocka éle. Függvény-e ez a képlet? Milyen az argumentuma?

853. A körlap területe az $S = \pi r^2$ képlettel számítható ki, ahol r a körlap sugara. Függvény-e a képlet? Ha igen, milyen a függvény értelmezési tartománya?

854. A réz sűrűsége 8,6 g/cm^3. Fejezzétek ki képlettel a réz V térfogata és m tömege közötti megfeleltetést! Van-e függvénykapcsolat az m tömeg és a V térfogat között? Milyen az argumentuma? Milyen a függvény értelmezési tartománya?

855. Az autóbusz sebessége 55 km/h. Hogyan függ a megtett S út a t menetidőtől? Van-e függvénykapcsolat az s változó és a t között?

856. Az 5 cm és x cm oldalhosszúságú téglalap területe S cm^2. Függvény-e az $S(x)$ hozzárendelés? Milyen a függvény argumentuma?

A szint

857. Fejezzétek ki képlettel az egyenlő oldalú háromszög P kerülete és a oldalhossza közötti összefüggést! Függvény-e a $P(a)$ hozzárendelés?

858. Függ-e a kör d átmérője r sugarától? Ha igen, akkor fejezzétek ki képlettel!

859. A mellékszögek fokmértéke α és β. Írjátok le képlettel az α és β szögek közötti összefüggést! Függvénye-e α β-nak? Milyen a függvény argumentuma?

860. A és B a derékszögű $ABC\Delta$ háromszög hegyesszögeinek fokmértékei. Adjátok meg képlettekkel az A függőségét B-től és B függőségét A-tól! Függvények-e ezek a hozzárendelések? Ha igen, akkor milyenek az értelmezési tartományaik?

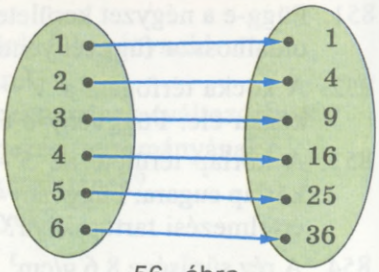
861. Egy függvény az $y = 2x + 5$ képlettel van megadva. Határozzátok meg a függvény értékét, ha $x = 1; 0; -3; 7; 1000$!

862. A függvény az $y = \frac{6}{x}$ képlettel van megadva. Töltsétek ki a táblázatot!

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
y													

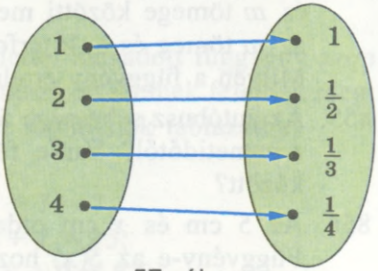
863. Készítsd el az $m = 42 - 3n$ függvény értéktáblázatát n első tíz természetes értékére!

864. Az első hat természetes szám és négyzeteik közötti megfeleltetést az 56. ábra szemlélteti. Függvény-e ez a megfeleltetés? Ha igen, akkor milyen az értelmezési tartománya? Milyen az értékkészlete?



56. ábra

865. Az 57. ábra az 1, 2, 3, 4 számok és reciprok értékeik közötti megfeleltetést szemlélteti. Függvény-e ez a megfeleltetés? Ha igen, akkor milyen az értelmezési tartománya? Milyen az értékkészlete?



57. ábra

866. A függvény az $y = \frac{2}{3}x$ képlettel van megadva. Az argumentum mely értékénél lesz a függvény értéke egyenlő 20-szal?

867. A függvény az $y = 0{,}3x$ képlettel van megadva. Töltsétek ki a táblázatot!

x	−10	−3					
y			−0,3	0	1,2	1,5	15

868. A függvény az $y = x^2 + 3$ képlettel van megadva. Állítsátok össze az értéktáblázatát argumentuma első tíz természetes értékére!

869. Határozzátok meg az alábbi képletekkel megadott függvények értelmezési tartományait!

a) $y = 3x - 7$; b) $y = \frac{x}{x+5}$; c) $y = 5x^2 - x + 3$.

870. A tanulónak 5 hrivnyája volt. Ebből x ceruzát vett, darabját 60 kopijkáért, s még maradt y kopijkája. Adjátok meg képlettel az y és az x közötti összefüggést kifejező függvényt! Milyen lesz az értelmezési tartománya?

871. 1 kg áru ára 2,5 hrivnya. Hogyan függ az áru z ára m tömegétől? Mennyi lesz a 18 kg tömegű áru ára? Milyen tömegű áru kerül 125 hrivnyába?

872. A kőolaj 12 t/h sebességgel halad a csővezetékben. Mennyi kőolaj folyik keresztül ezen a csővezetéken 3 óra alatt?; x óra alatt? Állítsátok fel a megfelelő képletet!

873. Hány perc van t órában? Fejezzétek ki ezt a megfeleltetést képlettel! Foglaljátok táblázatba a függvény argumentumának 10 értékére!

874. Írjátok le a függvény képletét, ha:
a) a függvény értéke ellentettje az argumentum kétszeres értékének;
b) a függvény értéke 5-ször nagyobb az argumentuma értékénél;
c) a függvény értéke 12-vel nagyobb, mint az argumentum fele;
d) a függvény értéke reciprok értéke az argumentuma 4-gyel megnövelt értékének!

875. Határozzátok meg az alábbi képletekkel megadott függvények értékeit!
a) $y = 8x - 5$, amely megfelel a következőkkel egyenlő értékű argumentumának: −2; 0; 1,5; 12; 25;
b) $y = -\frac{x}{2} + 1$, amely megfelel a következőkkel egyenlő értékű argumentumának: −8; −1; 0; 1; 20.

876. Határozzátok meg az argumentum értékét, amelynél!
a) az $y = 3x + 2$ függvény értéke egyenlő: 8; 2;
b) az $y = \frac{4}{x-3}$ függvény értéke egyenlő: –2; 2;
c) az $y = x(x + 6)$ függvény értéke egyenlő: –9; 0.

B szint

877. Írjátok le azt a képletet, amely kifejezi az egyenlő szárú háromszög alapjánál lévő α szöge függőségét β szárszögétől! Függvény-e ez a képlet? Ha igen, akkor milyen lesz az értelmezési tartománya?

878. A gépkocsi sebessége 70 km/h. Fejezzétek ki képlettel a jármű által megtett s út és az idő t közötti összefüggést! Töltsétek ki a táblázatot!

t, h	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
s, km										

879. A turista 5 km távolságra van a várostól, és 4 km/h sebességgel közelít hozzá. Milyen távolságra lesz a várostól 10; 20; 30 perc múlva? Függvénye-e ez a távolság az időnek? Adjátok meg a függvényt képlettel! Milyen lesz az értelmezési tartománya?

880. A raktárban 600 t szén volt. A raktárba naponta 40 t szenet szállítottak. Fejezzétek ki képlettel a raktárban lévő szén m és a t idő közötti megfeleltetést! Függvény-e ez a megfeleltetés?

881. Készítsétek el az $y = \frac{60}{x+1}$ függvény értéktáblázatát, ha az x argumentum egész $-5 \leqslant x \leqslant 5$ értéket vesz fel!

882. Egy hüvelykben 2,54 cm van. Fejezzétek ki képletekkel azokat a megfeleltetéseket, amelyek lehetővé teszik a hüvelykben megadott hosszúság átszámítását centiméterbe, a centiméterben megadott hosszúságot pedig hüvelykbe! Készítsetek táblázatot!

883. A négyzet kerülete $P = 4a$, ahol a oldalának hosszúsága. Fejezzétek ki a-t P által!

884. A körvonal hossza $C = 2\pi r$, ahol r a kör sugara. Fejezzétek ki r-t C által!

885. Határozzátok meg az alábbi képletekkel megadott függvények értelmezési tartományát és értékkészletét!

a) $y = \frac{3}{4}x$; b) $y = \frac{3}{4x}$; c) $y = \frac{3}{4+x}$; d) $y = \frac{1}{x(x-3)}$; e) $y = x^2$.

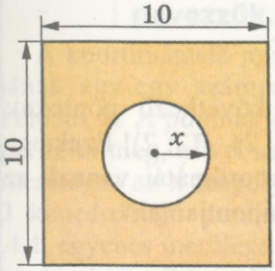
886. Határozzátok meg az alábbi képletekkel megadott függvények értelmezési tartományait!

a) $y = x(x+5)$; b) $y = (x^2+6)(x+8)$; c) $y = \frac{16}{x+5}$;

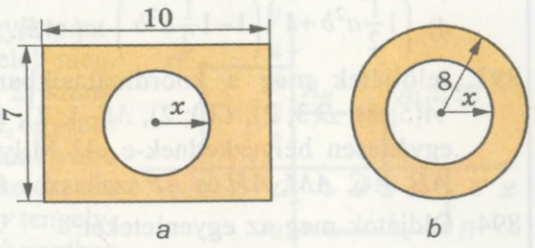
d) $y = \frac{10}{8x-1}$; e) $y = \frac{x}{x^2-36}$; f) $y = \frac{2x}{1-25x^2}$.

887. A 10 centiméter oldalhosszúságú négyzetből x cm sugarú körlapot vágtak ki (58. ábra). Hogyan függ az így kapott alakzat területe x-től? Határozzátok meg ennek a függvénynek az értelmezési tartományát!

888. Állítsátok fel azt a képletet, amellyel meghatározható az 59. *a*, *b* ábrán látható festett alakzat területe! Számítsátok ki a kapott függvények értelmezési tartományait!



58. ábra



59. ábra

889*. Töltsétek ki a táblázatot

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

az alábbi függvények esetére:

a) $y = \begin{cases} 2x+5, \text{ ha } x \leqslant 0, \\ -2x+5, \text{ ha } x > 0; \end{cases}$ b) $y = \begin{cases} x^2+3, \text{ ha } x \leqslant 0, \\ \frac{x}{2}+3, \text{ ha } x > 0! \end{cases}$

890*. Töltsétek ki a táblázatot

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

az alábbi függvények esetére:

a) $y = \begin{cases} -1, \text{ ha } x \leqslant -1, \\ \frac{1}{x}, \text{ ha } x > -1; \end{cases}$ b) $y = \begin{cases} -(x+1)^2, \text{ ha } x \leqslant 0, \\ x^2+2, \text{ ha } x > 0! \end{cases}$

891*. A zacskóban n számú egyforma csokoládé található, amelyek közül 6-tal több van piros papírba csomagolva, mint zöldbe. Milyen a valószínűsége annak, hogy a találomra kiválasztott csokoládé piros csomagolásban lesz? Állítsatok össze táblázatot azokra az esetekre, amikor n a következőkkel egyenlő: 10, 20, ... 80!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

892. Egyszerűsítsétek a kifejezéseket!

a) $(0{,}5a - 0{,}4b)(0{,}5a + 0{,}4b) \cdot 2ab$;

b) $10x^2y(0{,}2x + 2y)\,(-0{,}2x + 2y)$;

c) $\left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y\right)\left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y\right) \cdot (-9xy)$;

d) $\left(1\frac{1}{2}a^2b + 1\right)\left(1 - 1\frac{1}{2}a^2b\right) \cdot (-4b)$.

893. Jelöljétek meg a koordinátasíkban a következő pontokat: $A(5; 2)$, $B(3; 2)$, $C(0; 2)$, $M(-1; 2)$, $H(-3; 2)$, $P(2; 2)$! Ezek egy egyenesen helyezkednek-e el? Milyen koordinátái vannak az AB, AC, AM, AH és AP szakaszok felezőpontjainak?

894. Oldjátok meg az egyenleteket.

a) $4(x - 3) + 2(5 - x) = 8$; b) $7(5 - y) + 8(y - 3) = 18$;

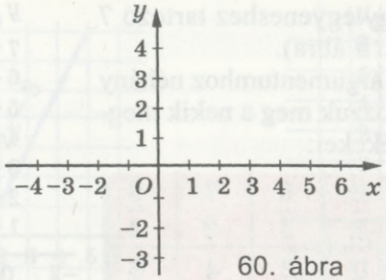
c) $6(z + 2) - 5(z - 2) = 20$; d) $9(t - 4) - 8(5 + t) = -79$.

895. Két polcon 88 könyv található. Ha az egyik polcról 3 könyvet a másikra helyeznek át, akkor a két polcon egyenlő számú könyv lesz. Hány könyv van mindegyik polcon?

22. §. A FÜGGVÉNY-GÖRBE



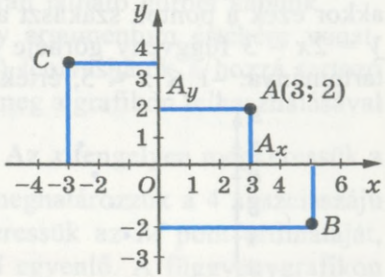
Húzzunk a síkban egymásra merőleges két x és y koordináta-egyenest, amelyek a számlálás O kezdőpontjában metszik egymást (60. ábra)!



60. ábra

Azt a síkot, amelyben a koordináta-egyenesek vannak meghúzva, koordinátasíknak, az x egyenest abszcisszatengelynek, az y egyenest ordinátatengelynek, az O kezdőpontot pedig origónak nevezzük.

A koordinátasík mindegyik pontjának egy-egy számpár felel meg. Például az A pontnak a (3; 2) számpár felel meg, mivel az AA_x egyenes merőleges az x tengelyre, amelyet a 3 koordinátájú pontban metsz. Az AA_y egyenes merőleges az y tengelyre, amelyet a 2 koordinátájú pontban metsz (61. ábra). Ekkor azt mondjuk, hogy az A pontnak 3 és 2 a *koordinátái*. Ezt így írjuk: $A(3; 2)$. Előre írjuk az x koordinátát, másodiknak az y koordinátát. Tehát az A pont *abszcisszája* 3, *ordinátája* 2. A koordináta kezdőpontja vagy origója: $O(0; 0)$.



61. ábra

A koordinátasíkban mindegyik számpárnak egyetlen pont felel meg. A 61. ábrán látható, hogy miként kell jelölni például a $B(5; -2)$ és $C\left(-3; 3\frac{1}{2}\right)$ pontokat.

Adott az $y = 2x - 3$ függvény, ahol $-1 \leqslant x \leqslant 5$. Elkészítjük a függvény értéktáblázatát argumentumának egész értékeire.

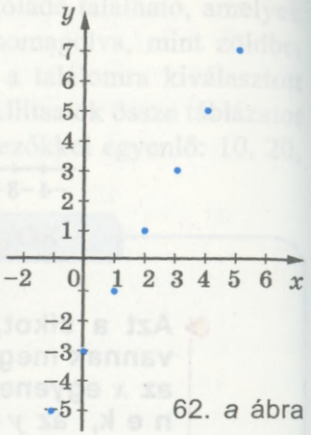
x	-1	0	1	2	3	4	5
y	-5	-3	-1	1	3	5	7

Jelöljük a koordinátasíkban táblázatban feltüntetett pontokat. A pontok abszcisszái a függvény x argumentum értékeivel egyenlők, ordinátái pedig a megfelelő y függvényértékekkel, azaz $A(-1; -5)$,

$B(0; -3)$ stb. Így egy egyeneshez tartozó 7 pontot kapunk (62. *a* ábra).

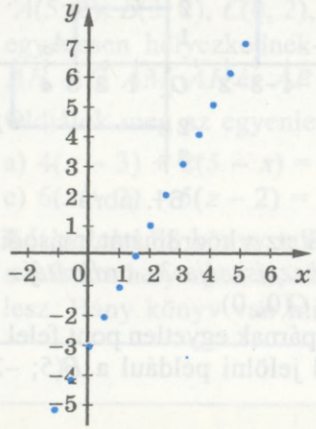
Rendeljünk az x argumentumhoz néhány történtéket, és határozzuk meg a nekik megfelelő függvényértékeket:

x	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{9}{2}$
y	-4	-2	0	2	4	6

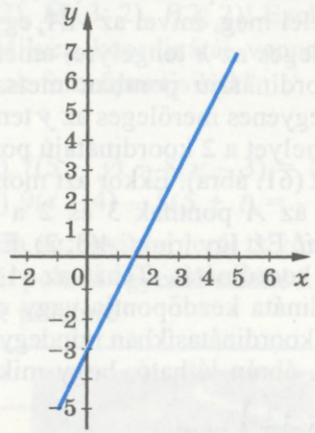


62. *a* ábra

Jelöljük a 62. *a* ábrán azokat a pontokat, amelyeknek a koordinátái a táblázatban találhatók (62. *b* ábra)! Mint látjuk, ezek ugyanazon az egyenesen helyezkednek el. Ha az x argumentumhoz további értékeket társítunk (olyanokat, hogy $-1 \leqslant x \leqslant 5$), és a megfelelő pontokat jelöljük a koordinátasíkban, akkor ezek a pontok szakaszt alkotnak (62. *c* ábra). Ez a szakasz az $y = 2x - 3$ függvény görbéje (grafikonja). A függvény értelmezési tartománya: $-1 \leqslant x \leqslant 5$, értékkészlete $-5 \leqslant x \leqslant 7$.



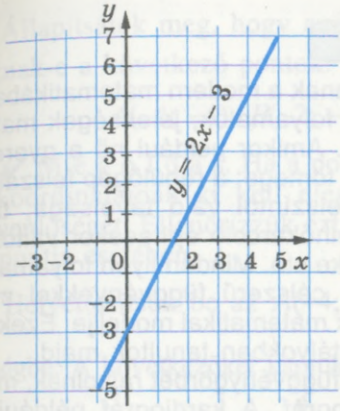
62. *b* ábra



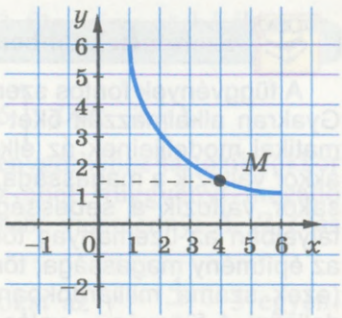
62. *c* ábra

Ha a szakaszt képzeletben mindkét irányba meghosszabbítjuk, akkor egyenest kapunk. Ez az egyenes nem más, mint az $y = 2x - 3$ képlettel, de valamennyi szám halmazán megadott függvény görbéje vagy grafikonja (63. ábra).

A függvény grafikonjának nevezzük a koordinátasík mindazon pontjának halmazát, amelyek abszcisszája a függvény argumentumával, ordinátája pedig a függvény megfelelő értékeivel egyenlő.



63. ábra



64. ábra

Ha a fenti módon megrajzoljuk $1 \leqslant x \leqslant 6$ esetére az $y = \frac{6}{x}$ függvény grafikonját, akkor a 64. ábrán látható görbét kapunk.

A függvény grafikonjáról bármely argumentum értékére vonatkozóan (az értelmezési tartományból) leolvashatók a hozzá tartozó függvényértékek. Például határozzuk meg a grafikon felhasználásával az $y = \frac{6}{x}$ függvény értékét, ha $x = 4$. Az x tengelyen megkeressük a 4 abszcisszájú pontot, a grafikonon meghatározzuk a 4 abszcisszájú M pontot, majd az y tengelyen kikeressük az M pont ordinátáját, amely ebben az adott esetben 1,5-del egyenlő. A függvénygrafikon felhasználásával összeállítjuk értéktáblázatát, vagyis a grafikonnal megadjuk a függvényt. A függvény *grafikus megadási módja* a szemléletessége miatt praktikus. A grafikonról azonnal leolvashatók a függvény tulajdonságai. A többi között megállapíthatók az alábbi jellemzői:

- a függvény értelmezési tartománya és értékkészlete;
- az argumentum mely értékeinél pozitívak és mely értékeinél negatívak a függvény értékei, és mely értékei mellett egyenlők nullával;
- mely szakaszokon *növekszik* és mely szakaszokon *csökken* a függvény.

A függvényt n ö v e k v ő n e k nevezzük, ha az argumentum nagyobb értékeinek nagyobb függvényérték felel meg.
A függvényt c s ö k k e n ő n e k nevezzük, ha az argumentum nagyobb értékének kisebb függvényérték felel meg.

Szeretnétek többet megtudni?

A függvények fontos szerepet játszanak a modern matematikában. Gyakran alkalmazzák őket különböző folyamatok, jelenségek matematikai modelljeinek az elkészítésére. Amikor például nő a gyerek, akkor változik a magassága, térfogata, tömege; a repülőgép felszállásakor változik a sebessége, a földfelszíntől való távolsága, tartályaiban az üzemanyag tömege; a felhőkarcoló építésekor változik az építmény magassága, tömege, értéke stb. Minden ilyen folyamatot (ezek száma milliárdokban mérhető) célszerű függvényekkel modellezni. A függvény – valós folyamatok matematikai modellje. Ezekről részletesebben a felső tagozatos osztályokban tanultok majd.

Léteznek olyan műszerek, amelyek függvénygörbét rajzolnak, mint például a barográf, kardiográf, termográf. A kardiográf például a szívműködést ábrázoló görbét, szaknyelven: kardiogramot rajzol (65. ábra). A termográf a napi, heti, havi hőmérséklet-változást rögzíti. A szakembereknek tudniuk kell olvasni ezeket a grafikonokat.



65. ábra

Ellenőrizzétek magatokat!

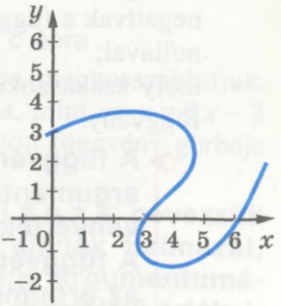
1. Ábrázoljátok a koordinátasíkot!
2. Mit nevezünk koordinátatengelyeknek, origónak?
3. Mit nevezünk abszcisszának, ordinátának, a pont koordinátáinak?
4. Mit nevezünk a függvény grafikonjának?

Oldjuk meg együtt!

1. Függvénygörbe-e a 66. ábrán látható vonal?

✔ M e g o l d á s. Ezen a vonalon három olyan különböző pont van, amelyek abszcisszája 4. Ha létezne az x argumentumnak ilyen y függvénye, akkor az $x = 4$ értéknek három függvényérték felelne meg. A függvény meghatározása értelmében ez nem lehetséges.

F e l e l e t. Az adott vonal nem függvénygörbe.



66. ábra

2. Állapítsátok meg, hogy az $y = \frac{4}{x} - 3$ függvény görbéjéhez tartoznak-e a következő pontok:

$A(-4; -4)$; $B(-2; -1)$; $C\left(\frac{1}{2}; 5\right)$; $D(8; -2\frac{1}{2})$.

✔ M e g o l d á s. Ha a pont a függvénygörbéhez tartozik, akkor a koordinátáinak ki kell elégíteniük az adott függvényt megadó egyenlőséget. Ellenőrizzük ezt az adott görbe valamennyi A, B, C és D pontja esetében.

Helyettesítsük be az $A(-4; -4)$; pontokat az $y = \frac{4}{x} - 3$ egyenlőségbe. A következőket kapjuk: $-4 = \frac{4}{-4} - 3$; $-4 = -1 - 3$; $-4 = -4$. Vagyis az A pont az $y = \frac{4}{x} - 3$ függvény görbéjéhez tartozik.

A $B(-2; -1)$ pont esetében: $-1 = \frac{4}{-2} - 3$; $-1 = -2 - 3$; $-1 \neq -5$. Vagyis a B pont nem tartozik az $y = \frac{4}{x} - 3$ függvény görbéjéhez.

A $C\left(\frac{1}{2}; 5\right)$ pont esetében: $5 = \frac{4}{\frac{1}{2}} - 3$; $5 = 8 - 3$; $5 = 5$, azaz a C pont a függvénygörbéhez tartozik.

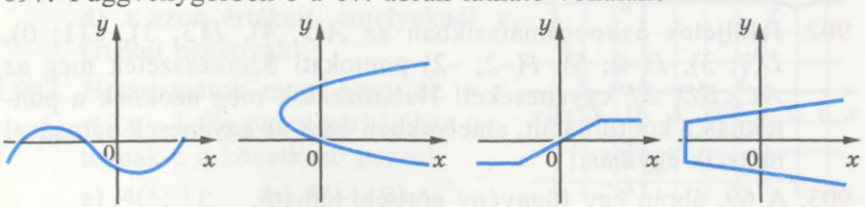
A $D\left(8; -2\frac{1}{2}\right)$ pontra vonatkoztatva: $-2\frac{1}{2} = \frac{4}{8} - 3$; $-2\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 3$; $-2\frac{1}{2} = -2\frac{1}{2}$, tehát a D pont a függvénygörbéhez tartozik.

F e l e l e t. Az A, C és D pontok az $y = \frac{4}{x} - 3$ függvény görbéjéhez tartoznak, míg a B pont nem tartozik ehhez a görbéhez.

Oldjátok meg fejben!

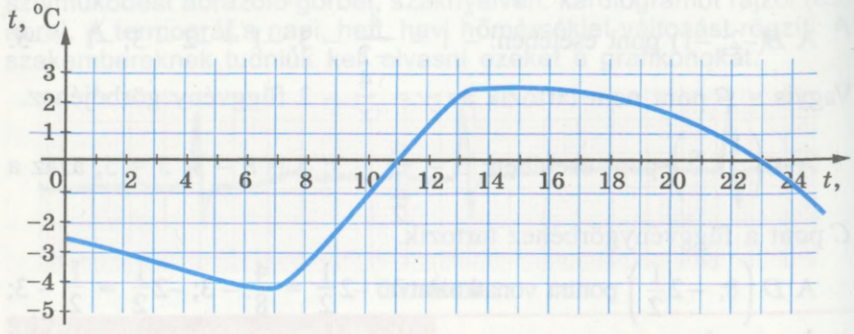
896. Magyarázzátok meg az alábbi szavak jelentését:
a) *argumentum*; b) *függvény*; c) *grafikon* (*görbe*)!

897. Függvénygörbék-e a 67. ábrán látható vonalak?



67. ábra

898. A 68. ábrán a levegőhőmérséklet (Celsius-fokokban) napi változásának görbéje látható (órák szerinti bontásban).
Állapítsátok meg:
a) azt az időszakot, amelyben a hőmérséklet pozitív volt; negatív volt;
b) hány órakor volt a hőmérséklet: –3 °C; –1 °C; 0 °C; 2 °C;
c) milyen volt a hőmérséklet reggel 7 órakor; 14 órakor; 21 órakor;
d) mettől meddig csökkent a hőmérséklet; növekedett a hőmérséklet;
e) mennyi ideig volt állandó a hőmérséklet; milyen értéket ért el ekkor;
f) azt az időszakot, amelyben a hőmérséklet –3 °C-nál alacsonyabb volt.



68. ábra

899. Bizonyítsátok be, hogy az $y = x^2 + 1$ függvény görbéje nem metszi az abszcisszatengelyt!

900. Metszi-e az abszcisszatengelyt az $y = x^2 - 9$ függvény görbéje?

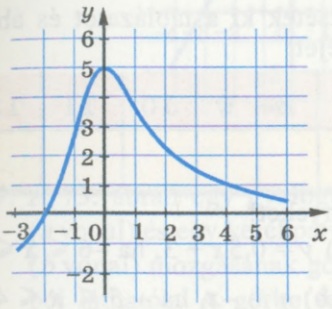
901. Az alábbi függvények görbéi közül melyik halad át az origón?
a) $y = 0{,}5x - 1$; b) $y = -25x^2$; c) $y = 3x$;
d) $y = px + 2$; e) $y = 3 \cdot 3x$; f) $y = x - 3x^2$.

A szint

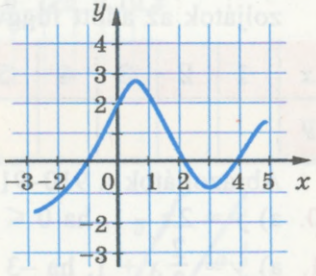
902. Jelöljétek a koordinátasíkban az $A(5; 4)$, $B(3; 3)$, $C(1; 0)$, $D(7; 3)$, $E(-2; 5)$, $F(-2; -2)$ pontokat! Szerkesszétek meg az AC, BD, EF egyeneseket! Határozzátok meg azoknak a pontoknak a koordinátáit, amelyekben ezek az egyenesek párosával metszik egymást!

903. A 69. ábrán egy függvény görbéje látható.
Határozzátok meg:

a) a függvény azon értékeit, amelyek megfelelnek argumentuma következő értékeinek: –1; 0; 3; 5;
b) az argumentum azon értékeit, amelyek megfelelnek a következő függvényértékeknek: –1; 0; 3; 4.



69. ábra



70. ábra

904. Töltsétek ki a táblázatot a függvénygörbe (70. ábra) alapján!

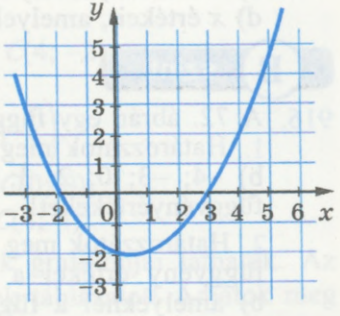
x	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
y									

905. Töltsétek ki a táblázatot a függvénygörbe (lásd a 63. ábrát) alapján!

x	–1	–0,5			1,5			3	3,5
y			–3	–1		1	2		

906. Határozzátok meg (71. ábra):
a) y azon értékeit, amelyeknél $x = -3; -1; 0; 1; 4$;
b) x azon értékeit, amelyeknél $y = -1{,}5; -1; 0; 1; 2{,}5$;
c) x azon értékeit, amelyeknél y értékei pozitívak;
d) x azon értékeit, amelyeknél y értékei negatívak!

907. Határozzátok meg, hogy az $y = 2x - 1$ függvény görbéjéhez tartoznak-e a következő pontok:
a) $A(5; 1)$; b) $B(-1; 3)$;
c) $C(-1; -3)$; d) $D(3; 5)$.



71. ábra

908. Az $A(5; -4)$, $B(3; 3)$, $C(1; 0)$, $D(1; 7)$, $E(-2; 5)$ pontok közül melyik tartozik az alábbi függvények görbéihez?
a) $y = 5x + 2$; b) $y = -x + 1$; c) $y = x^2 + 1$; d) $y = 10x - 3$.

909. Az $y = \frac{1}{2}x$ függvény értelmezési tartománya egész számok halmaza, ahol $1 \leqslant x \leqslant 12$. Töltsétek ki a táblázatot és ábrázoljátok az adott függvény görbéjét!

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y												

Ábrázoljátok a 910–911. függvényeket!

910. a) $y = 2x - 1$, ha $0 \leqslant x \leqslant 7$; b) $y = 0{,}5x + 3$, ha $-6 \leqslant x \leqslant 6$.

911. a) $y = \frac{2}{3}x + 1$, ha $-3 \leqslant x \leqslant 6$; b) $y = -x$, ha $-5 \leqslant x \leqslant 4$.

912. Az $y = 0{,}5x + 3$ függvény értelmezési tartománya a 8-nál nem nagyobb természetes számok halmazán van megadva. Ábrázoljátok grafikusan!

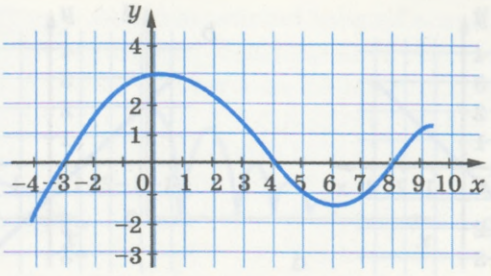
913. Az $y = 5 - x$ függvény értelmezési tartománya a $-7 \leqslant x \leqslant 7$ feltételt kielégítő egész számok halmaza. Ábrázoljátok grafikusan!

914. Ábrázoljátok az $y = 1 - 0{,}8x$ függvényt! A grafikon alapján határozzátok meg:
a) y értékeit, amelyeknél $x = 0; 1; -1; 2; -2; 5$;
b) x értékeit, amelyeknél $y = -7; -5; -3; 1; 0; 2; 5$;
c) x értékeit, amelyeknél y értékei pozitívak;
d) x értékeit, amelyeknél y értékei negatívak!

915. Ábrázoljátok az $y = \frac{x-4}{2}$ függvényt! A grafikon alapján határozzátok meg:
a) x értékeit, amelyeknél $y = -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3$;
b) y értékeit, amelyeknél $x = -2; 0; 2; 4; 6; 8$;
c) x értékeit, amelyeknél y értékei pozitívak;
d) x értékeit, amelyeknél y értékei negatívak!

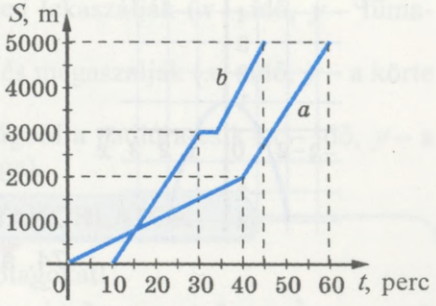
B szint

916. A 72. ábrán egy függvény görbéje látható.
1. Határozzátok meg: a) a függvény értelmezési tartományát; b) $-4; -3; 0; 2; 3; 4; 6$ argumentum-értékeknek megfelelő függvényértékeket!
2. Határozzátok meg az argumentum értékeit: a) amelyeknél a függvény értékei a következőkkel egyenlők: $-1; 0; 2; 4$; b) amelyeknél a függvény értékei pozitívak lesznek; c) a függvény növekszik; d) a függvény csökken!



72. ábra

917. A 73. ábrán egy gyalogos (*a* vonal) és egy kerékpáros (*b* vonal) mozgásának görbéi láthatók. A görbe felhasználásával határozzátok meg a következőket:
a) egyszerre indultak-e el;
b) állandó volt-e mindkettőjük sebessége!



73. ábra

918. Melyik függvény görbéje megy át az $A(3; -2)$ ponton?

a) $y = 3x - 8$; b) $y = 2(x - 4)$; c) $y = 7(1 - 5x)$;

d) $y = 3x - 2$; e) $y = 2\frac{1}{3}x - 9$; f) $y = \frac{1}{7}(1 - 5x)$.

Határozzátok meg, hogy a 919–920. példákban a függvények görbéihez tartoznak-e a megadott pontok!

919. a) $y = 0{,}5x + 4$, $A(4; 6)$, $B(-8; 0)$, $C(2; 5)$;

b) $y = -12x + 17$, $A(1; 5)$, $B\left(-\frac{1}{3}; 11\right)$, $C(0{,}5; 11)$;

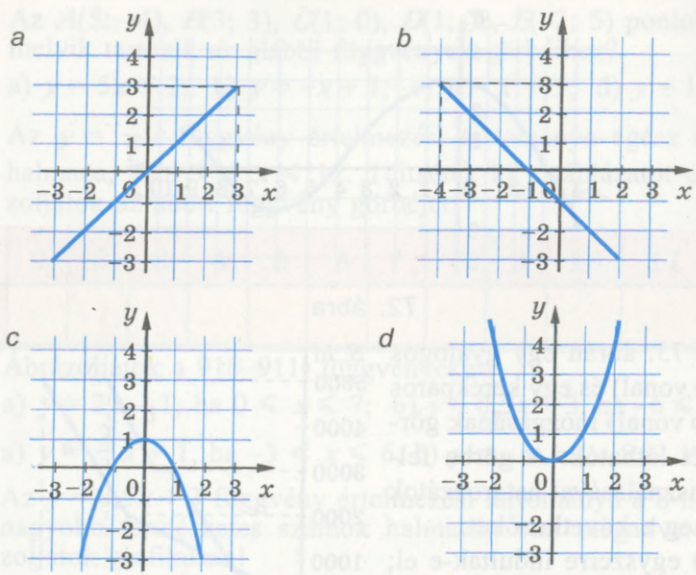
c) $y = 4 - \frac{8}{x}$, $A(1; -4)$, $B\left(\frac{1}{2}; 0\right)$, $C(4; -2)$.

920. a) $y = \frac{1}{x-6}$, $A(7; 1)$, $B(6; 0)$, $C\left(3; \frac{1}{3}\right)$;

b) $y = x(x - 5)$, $A(0; -5)$, $B(5; 0)$, $C(0; 0)$;

c) $y = (6 - x)^2$, $A(7; -1)$, $B(8; 4)$, $C(4; 4)$.

921. A 74. ábrán különböző függvények grafikonjai láthatók. Az *a* – *d* grafikonok alapján készítsetek táblázatot! Adjátok meg képletekkel az *a* és *d* függvényt!



74. ábra

Ábrázoljátok grafikusan a 922–923. függvényeket és jellemezzétek tulajdonságait!

922. a) $y = 1{,}3x + 2$, ha $-3 \leqslant x \leqslant 4$; b) $y = 4 - 2t$, ha $-2 \leqslant t \leqslant 5$.

923. a) $y = \frac{x+6}{2}$, ha $-8 \leqslant x \leqslant 4$; b) $y = -\frac{1}{5}x$, ha $-5 \leqslant x \leqslant 5$.

Ábrázoljátok grafikusan a 924–925. függvényeket! Melyik növekvő és melyik csökkenő az alábbi függvények közül?

924. a) $y = 2x - 5$; b) $y = 3 - 2x$; c) $y = 0{,}1x$.

925. a) $y = -\frac{1}{5} + 2x$; b) $y = \frac{3x-1}{5}$; c) $y = \frac{17-x}{5}$.

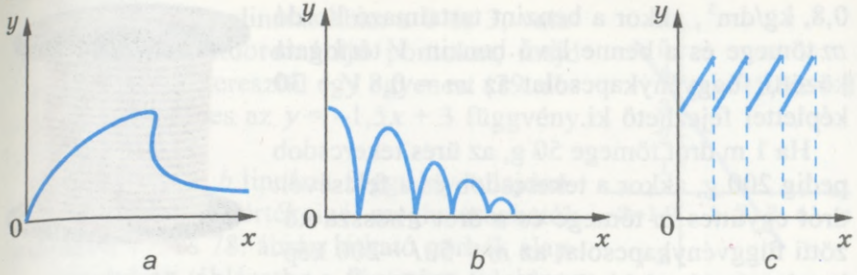
926. Ábrázoljátok grafikusan az $y = 2(1 - x)$ függvényt! Határozzátok meg argumentumának azon értékeit, amelyeknél a függvényérték nagyobb –3-nál és kisebb 7-nél!

927. Az $y = 2x + m$ függvény görbéje az $A(-2; 5)$ ponton halad keresztül. Határozzátok meg m értékét!

928. Az $y = kx + 2$ függvény görbéje a $B(3; 8)$ ponton halad keresztül. Határozzátok meg k értékét!

929. A függvény az $y = x^2 - m$ képlettel van megadva. Az m mely értékeinél halad át a függvény görbéje az origón?

930. Állapítsátok meg, hogy a függvénygörbék (75. ábra) közül melyik felel meg az alábbi feltételeknek!



75. ábra

1) a pázsit füvét rendszeresen lekaszálják (x – idő, y – fűmagasság);
2) a körte megérik, leszedik és megaszalják (x – idő, y – a körte tömege);
3) a labda bizonyos magasságból a padlóra esik (x – idő, y – a labda padló fölötti magassága).

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

931. Bontsátok tényezőkre a többtagokat!

a) $ab + bc + ca + c^2$; b) $2x - yx + 2y - y^2$;
c) $3 - 6a + z - 2az$; d) $10ax - 5bx + 2ay - by$.

932. Bizonyítsátok be az $(n^2 + 1)^2 - (n^2 - 1)^2 = 4n^2$ azonosságot! Az azonosság felhasználásával bizonyítsátok be, hogy mindegyik páros szám négyzete valamely két egész szám négyzeteinek különbségével egyenlő!

933. Mennyit kell venni a 10%-os és 4%-os sóoldatból, hogy 800 g 7%-os oldatot kapjatok?

934. Oldjátok meg az egyenleteket!

a) $(x + 3)^2 = x^2 + 9x$; b) $(y - 5)^2 = y(y + 2)$;
c) $(1 - z)^2 = 3 + z^2$; d) $(7 - x)^2 - x^2 = 35$.



23. §. LINEÁRIS FÜGGVÉNY

Sok függvény megadható az $y = kx + b$ képlettel, ahol k és b adott számok. Például, ha az üres hordó tömege 30 kg és a benzin sűrűsége

0,8, kg/dm^3, akkor a benzint tartalmazó hordó m tömege és a benne lévő benzin V térfogata közötti függvénykapcsolat az $m = 0{,}8V + 30$ képlettel fejezhető ki.

Ha 1 m drót tömege 50 g, az üres tekercsdob pedig 200 g, akkor a tekercsdob és a felcsévélt drót együttes m tömege és a drót l hossza közötti függvénykapcsolat az $m = 50l + 200$ képlettel számítható ki (76. ábra). Ezeket lineáris függvényeknek nevezzük.



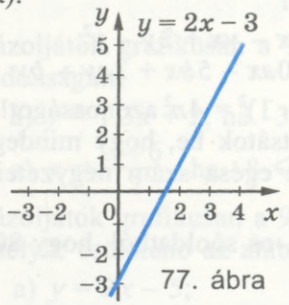
76. ábra

Lineáris függvénynek nevezzük az $y = kx + b$ képlettel megadható függvényt, ahol x az argumentum, k és b adott számok.

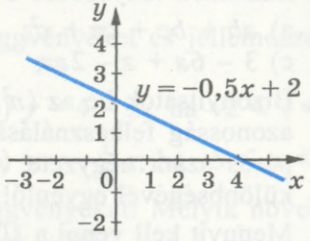
Vizsgáljuk meg a valós számok halmazán (R) az

$$y = 2x - 3 \text{ és } y = -0{,}5x + 2$$

képletekkel megadott függvényeket! Az előző paragrafusban tárgyalt módon megrajzoljuk ezeknek a függvényeknek a görbéit (77. és 78. ábra).



77. ábra



78. ábra

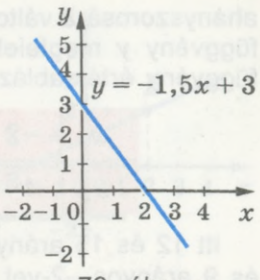
Láthatjuk, hogy mindkét függvény grafikonja egyenes. A példák általánosíthatók és bizonyítható az alábbi állítás.

Mindegyik lineáris függvény grafikonja egyenes vonal. A koordinátasík bármelyik egyenese, amely nem merőleges az abszcisszatengelyre, valamely lineáris függvény grafikonja.

Mivel minden lineáris függvény grafikonja egyenes, ezért az egyenes megszerkesztéséhez elegendő ismerni két pontjának koordinátáit. Az $y = -1{,}5x + 3$ függvény görbéjének megszerkesztéséhez elegendő argumentuma bármely két értékével táblázatot készíteni. Például:

x	0	2
y	3	0

Jelöljük a koordinátasíkban a 0 és 3, valamint a 2 és 0 koordinátájú pontokat, majd húzzunk rajtuk keresztül egy egyenest (79. ábra). Ez az egyenes az $y = -1{,}5x + 3$ függvény grafikonja.



79. ábra

Az $y = kx + b$ lineáris függvény tulajdonságai k különböző értékeinél meghatározhatók például a 77. és 78. ábrán látható görbék alapján. Foglaljuk táblázatba a függvény tulajdonságait.

A függvény tulajdonságai	A függvény típusa ($k \neq 0$)	
	$y = kx + b$, $k > 0$	$y = kx + b$, $k < 0$
Értelmezési tartomány	Valamennyi szám (R)	Valamennyi szám (R)
Értékkészlet	Valamennyi szám (R)	Valamennyi szám (R)
Pozitív értékek	$x > -\frac{b}{k}$	$x < -\frac{b}{k}$
Negatív értékek	$x < -\frac{b}{k}$	$x > -\frac{b}{k}$
Csökkenési intervallumok	—	Valamennyi szám (R)
Növekedési intervallumok	Valamennyi szám (R)	—

Fogalmazzátok meg önállóan az $y = kx + b$ lineáris függvény tulajdonságait, ha $k = 0$!

Szeretnétek többet megtudni?

Vizsgáljuk meg a lineáris függvény speciális eseteit!

Ha $k = 0$, akkor az

$$y = kx + b$$

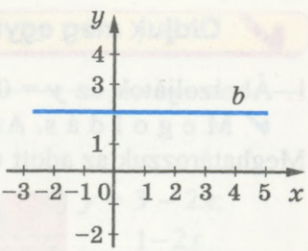
függvény $y = b$ alakú lesz. Ennek a függvénynek a görbéje az x tengellyel párhuzamos egyenes (80. ábra).

Ha $b = 0$ és $k \neq 0$, akkor a lineáris függvény

$$y = kx$$

alakú lesz.

Ezt a függvényt *egyenes arányosságnak* nevezzük, hiszen a nulla kivételével



80. ábra

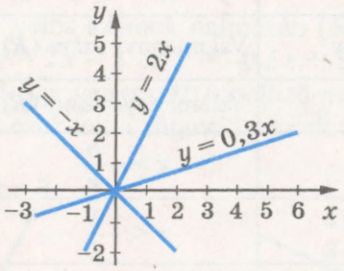
ahányszorosára változik az x értéke, ugyanannyiszorosára változik a függvény y megfelelő értéke is. Példaként elkészítjük az $y = 3x$ függvény értéktáblázatát.

x	-2	-1	1	2	3	4	5
y	-6	-3	3	6	9	12	15

Itt 12 és 15 arányos 4-gyel és 5-tel, ugyanis $12 : 15 = 4 : 5$; -6 és 9 arányos -2-vel és 3-mal, mivel $-6 : 9 = -2 : 3$ stb.

Az egyenes arányosság grafikonja olyan egyenes, amely átmegy az origón.

A 81. ábrán az $y = 2x$, $y = -x$ és az $y = 0{,}3x$ függvények görbéi láthatók.



81. ábra

Ellenőrizzétek magatokat!

1. Mit nevezünk függvénynek?
2. Fogalmazzátok meg a lineáris függvény meghatározását!
3. Milyen a képe a lineáris függvénynek?
4. Helyes megállapítás-e az, hogy a koordinátasík minden egyenese valamely lineáris függvény görbéje?
5. Hogyan szerkeszthető meg a lineáris függvény görbéje?
6. Mondjatok példákat növekvő lineáris függvényekre!

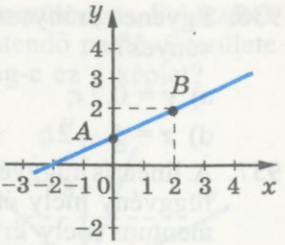
Oldjuk meg együtt!

1. Ábrázoljátok az $y = 0{,}5x + 1$ függvényt!

M e g o l d á s. Az adott függvény lineáris, a képe – egyenes. Meghatározzuk az adott egyenes két pontját táblázat összeállításával.

x	0	2
y	1	2

Felvisszük a koordinátasíkra az $A(0; 1)$ és $B(2; 2)$ pontokat és egyenest húzunk rajtuk keresztül (82. ábra). Megkapjuk az adott függvény képét.



82. ábra

Léteznek olyan függvények, amelyek értelmezési tartományuk egészében nem lineárisak, de értelmezési tartományuk egyes intervallumain a lineáris függvények tulajdonságaival rendelkeznek. Ezek grafikonjai töröttvonalak. Megvizsgálunk egy ilyen függvényt.

2. Ábrázoljuk az $y = |x - 1|$ függvényt!

✔ M e g o l d á s. Az abszolútérték meghatározása szerint leírhatjuk:

ha $x - 1 \geqslant 0$, akkor $|x - 1| = x - 1$;

ha $x - 1 < 0$, akkor $|x - 1| = -(x - 1) = -x + 1$.

Vagyis $y = |x - 1| = \begin{cases} x - 1, \text{ ha } x \geqslant 1, \\ -x + 1, \text{ ha } x < 1. \end{cases}$

Ez egy olyan lineáris függvény, amely két különböző intervallumon különböző képlettel van megadva:

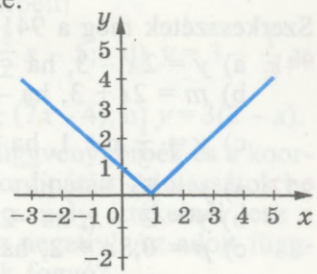
ha $x \geqslant 1$ akkor $y = x - 1$;

ha $x < 1$, akkor $y = -x + 1$.

Értékeik alapján táblázatot állítunk össze.

x	1	3
y	0	2

x	−2	0
y	3	1



83. ábra

Megszerkesztjük a függvény képét (83. ábra).

Oldjátok meg fejben!

935. Lineárisak-e az alábbi függvények?

a) $y = 5x + 0{,}2$; b) $y = -3{,}5x + 2$; c) $y = 3 - 2x$;

d) $y = x + 5$; e) $y = \frac{2x-5}{3}$; f) $y = \frac{1-2x}{2}$.

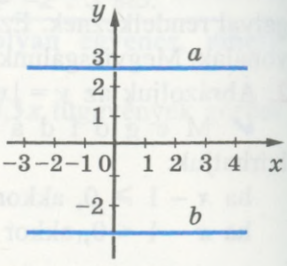
936. Egyenes arányosságok-e az alábbi képletekkel megadott függvények?

a) $y = 0{,}7x$; b) $y = \frac{x}{3}$; c) $y = \frac{2x-1}{3}$;

d) $z = 5 - 2t$; e) $z = 7t^2$; f) $z = -3t$.

937. A lineáris függvény az $y = 0{,}5x + 3$ képlettel van megadva. A függvény mely értéke felel meg az $x = -2$ értéknek? Az argumentum mely értéke mellett lesz a függvény értéke egyenlő 3-mal?

938. Adjátok meg képletekkel azokat a függvényeket, amelyek görbéi a 84. ábrán láthatók!



84. ábra

A szint

939. Szerkesszétek meg az alábbi függvények görbéit!

a) $y = 3x - 2$; b) $y = -0{,}6x$;

c) $y = 1 - 0{,}3x$; d) $y = \frac{2}{3}x + 1$;

e) $y = \frac{x+3}{2}$; f) $y = \frac{1-3x}{3}$.

940. Szerkesszétek meg az alábbi függvények görbéit:

a) $y = 0{,}5x$; b) $y = 2(x + 1)$; c) $y = 3 - 2x$; d) $y = \frac{x-5}{2}$.

Szerkesszétek meg a 941–942. függvények görbéit!

941. a) $y = 2x - 3$, ha $-1 \leqslant x \leqslant 4$;
b) $m = 2t + 3$, ha $-3 \leqslant t \leqslant 2$;
c) $y = \frac{1}{3}x + 1$, ha $-3 \leqslant x \leqslant 6$.

942. a) $y = 5x + 3$, ha $-4 \leqslant x \leqslant 2$;
b) $y = 2 - x$, ha $-2 \leqslant x \leqslant 4$;
c) $p = 0{,}8a + 2$, ha $2 \leqslant a \leqslant 5$.

943. Hozzátartoznak-e az $y = \frac{2}{3}x - 1$ függvény görbéjéhez az $A(0; -1)$, $B(3; 1)$, $C(9; 5)$ pontok, ha $-3 \leqslant x \leqslant 6$?

944. Átmegy-e az $y = 2x - 1$ függvény görbéje az alábbi pontokon?

a) $A(3; 5)$, b) $B(-10; -5)$, c) $C(100; 199)$.

945. Ábrázoljátok a következő függvényeket!

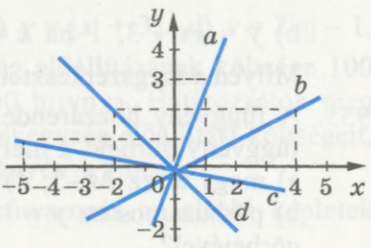
a) $y = 0x + 3$; b) $y = 0x - 2$.

946. Melyik függvény növekvő, melyik csökkenő?

a) $y = x$; b) $y = -\frac{x}{3}$; c) $y = -x$; d) $y = 2x$.

947. A padló 1 m^2-ének lefestésére 180 g festék szükséges. Fejezzétek ki képlettel a festék m tömege és a lefestendő padló S területe közötti összefüggést! Egyenes arányosság-e ez a képlet?

948. A 85. ábrán az $y = kx$ $(k \neq 0)$ függvény görbéi láthatók. Határozzátok meg mindegyik görbe esetére k együttható előjelét! Állítsatok fel olyan képleteket, amelyek megfelelnek e függvények görbéinek!



85. ábra

949. Ábrázoljátok az $y = -3x + 2$ függvény görbéjét! Keressétek meg a görbe koordinátatengelyekkel való metszéspontjait! Az x mely értékeinél lesz a függvény pozitív, mely értékeinél negatív? Növekvő vagy csökkenő a függvény?

950. Szerkesztés nélkül határozzátok meg a következő függvények grafikonjai és a koordinátatengelyek metszéspontjainak koordinátáit:

a) $y = 4x + 8$; b) $y = -x + 3$; c) $y = 0{,}5 - 2x$.

B szint

951. Ábrázoljátok az alábbi függvények görbéit!

a) $y = 2x + 1$; b) $y = x - 4$; c) $y = \frac{1}{2}x - 5$; d) $y = 3 - \frac{1}{3}x$;

e) $y = \frac{3-2x}{3}$; f) $y = \frac{4x-6}{8}$; g) $y = \frac{1}{2}(7x - 4)$; h) $y = 3(2 - x)$.

Határozzátok meg a megszerkesztett függvénygörbék és a koordinátatengelyek metszéspontjainak koordinátáit! Mutassátok be mindegyik függvény esetében, hogy x mely értékeinél lesz a függvény pozitív, mely értékeinél lesz negatív! Az adott függvények közül melyik növekvő, melyik fogyó?

952. Határozzátok meg a függvények görbéi és a koordinátatengelyek által alkotott metszéspontok koordinátáit!

a) $y = 1{,}7x - 3{,}4$; b) $y = 0{,}5(x - 4)$; c) $y = 3{,}5x$;

d) $y = -2{,}5x + 1$; e) $y = \frac{x-1}{4}$; f) $y = \frac{3-2x}{2}$.

953. Ábrázoljátok közös koordináta-rendszerben a következő függvényeket! Mely pontokban metszik egymást?

a) $y = \frac{x}{2} + 1$ és $y = -x + 4$; b) $y = x - 5$ és $y = 5 - x$;

c) $y = 3x - 1$ és $y = -x - 1$; d) $y = x + 3$ és $y = 2x + 6$.

954. Ábrázoljátok közös koordináta-rendszerben a következő függvényeket:

a) $y = 2x + b$, ha $b = -3; 0; 1$;

b) $y = kx + 3$, ha $k = -1; \frac{1}{2}; 1; 2$.

Milyen a megszerkesztett görbék elhelyezkedése a és b esetben?

955. A függvény hozzárendelési szabálya az $y = kx - 2$ képlet. A függvény görbéje k mely értékénél:

a) megy át az $M(-3; 4)$ ponton;

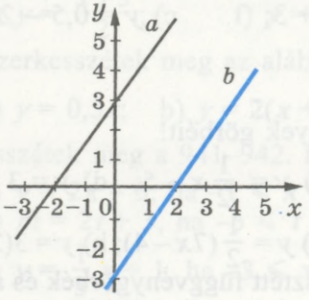
b) párhuzamos az $y = -3x + 1{,}5$ képlettel megadott függvény görbéjével?

956. Az $y = kx - 1$ és $y = px + 5$ függvények görbéi milyen feltételek mellett metszik a $P(4; 3)$ pontot?

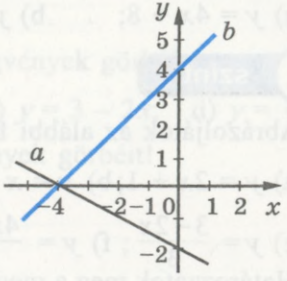
957. Ábrázoljátok az alábbi függvényeket:

a) $y = 2$; b) $y = -4$; c) $y = 3{,}5$.

958. Az $y = px + 3$ és $y = kx - 3$ függvények görbéi milyen feltételek mellett párhuzamos egyenesek (86. ábra)?



86. ábra



87. ábra

959. Írjátok le azoknak a függvényeknek a képleteit, amelyek görbéi a 87. ábrán láthatók!

960. Írjátok le az $y = kx + p$ alakú függvény képletét, ha görbéje átmegy a következő pontokon:

a) $A(0; 1)$ és $B(2; 2)$; b) $K(1; -1)$ és $P(0; 5)$.

961*. Ábrázoljátok az alábbi függvényeket:

a) $y = x + 4$; b) $y = 1 - 2x$; c) $y = 3x$; d) $y = -\frac{x}{3}$.

Mindegyik függvény esetében szerkesszetek az ordinátatengellyel szimmetrikus görbét! Adjátok meg képlettel a megfelelő függvényt!

Ábrázoljátok a 962–963. függvényeket!

962*. a) $y = \begin{cases} 2x + 3, & -4 \leqslant x \leqslant 0, \\ -2x + 3, & 0 \leqslant x \leqslant 4; \end{cases}$ b) $y = \begin{cases} -3x + 3, & -2 < x \leqslant 1, \\ x - 1, & 1 \leqslant x < 4. \end{cases}$

963*. a) $y = |x|$; b) $y = |x + 3|$; c) $y = |x| + 3$; d) $y = 2|x| - 1$.

964*. A termelésben 200 termékegység előállításának költsége 100 hrivnya, 2000 egységé pedig 800 hrivnya. Határozzátok meg grafikusan 400, 1000, 1200 termékegység előállítási költségeit, feltételezve, hogy a kiadások függvénye lineáris!

965*. Kétféle járművel végzett teherfuvarozás az alábbi képletek alapján számítható ki:

$$y_1 = 100 + 30x,\ y_2 = 150 + 20x,$$

ahol x – a szállítás távolsága százkilométerekben, y_1 és y_2 – a teherfuvarozás költségei mindkét járműfajta esetében százhrivnyákban. Határozzátok meg, hogy milyen távolságra és melyik járműfajtával kifizetődőbb szállítani!

966*. A vállalat az eladónak x egységnyi eladott áru után $(2x + 50)$ hrivnyát fizet, ha 40 egységnél kevesebbet ad el, s ezt 20% jutalékkal kiegészíti, ha 40 vagy több áruegységet értékesít. Írjátok le képlettel az eladott áru mennyisége és az eladó fizetése közötti hozzárendelési szabályt! Ábrázoljátok képlettel az így kapott függvényt!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

Oldjátok meg a 967–968. egyenleteket!

967. a) $(2x + 3)^2 = 4x^2 + 3$; b) $(5 - 3y)^2 - 9y^2 = 55$;
c) $(4z + 2)^2 = 2(8z^2 + 13)$; d) $(4 - 5x)^2 = (3 + 5x)^2$.

968. a) $(2x + 3)^2 - 4(x^2 + 7) = 71$; b) $(5z - 1)^2 - 5z(4 + 5z) = 31$;
c) $(0{,}2y - 2)^2 + 0{,}1y\,(2 - 0{,}4y) = -2$;
d) $\left(\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}x - 1\right)\left(\frac{1}{2}x + 1\right)$.

969. A kerékpáros 10 km/h sebességgel halad egyik faluból a másikba. Ha 12 km/h sebességgel hajtana, akkor egy órával hamarabb érkezne meg. Milyen a falvak közötti távolság?

970. A motorkerékpáros 1 óra alatt jut el egyik városból a másikba. A kerékpáros ugyanezt az utat ellenkező irányban 5 óra alatt teszi meg. Hány óra elteltével találkozik a kerékpáros és a motorkerékpáros, ha egyszerre indulnak útnak?

ÖNÁLLÓ MUNKA

I. változat

1°. Adjátok meg képlettel a függvényt, amelynek értéke 4-gyel nagyobb argumentuma értékénél!

2•. Szerkesszétek meg az $y = 5 - x$ egyenlet görbéjét a 7-nél kisebb természetes számok halmazán!

3°. Ábrázoljátok az $y = 2x - 1$ függvényt!

4•. Határozzátok meg a függvények értelmezési tartományát!

a) $y = x^2 - 3x + 2$; b) $y = \frac{2}{x+3}$!

II. változat

1°. Adjátok meg képlettel a függvényt, amelynek értéke 9-cel kisebb argumentuma értékénél!

2•. Szerkesszétek meg az $y = 1 - x$ egyenlet görbéjét az 5-nél kisebb természetes számok halmazán!

3°. Ábrázoljátok az $y = 3x - 1$ függvényt!

4•. Határozzátok meg a függvények értelmezési tartományát!

a) $y = x^3 - x + 3$; b) $y = \frac{3}{x-2}$!

III. változat

1°. Adjátok meg képlettel a függvényt, amelynek értéke háromszor nagyobb argumentuma értékénél!

2•. Szerkesszétek meg az $y = 2 + x$ egyenlet görbéjét az 5-nél kisebb természetes számok halmazán!

3°. Ábrázoljátok az $y = 4x + 3$ függvényt!

4•. Határozzátok meg a függvények értelmezési tartományát!

a) $y = 1 - x^2$; b) $y = \frac{1}{x-9}$!

IV. változat

1°. Adjátok meg képlettel a függvényt, amelynek értéke ellentétes argumentuma értékeivel!

2•. Szerkesszétek meg az $y = -3 + x$ egyenlet görbéjét a 8-nál kisebb természetes számok halmazán!

3°. Ábrázoljátok az $y = -2x + 3$ függvényt!

4•. Határozzátok meg a függvények értelmezési tartományát!

a) $y = x^3 + 1$; b) $y = \frac{1}{x+9}$!

MATEMATIKATÖRTÉNETI ADALÉKOK

A változók közötti, ma *függvényeknek* nevezett megfeleltetéseket a tudósok már nagyon régen ismerik. Babilonban már több mint 3000 évvel ezelőtt elkészítették a természetes számok négyzeteinek és köbeinek táblázatát, amely az $y = x^2$ és $y = x^3$ függvények táblázati megadásának tekinthető.

A függvény általános fogalmát csak a XVII. sz.-ban vezették be. Először René Descartes vezette be a változó mennyiség fogalmát és a koordináta-rendszert, és elkezdte vizsgálni a görbe pontjainak ordinátái és abszcisszái közötti megfeleltetéseket. A „függvény" kifejezést Gottfried Wilhelm Leibniz német matematikus vezette be.

Leibniz a mozgás során bizonyos vonalat leíró ponttal kapcsolatos abszcisszákat, ordinátákat és egyes szakaszokat nevezte függvényeknek.

A kiváló német matematikusnak jogászi képesítése volt. Könyvtárosként, történészként dolgozott, és megalapította a Berlini Tudományos Akadémiát. Kutatta a matematika, filozófia, nyelvtudomány, kémia, geológia kérdéseit, számológépeket készített.



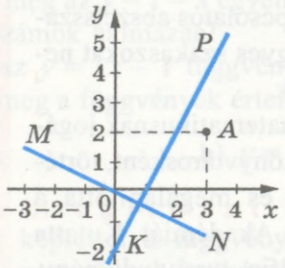
Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)

Sok matematikus (J. Bernoulli, L. Euler, M. Lobacsevszkij, B. Bolzano) erőfeszítéseinek köszönhetően a függvény fogalma finomodott, kibővült és új tartalommal telítődött. A függvény legáltalánosabban használt, korszerű meghatározását a XX. sz.-ban fogalmazta meg és javasolta N. Burbaki álnév alatt dolgozó matematikusokból álló csoport: „A függvény két halmaz között olyan megfeleltetés, amely egyik halmaz minden eleméhez hozzárendeli egy másik halmaz egy elemét." Halmaz alatt bármilyen halmazt, nem csak számhalmazt értettek. A függvénynek ezzel az általános fogalmával részletesebben a felső tagozatos osztályokban ismerkedtek meg.

A 4. FEJEZET TANANYAGÁNAK ÖSSZEFOGLALÁSA

Ha az x változó mindegyik értékének az y változó egyetlen értéke felel meg, akkor az y változót x függvényének nevezzük, az x változót a függvény *független változójának* vagy *argumentumának* nevezzük. Például a négyzet területe S oldalhosszának a függvénye.

Függvény megadható képlettel, táblázattal, grafikonnal stb. A függvény grafikonját általában a Descartes-féle *koordináta-rendszerben* szerkesztik, amely egymásra merőleges két koordináta-tengelyből – vízszintes *abszcisszatengelyből* vagy x-tengelyből és függőleges *ordinátatengelyből* vagy y-tengelyből áll (88. ábra). A koordináta-rendszer síkját *koordinátasíknak* nevezzük, ahol minden pontjának egyetlen számpár felel meg. Például a 88. ábrán az A pontnak a (3; 2) számpár felel meg, ennek a koordinátáit így írják le: $A(3; 2)$. Vagyis 3 – az A pont abszcisszája, 2 – az A pont ordinátája.



88. ábra

A *függvény görbéjének* (*grafikonjának, képének*) nevezzük a koordinátasík valamennyi pontjának halmazát, amelyek abszcisszája a függvény argumentumával, ordinátája pedig a függvény megfelelő értékeivel egyenlő.

A változó összes lehetséges értékeit a *függvény értelmezési tartományának* nevezzük. A függvény összes lehetséges értékeit a *függvény értékkészletének* nevezzük.

Lineáris függvénynek nevezzük az $y = kx + b$ képlettel megadható függvényt, ahol x az argumentum (változó), k és b adott számok. Ha $b = 0$, akkor a lineáris függvényt *egyenes arányosságnak* nevezzük.

Minden lineáris függvény grafikonja – egyenes. Az egyenes arányosság görbéje – egyenes, amely átmegy a koordináta-rendszer kezdőpontján (origóján). A 88. ábrán a KP egyenes a lineáris $y = 2x - 2$ függvény görbéje, az MN egyenes az $y = -0{,}5x$ egyenes arányosság görbéje.

Önellenőrző kérdések

1. Fogalmazzátok meg, mi a függvény!
2. Mondjatok példákat függvényekre!
3. Mi a függvény argumentuma?
4. Mit nevezünk a függvény értelmezési tartományának?
5. Mit nevezünk a függvény értékkészletének?
6. Hogyan adható meg a függvény?
7. Mit nevezünk koordinátasíknak?
8. Mit nevezünk abszcisszatengelynek?
9. Mit nevezünk ordinátatengelynek?
10. Mit nevezünk a koordináta-rendszer kezdőpontjának (origójának)?
11. Mit fed az „A pont a és b koordinátái” kijelentés?
12. Mit jelent az „$M(x; y)$” jelölés?
13. Mi a pont abszcisszája?
14. Mi a pont ordinátája?
15. Milyen függvényt nevezünk növekvőnek?
16. Milyen függvényt nevezünk csökkenőnek?
17. Mit nevezünk a függvény görbéjének (grafikonjának)?
18. Mi a függvény megadásának grafikus módszere?
19. Függvény-e a koordinátasík minden vonala?
20. Fogalmazzátok meg, mi a lineáris függvény!
21. Mi a lineáris függvény görbéje?
22. Helyes-e az állítás, hogy a Descartes-féle koordináta-rendszerben található minden vonal – valamely lineáris függvény görbéje?
23. Hogyan ábrázoljuk a lineáris függvényt?
24. Fogalmazzátok meg az $y = kx + b$ lineáris függvény tulajdonságait, ha $k > 0$; $k < 0$; $k = 0$!
25. Milyen függvényt nevezünk egyenes arányosságnak?
26. Milyen az egyenes arányosság görbéje?
27. Hogyan szerkeszthető meg az egyenes arányosság görbéje?
28. Fogalmazzátok meg az egyenes arányosság tulajdonságait!

FELKÉSZÜLÉS A TEMATIKUS ÉRTÉKELÉSRE

6. sz. tesztfeladatok

1. Az alábbi pontok közül melyiken megy át az $y = 3x + 2$ függvény görbéje?

a) $A(3; 5)$; b) $B(8; 13)$; c) $C(2; 7)$; d) $D(4; 14)$.

2. Az $y = 2x + 10$ függvény görbéje az alábbi koordinátájú pontokban metszi az Ox-tengelyt:

a) $(0; 0)$; b) $(-5; 0)$; c) $(0; 10)$; d) $(-5; 10)$.

3. Az $y = -x + 5$ függvény görbéje az alábbi koordinátájú pontokban metszi az Oy-tengelyt:

a) $(1; 1)$; b) $(0; 0)$; c) $(5; 0)$; d) $(0; 5)$.

4. Melyik lineáris az alábbi függvények közül?

a) $y = \frac{x}{2} + 3$; b) $y = \frac{2}{x} - 2$;

c) $y = \frac{x^2}{4} + 2$; d) $y = -\frac{2}{x^2} + 4$.

5. Melyik egyenes arányosság az alábbi függvények közül?

a) $y = 2x + 3$; b) $y = 3$; c) $y = x^2$; d) $y = 3x$.

6. Melyik függvény görbéje megy át az $A(-1; 2)$ ponton?

a) $y = 2x + 4$; b) $y = 3x - 2$; c) $y = 5x + 3$; d) $y = 2x$.

7. Az $y = kx + 7$ függvény görbéje k mely értékeinél megy át a $C(2; -1)$ ponton?

a) -4; b) 4; c) -3; d) 3.

8. Az x mely értékei nem tartoznak az $y = \frac{3}{x(x-2)}$ függvény értelmezési tartományához?

a) 0 és 3; b) -2; c) 0 és 2; d) 2 és 3.

9. Melyik függvény görbéje nem metszi az Ox-tengelyt?

a) $y = x$; b) $y = 2x + 3$; c) $y = -x$; d) $y = -3$.

10. Határozzátok meg az $y = -\frac{1}{4x+1}$ függvény értékét, ha $x = -0{,}2$!

a) 5; b) 0,5; c) -5; d) $-0{,}5$.

A 6. sz. dolgozat típusfeladatai

1°. Határozzátok meg a $y = 0{,}5x - 3$ függvény:

a) függvényértékét, ha a változó értéke 4-gyel egyenlő;

b) az argumentum (változó) értékét, amelynél a függvény értéke 5-tel egyenlő!

2°. Az $y = 7x - 3$ függvény görbéjének megszerkesztése nélkül mondjátok meg, hogy a függvény görbéje a következő pontok közül melyiken megy át: $A(1; 4)$, $B(2; 10)$, $C(3{,}5; 0{,}06)$, $D(0; -3)$.

3°. Ábrázoljátok az $y = -2x + 3$ függvényt! Fogalmazzátok meg a tulajdonságait!

4°. Határozzátok meg az $y = -3x + 5$ függvény és a koordinátatengelyek metszéspontjait!

5•. A téglalap egyik oldalának hossza x cm, a másik kétszer nagyobb. Fejezzétek ki képlettel a téglalap S területének x-től való függőségét! Állítsátok össze a kapott függvény értéktáblázatát argumentuma első öt természetes értékével!

6•. Milyen annak a lineáris függvénynek a képlete, amelynek görbéje átmegy az origón és az $A(-4; -6)$ ponton!

7•. Határozzátok meg az $y = \dfrac{6}{x^2 + 5x}$ függvény értelmezési tartományát!

8•. A javítóműhely berendezésének értéke 72 000 hrivnya, éves elhasználódásának nagysága pedig 3000 hrivnya. Fejezzétek ki a berendezés értékének függőségét az időtől, ha elhasználódásának nagysága évről évre azonos marad!

9••. Szerkesszétek meg a függvény görbéjét!

$$y = \begin{cases} x - 2, & x \geqslant 0, \\ -2x - 2, & x < 0. \end{cases}$$

10••. Az m mely értékénél lesz az $y = 2|x| + 1$ és $y = m$ függvények görbéinek egy közös pontja?



5. FEJEZET

LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK

A rendszer – egymással törvényszerű kapcsolatban álló vagy egymással kölcsönhatásban lévő meghatározott elemek halmaza.

Filozófiai szótár

Az egyenletrendszereket, az önálló egyenletekhez hasonlóan, bonyolult és nagyon fontos feladatok megoldására használják. Az egyenletrendszerek lehetnek egyváltozósak, kétváltozósak, háromváltozósak és többváltozósak. Ebben a fejezetben a legegyszerűbb, két egyenletből álló, kétváltozós egyenletrendszerekkel ismerkedünk meg.

Ebben a fejezetben a következőkről lesz szó:

- **kétváltozós egyenletek;**
- **a lineáris egyenlet görbéje;**
- **egyenletrendszerek;**
- **helyettesítési módszer;**
- **egyenlő együtthatók módszere;**
- **feladatmegoldás egyenletrendszer felállításával.**

24. §. KÉTVÁLTOZÓS EGYENLETEK



Eddig egyváltozós egyenletekkel foglalkoztunk. Azonban léteznek olyan feladatok is, melyeknek a megoldásához kétváltozós egyenletekre van szükség.

Feladat. 22 hrivnyáért könyveket és térképeket vásároltak. Egy könyv ára 5 hrivnya, egy térképé 3 hrivnya. Hány könyvet és hány térképet vettek?

Megoldás. Legyen x a könyvek, y pedig a térképek száma. A könyvekért $5x$ hrivnyát, a térképekért pedig $3y$ hrivnyát fizettek. Összesen 22 hrivnyát fizettek, ezért: $5x + 3y = 22$.

Ez egy kétváltozós egyenlet.

Kétváltozós egyenletek további példái:

$xy = 8, \quad 2x = 3y, \quad x^2 + xy = 7.$

Az $ax + by = c$ alakú egyenletet, amelyben x és y változók a, b és c adott számok, kétváltozós lineáris egyenletnek nevezzük. Ha $a \neq 0$ és $b \neq 0$, akkor pedig elsőfokú kétváltozós egyenletnek nevezzük.

Példák lineáris egyenletekre:

Az $5x + 3y = 22$, $x - 2{,}7y = 0$, $0x + 2y = 4$ egyenletek közül az első kettő elsőfokú kétváltozós egyenlet.

Az $x = -1$ és $y = 9$ számpár kielégíti az $5x + 3y = 22$ egyenletet, mivel $5 \cdot (-1) + 3 \cdot 9 = 22$. Az $x = 1$ és $y = 2$ számpár nem elégíti ki az adott egyenletet, mivel $5 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \neq 22$.

Minden olyan számpárt, amely kielégíti a kétváltozós egyenletet, vagyis igaz egyenlőséggé alakítja azt, az adott egyenlet megoldásának nevezzük.

Figyeljétek meg: egy megoldás két számból áll, az első helyen x értékét tüntetik fel, a másodikon y értékét. Ezeket nem nevezik az egyenlet gyökeinek.

A kétváltozós egyenlet megoldása céljából az első változót tetszőleges számmal helyettesítik be, és a kapott egyenletet megoldva meghatározzák a másik változó megfelelő értékét.

Példaként meghatározzuk a

$$3x - y = 5$$

egyenlet néhány megoldását.

Ha $x = 1$, akkor $3 \cdot 1 - y = 5$, és innen $y = -2$. Az $x = 1$ és $y = -2$ számpár az adott egyenlet megoldása, ami így is felírható: $(1; -2)$. Az x változóhoz a 2, 3, 4, … értékeket társítva ugyanígy határozható meg az egyenlet tetszőleges számú megoldása: $(2; 1)$, $(3; 4)$, $(4; 7)$, $(5; 10)$, … . Minden kétváltozós elsőfokú egyenlet végtelen sok megoldással rendelkezik.

Az $5x + 3y = 22$ egyenletnek szintén végtelen számú megoldása van, de a fenti feladatot közülük csak egy $(2; 4)$ elégíti ki.

Két kétváltozós egyenletet egyenértékűnek (ekvivalensnek) nevezzük, ha az egyik ugyanazokkal a megoldásokkal rendelkezik, mint a másik. Azok az egyenletek, melyeknek nincs megoldásuk szintén ekvivalensek.

A kétváltozós egyenletre nézve is igazak az egyváltozós egyenletek esetében megfogalmazott tulajdonságok.

A kétváltozós egyenlet mindkét oldala megszorozható vagy elosztható egy és ugyanazzal a nullától különböző számmal. Az egyenlet bármelyik tagja ellenkező előjellel átvihető egyik oldalról a másikra. Ilyen átalakítások után az eredetivel egyenértékű egyenletet kapunk.

Például a $8x = 7 + 3 \cdot (1 - 2y)$ egyenlet így alakítható át: $8x + 6y = 10$, $4x + 3y = 5$. Ezek az egyenletek egymással egyenértékűek.

Szeretnétek többet megtudni?

Néha a kétváltozós egyenlet egész számok halmazán való megoldására van szükség. Az olyan egész együtthatós algebrai egyenlet, amelynek csak egész megoldásai jöhetnek számba, *Diophantoszi egyenleteknek* nevezik. Az ilyen egyenletek megoldásának módszereit Diophantosz (III. sz.) ókori görög matematikus dolgozta ki. Például a könyvekkel és térképekkel kapcsolatos feladat az $5x + 3y = 22$ egyenletre vezetődik vissza, ahol x és y csak egész (sőt csak természetes) szám lehet.

Az y változó ebből az egyenletből x által fejezhető ki:

$$y = \frac{22 - 5x}{3}.$$

Az egyenlőségbe x-et addig helyettesítik az első természetes számokkal, amíg az y változó egész értékéhez nem jutnak. Ez fejben is megtehető. Ha $x = 2$, akkor $y = 4$. Más természetes megoldása az egyenletnek nem létezik. Ezért a feladatnak egyetlen megoldása van: 2 könyv és 4 térkép.

Ellenőrizzétek magatokat!

1. Milyen egyenletet nevezünk kétváltozós lineáris egyenletnek? Mondjatok példákat ilyen egyenletekre!
2. Mit nevezünk a kétváltozós egyenlet megoldásának?
3. Milyen kétváltozós egyenleteket nevezünk egyenértékűeknek (ekvivalenseknek)?
4. Fogalmazzátok meg az egyenletek alaptulajdonságait! Igazak-e ezek a kétváltozós egyenletek esetében?

Oldjuk meg együtt!

1. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket!

a) $x^2 + 6y^2 = -7$; b) $(x - 3)^2 + y^2 = 0$.

✔ M e g o l d á s. a) Az $x^2 + 6y^2$ kifejezés értéke x és y semmilyen értéke mellett nem lehet negatív szám. Ezért az egyenletnek nincs megoldása.

b) Az $(x - 3)^2 + y^2$ kifejezés értéke csak abban az esetben egyenlő nullával, ha $x - 3 = 0$ és $y = 0$. Vagyis az egyenletnek csak egy megoldása van: $x = 3$, $y = 0$.

2. Állítsatok fel kétváltozós egyenletet, amelynek a megoldása az (1; –5) számpár.

✔ Megoldás. Írjunk le bármilyen x és y változókat tartalmazó kéttagot, például $3x - 5y$. Ha $x = 1$, $y = -5$, akkor az adott kéttag értéke 28-cal egyenlő. Vagyis a $3x - 5y = 28$ egyenlet megfelel a feladat feltételének.

Számtalan más kétváltozós lineáris egyenlet létezik, amelyeknek ugyanilyen (1; –5) a megoldásuk.

Oldjátok meg fejben!

971. Nevezzétek meg a kétváltozós egyenleteket!

a) $3x - y = 5$; b) $x^3 + 4z = 9$;
c) $xy - 28 = 3$; d) $2y - xz = 0$;
e) $0{,}72 = 8t + 5$; f) $x - 2(3 - y) = 5$.

Melyik egyenlet lineáris, melyik elsőfokú?

972. Keressetek több megoldást az alábbi egyenletek számára!

a) $x + y = 5$; b) $x - y = 2$; c) $xy = 30$.

973. Van-e megoldásuk az egyenleteknek?

a) $x^2 + y^2 = -3$; b) $|x| + |y| = -2$; c) $x^4 + |y| = -8$.

974. Oldjátok meg az egyenleteket!

a) $|x| + |y| = 0$; b) $|x - 2| + |y| = 0$; c) $|x + 1| + |2y| = 0$.

A szint

975. Kielégítik-e az $x = 5$ és $y = -2$ értékei az $5x - 2y = 10$ egyenletet?

976. Melyik számpár az alábbi egyenletek megoldása: (3; 2), (4; –3), (–1; 4)?

a) $2x + 7y = 20$; b) $-2t + 3z = 0$;
c) $x - 4y = 16$; d) $5x - y = 23$.

977. Keressetek bármilyen két megoldást az alábbi egyenletek számára!

a) $2x + y = 7$; b) $2x - 3z = 10$; c) $4m + 5n = 21$.

978. Keressetek bármilyen három megoldást az alábbi egyenletek számára!

a) $x - y = 16$; b) $2x + y = 3{,}5$; c) $4a + 5b = 20$;
d) $5m - 2n = -8$; e) $\frac{1}{5}x - \frac{3}{4}y = 1$; f) $\frac{5}{6}a + \frac{1}{4}b = 1$.

979. Helyettesítsétek a csillagokat számokkal, hogy az (1; ∗), (2; ∗), (3; ∗), (∗; 2), (∗; 0), (∗; –5) számpárok kielégítsék az $x + 3y = 10$ egyenletet!

980. Állítsatok fel kétváltozós egyenleteket, amelyeknek a megoldásai az alábbi számpárok!

a) (3; 2); b) (–2; 5); c) (–4; –1); d) $\left(\frac{1}{2}; \frac{2}{5}\right)$.

981. A lineáris egyenletekből fejezzétek ki: 1) y-t x által; 2) x-et y által!

a) $3x + 4y = 12$; b) $5x - y = 15$; c) $x - 2y = 6$;

d) $2x - 5y = 1$; e) $10x - 15y = 0$; f) $\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}y = 0$.

982. Bizonyítsátok be, hogy az $x^2 + y^2 = -5$ egyenletnek nincs megoldása!

983. Van-e megoldásuk a kétváltozós egyenleteknek?

a) $x^2 + y^4 = -1$; b) $x^2 - y^2 = -3$; c) $x^2 + 3y^2 = 0$.

984. Hány megoldásuk van az egyenleteknek?

a) $x^2 + y^2 = 0$; b) $x^2 + (y - 2)^2 = 0$;
c) $x(x^2 + y^2) = 0$; d) $x^2 + y^2 = -2$.

Oldjátok meg a 985–986. egyenleteket!

985. a) $x^2 + (y - 1)^2 = 0$; b) $(x + 3)^2 + y^2 = 0$.

986. a) $(x - 3)^2 + (y + 1)^4 = 0$; b) $|x| + y^2 = 0$;
c) $(2x + 3)^4 + y^2 = 0$; d) $4x^2 + |y - 1| = 0$.

987. Határozzátok meg az a együttható értékét az $ax + 5y = 1$ egyenletben, ha ismeretes, hogy az $x = 3$ és $y = -4$ számpár az egyenlet megoldása!

B szint

988. Állítsatok fel x és y változós egyenleteket, amelyeket két számpár elégít ki!

a) (2; 1) és (1; –1); b) (–3; 2) és (0; –4);
c) (5; 0) és (–1; –3); d) (–2; 6) és (0; 0).

989. Bizonyítsátok be, hogy az egyenleteknek nincs megoldásuk!

a) $x^2 + (y - 1)^2 = -3$; b) $x^2 + y^2 + 2 = 2y$;
c) $|x| + y^2 + 1 = 0$; d) $|x - 1| + |x| + y^2 = 0$.

990. Keressetek egy olyan c számot, hogy a $(c; -c)$ számpár kielégítse az alábbi egyenleteket!

a) $2x + 3y = 20$; b) $5x - y = 12$; c) $x + 8y = 9$; d) $7x - 3y = 20$.

991. Keressetek egy olyan n számot, hogy az $(n; -n)$ számpár kielégítse az alábbi egyenleteket!

a) $5x + 4y = 3$; b) $9x - y = 70$; c) $x^2 + 4y = 0$; d) $x + |y| = 4$.

992. Az egyenleteknek n milyen értékeinél lesz csak egy megoldása?

a) $x^2 + y^2 = n$; b) $x^2 + |y| = n - 1$;
c) $|x| + |y| = n + 2$; d) $(x - 3)^4 + y^4 = n^4$.

Oldjátok meg a 993–995. egyenleteket!

993. a) $4x^2 + |y| = x^2$; b) $|x - 2| - y^4 = |3x - 6|$;
c) $10x - |y| = x^2 + 25$; d) $|y + 4| + |3x + 2| = 0$.

994. a) $x^2 + y^2 + 1 = 2x$; b) $x^2 + y^2 + 9 = 6x$;
c) $x^2 + 4y^2 + 1 = 4y$; d) $x^2 + 2x + y^2 + 5 = 4y$.

995. a) $x^2 + y^2 + 4 = -4x$; b) $x^2 + y^2 + 9 = 6y$;
c) $4x^2 + y^2 + 2 = 2(2x - y)$; d) $x^2 + y^2 + 8 = 4(y - x)$.

996. Határozzátok meg x és y azon természetes értékeit, amelyek kielégítik az alábbi egyenleteket!

a) $x + 4y = 13$; b) $5x + y = 14$; c) $3x + y = 16$;
d) $x + 12y = 37$; e) $3x + 2y = 22$; f) $4x + 5y = 29$.

997. Keressétek meg az egyenletek nem negatív egész számú megoldásait!

a) $x^2 + y^2 = 2$; b) $2x^2 + y^2 = 9$.

998. Van-e megoldásuk az egyenleteknek?

a) $x^2 + y^2 = 3$; b) $x^2 + 3y^2 = 32$.

999. Határozzátok meg a azon értékeit, amelyekkel a $3x - 2y^2 = 6$ egyenletnek a következő megoldásai lesznek!

a) $(a; 3)$; b) $(2; a)$; c) $(a; 0)$; d) $(8; a)$.

1000. Határozzátok meg az a együttható értékét az $5x - ay = 2$ egyenletben, ha kielégítik az alábbi számpárok!

a) $(2; 1)$; b) $(1; 2)$; c) $(4; 3)$; d) $(-5; 9)$.

Állítsátok fel az 1001–1008. kétváltozós egyenleteket, és oldjátok meg őket próbálgatással!

1001. Határozzátok meg azt a kétjegyű számot, amely 2-szer nagyobb számjegyei összegénél!

1002. Határozzátok meg azt a kétjegyű számot, amely: a) 3-szor; b) 5-ször; c) 6-szor; d) 8-szor nagyobb számjegyei összegénél!

1003. Határozzátok meg azt a kétjegyű számot, amely 2,5-szer nagyobb számjegyei szorzatánál!

1004. Határozzátok meg azt a kétjegyű számot, amely 4-szer nagyobb számjegyei összegénél és 2-szer nagyobb számjegyei szorzatánál! Oldjátok meg a feladatot feltétele első felének felhasználása nélkül!

1005. Ha valamely kétjegyű számot megszoroztok számjegyeinek összegével, akkor 370-et kaptok. Határozzátok meg ezt a számot!

1006. Az üzletben 7 és 8 m-es csöveket árusítanak. Hány ilyen cső szükséges 67 m vezeték elkészítéséhez?

1007. Egy fiúnak 2 és 5 kopijkás pénzérméi vannak. Hogyan tud 37 kopijkáért vásárolni anélkül, hogy az elárusítónak ne kelljen visszajárót adnia?

1008. A csokoládé 200 és 300 grammos dobozokba van csomagolva. Hány dobozzal kell vásárolni, hogy 3 kg csokoládétok legyen?

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

1009. Ábrázoljátok az $y = -1{,}5x + 2$ egyenletet!

1010. Bizonyítsátok be kétféleképpen az azonosságot!

a) $4a^4 + 1 = (2a^2 - 2a + 1)(2a^2 + 2a + 1)$;

b) $a^4 + a^2 + 1 = (a^2 - a + 1)(a^2 + a + 1)$.

1011. Milyen feltételek mellett lesz az $(a - 1)x = 3a - 3$ egyenletnek végtelen számú megoldása?

1012. Léteznek-e a-nak olyan értékei, amelyek mellett a $3x + 4 = a$ egyenletnek nincsenek megoldásai?

25. §. A KÉTVÁLTOZÓS LINEÁRIS EGYENLET GÖRBÉJE

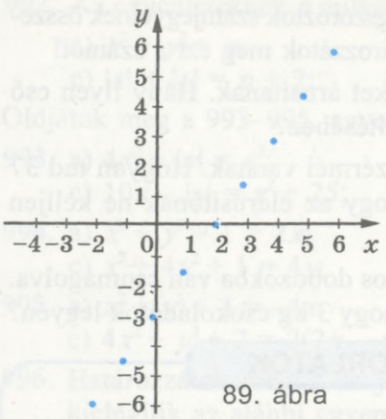


Vizsgáljuk meg a $3x - 2y = 6$ egyenletet. Az x változóhoz -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... értékeket társítva meghatározzuk az y értékeit. Megkapjuk az adott egyenlet megoldásait: $(-2; -6)$, $(-1; -4{,}5)$, $(0; -3)$, $(1; -1{,}5)$, $(2; 0)$, $(3; 1{,}5)$, ...

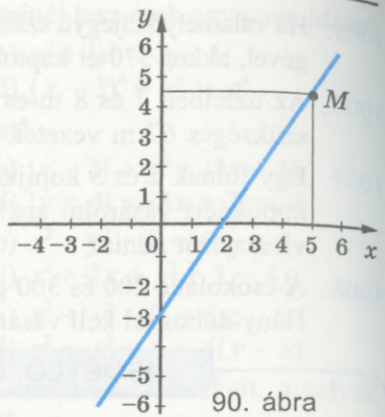
Ha a koordinátasíkban megjelöljük a számpároknak megfelelő pontokat, akkor kiderül, hogy mind egy egyenesen helyezkedik el (89. ábra). Ezt az egyenest az adott egyenlet *görbéjének* (*grafikonjának*) nevezzük.

A $3x - 2y = 6$ egyenletből meghatározzuk az y változót az x által:

$$2y = 3x - 6, \text{ ahonnan } y = \frac{3}{2}x - 3.$$



89. ábra



90. ábra

Ez függvény, amelynek görbéje a 90. ábrán látható. Általában véve, ha $b \neq 0$, akkor az $ax + by = c$ egyenletből az y változó kifejezhető x által. Az $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ egyenlőséget kapjuk, amely, a lineáris függvény képlete. Ennek a görbéje egyenes.

Minden elsőfokú kétváltozós egyenlet görbéje egyenes. A koordinátasíkban lévő minden egyenes valamely kétváltozós lineáris egyenlet görbéje.

Az egyenletgörbe minden pontjának koordinátái kielégítik az adott egyenletet. Például a $3x - 2y = 6$ egyenlet görbéje M pontjának abszcisszája 5 és ordinátája 4,5 (90. ábra). Az x és y ezen értékei kielégítik az adott egyenletet: $3 \cdot 5 - 2 \cdot 4{,}5 = 6$.

A lineáris egyenlet görbéje egyúttal valamely kétváltozós lineáris egyenlet görbéje. Például a $3x + 2y = 6$ és $y = -1{,}5x + 3$ egyenletek egyenértékűek, s az egyenértékű egyenleteknek egyforma a görbéjük.

A kétváltozós elsőfokú egyenlet görbéjének megszerkesztéséhez elegendő meghatározni két megoldását, aztán a koordinátasíkban megjelölni az ezeknek megfelelő pontokat, majd rajtuk keresztül meghúzni az egyenest.

- Ha az $ax + by = c$ egyenletben az egyik (a vagy b) együttható egyenlő nullával, akkor az egyenlet görbéje szintén egyenes lesz.
- Ha $a = 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, akkor a $by = c$ vagy $y = \frac{c}{b}$ egyenletet kapjuk. Az ilyen egyenlet görbéje egyenes, amely az Ox tengellyel párhuzamos.

• Ha $b = 0$, $a \neq 0$, $c \neq 0$, akkor az $ax = c$ vagy $x = \frac{c}{a}$ egyenletet kapjuk. Az ilyen egyenlet görbéje egyenes, amely az Oy tengellyel párhuzamos.

• Ha $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$, akkor a következő egyenletet kapjuk:

$$0 \cdot x + 0 \cdot y = 0.$$

Az ilyen egyenletet bármilyen számpár kiegyenlíti. Görbéje az egész koordinátasík.

• Ha $a = 0$, $b = 0$, $c \neq 0$, akkor a következő egyenletet kapjuk:

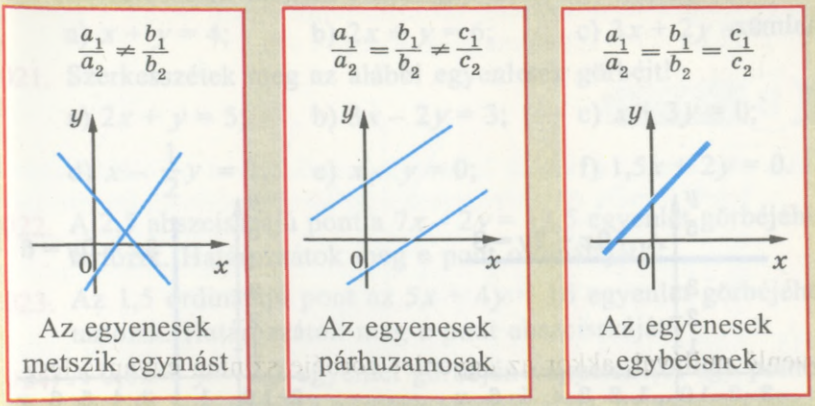
$$0 \cdot x + 0 \cdot y = c.$$

Az ilyen egyenletnek nincs egyetlen megoldása sem.

Szeretnétek többet megtudni?

Ismeretes, hogy két egyenes a síkban metszheti egymást, párhuzamos lehet egymással, egybeeshet. Ugyanilyen lehet a helyzete a koordinátasíkban két elsőfokú kétváltozós egyenlet görbéinek (91. ábra).

Az alábbi egyenletek görbéinek kölcsönös elhelyezkedése:
$a_1x + b_1y = c_1$ és $a_2x + b_2y = c_2$



91. ábra

Ellenőrizzétek magatokat!

1. Mondjatok példát elsőfokú kétváltozós egyenletre!
2. Milyen az elsőfokú kétváltozós egyenlet görbéje? Hogyan kell megszerkeszteni?
3. Mondjatok példát lineáris kétváltozós egyenletre!
4. Milyen lehet a lineáris kétváltozós egyenlet görbéje?

Oldjuk meg együtt!

1. Ábrázoljátok az egyenleteket!

a) $0x + 2y = 8$; b) $3x + 0y = 6$;

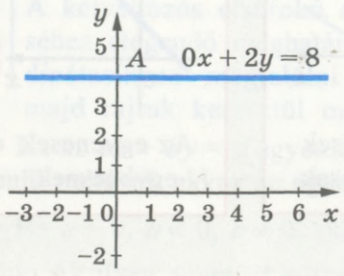
c) $0x + 0y = 0$; d) $0x + 0y = 7$.

M e g o l d á s. Az a) egyenletet kielégíti mindegyik $(c; 4)$ számpár, ahol c – tetszőleges szám. Ennek az egyenletnek a görbéje az x tengellyel párhuzamos egyenes, amely átmegy az $A(0; 4)$ ponton (92. ábra).

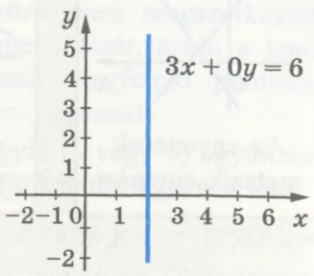
A b) egyenlet megoldásainak halmaza a $(2; p)$ végtelen számú számpár, ahol p – tetszőleges szám. Ennek az egyenletnek a görbéje az y tengellyel párhuzamos egyenes (93. ábra).

A c) egyenletet kielégíti minden számpár, görbéje az egész koordinátasík.

A d) egyenletnek nincs egyetlen megoldása sem, görbéje üres halmaz.



92. ábra



93. ábra

Oldjátok meg fejben!

1013. Hány megoldásuk van az egyenleteknek?

a) $0x + 0y = 20$; b) $0x + 0y = 0$; c) $0x + 2y = 0$;
d) $9x + 0y = 18$; e) $x + y = 0$; f) $x - y = 1$.

1014. Milyen függvény görbéje a $2x + 5y = 8$ egyenlet görbéje?

1015. Miben különbözik az $y = 0{,}5x - 2$ függvény görbéje az $x - 2y = 4$ egyenlet görbéjétől?

1016. Átmennek-e az origón az alábbi egyenletek görbéi?

a) $3x - 2y = 0$; b) $2x - 3y = 7$; c) $3(x - 4) = 4(y - 3)$.

1017. Határozzátok meg az alábbi egyenletek görbéi koordinátatengelyekkel való metszéspontjainak koordinátáit!

a) $x - 5y = 10$; b) $3x + 4y = 24$;
c) $6x + y = 0$; d) $2x - 4y = -1$.

A szint

1018. Az alábbi egyenletek görbéihez tartozik-e az $A(-3; 2)$ pont?

a) $5x + 12y = 9$; b) $2x + 3y = x$, c) $5(x + 3) = 4(y - 2)$.

1019. Találjátok meg a $3x + 4y = 8$ egyenlet öt megoldását, és jelöljétek meg a nekik megfelelő pontokat a koordinátasíkban! Milyen e pontok elhelyezkedése?

1020. Szerkesszétek meg az alábbi egyenletek görbéit!

a) $x + y = 4$; b) $2x + y = 6$; c) $3x + 2y = 0$.

1021. Szerkesszétek meg az alábbi egyenletek görbéit!

a) $2x + y = 5$; b) $3x - 2y = 3$; c) $x + 3y = 0$;
d) $x - \frac{1}{2}y = 1$, e) $x - y = 0$; f) $1{,}5x + 2y = 0$.

1022. A 2,5 abszcisszájú pont a $7x - 2y = 12{,}5$ egyenlet görbéjéhez tartozik. Határozzátok meg e pont ordinátáját!

1023. Az 1,5 ordinátájú pont az $5x + 4y = 16$ egyenlet görbéjéhez tartozik. Határozzátok meg e pont abszcisszáját!

1024. A $0{,}6x + y = 2{,}2$ egyenlet görbéjén vegyetek fel egy pontot! Milyen lesz ennek a pontnak az ordinátája, ha az abszcisszája a következőkkel egyenlő?

a) -8; b) -3; c) 2; d) 7.

1025. Határozzátok meg a $11x - 4y = 80$ egyenlet görbéjén felvett pont abszcisszáját, ha ordinátája a következőkkel egyenlő!

a) -31; b) -20; c) $-3{,}5$; d) 2.

1026. Mivel egyenlő c értéke, ha ismeretes, hogy a $2x + 5y = c$ egyenlet görbéje átmegy az alábbi pontokon?

a) $A(3; 1)$; b) $B(-5; 2)$; c) $C(-3; 4)$; d) $D(-2; -1)$.

1027. Milyennek kell lennie az $ax - 4y = 12$ egyenlet a együtthatójának, hogy az egyenlet görbéje átmenjen az alábbi ponton!

a) $M(10; 2)$; b) $N(-1; -1)$; c) $P(2; -3)$; d) $Q(6; 6)$.

1028. A $6x + by = 0$ egyenlet görbéje b mely értékeinél megy át az alábbi ponton!

a) $N(2,3)$; b) $O(0; 0)$; c) $P(-4; 8)$; d) $R(-3; -2)$.

1029. Milyen feltételek mellett lesz az $y = 1{,}5x + c$ függvény görbéje a $3x - 2y = 4$ egyenlet görbéje?

1030. Határozzátok meg az alábbi egyenletek görbéi koordinátatengelyekkel való metszéspontjainak koordinátáit!

a) $3x + 2y = 6$; b) $x + 5y = 10$;
c) $3x - 2y = 6$; d) $-x - 5y = 10$.

1031. Ábrázoljátok közös koordináta-rendszerben az $x - y = 3$ és $3x + y = 1$ egyenletek görbéit! Határozzátok meg a görbék metszéspontjainak koordinátáit!

1032. Ábrázoljátok közös koordináta-rendszerben a $2x + 3y = 5$ és $2x + 3y = 10$ egyenletek görbéit!

1033. Ábrázoljátok közös koordináta-rendszerben az $5x - y = 7$ és $10x - 2y = 14$ egyenletek görbéit!

B szint

1034. Ábrázoljátok közös koordináta-rendszerben az alábbi egyenletek görbéit, és határozzátok meg metszéspontjaik koordinátáit!

a) $x + y = 5$ és $x - y = -1$; b) $2x - y = 6$ és $4x - 3y = 12$;
c) $2x + 3y = -9$ és $x + 3y = -6$;
d) $4x - 5y = 0$ és $2x - 5y = -10$.

1035. Ábrázoljátok közös koordináta-rendszerben az alábbi egyenletek görbéit!

a) $4x + 5y = 20$ és $-4x + 5y = 20$; b) $2x + 3y = 6$ és $2x - 3y = 6$;
c) $5x - 2y = 10$ és $10x - 4y = 20$;
d) $-3x + 2y = 6$ és $-3x + 2y = -6$.

1036. Bizonyítsátok be, hogy az $5x + 6y = 13$ egyenlet görbéje nem megy át az origón!

1037. Bizonyítsátok be, hogy a $0x + 3y = 2$ egyenlet görbéje valamennyi pontjának ordinátája nem negatív!

1038. Ábrázoljátok az alábbi egyenletek görbéit!

a) $0x + 5y = 10$; b) $3x + 0y = 9$; c) $x - y = 0$.

1039. Milyen az alábbi egyenletek görbéje?

a) $2x + 0y = 0$; b) $0x + 0y = 0$, c) $0x + 0y = 13$.

1040. Ábrázoljátok az alábbi egyenletek görbéit!

a) $x + 0y = 4$; b) $0 \cdot x + 3y = 6$; c) $2x = 6$; d) $0 \cdot x - y = 3$;
e) $2x + 0 \cdot y = 4$; f) $-y = 1$; g) $x = 0$; h) $y = 0$.

1041. Az a – d esetek mindegyikére állítsatok fel három olyan egyenletet, amelyek görbéi átmennek ugyanazon az A ponton!

a) $A(4; 3)$; b) $A(-2; 4)$; c) $A(0; -3)$; d) $A(1; 0)$.

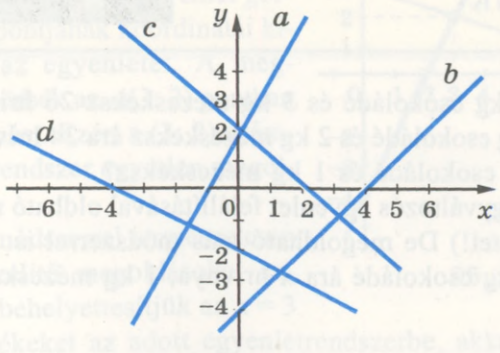
1042. Állítsatok fel olyan egyenletet, amelynek görbéje átmegy az origón és az alábbi pontokon!

a) $X(2; 2)$; b) $Y(-5; 2)$; c) $Z(-4; -6)$; d) $T(3; -1)$.

1043. Állítsatok fel olyan egyenletet, amelynek görbéje az alábbi pontokban metszi a koordinátatengelyeket!

a) $A(-3; 0)$ és $B(0; 1)$; b) $M(4; 0)$ és $N(0; 5)$;
c) $P(0; -3)$ és $Q(3; 0)$; d) $C(0; -4)$ és $D(-2; 0)$.

1044*. Írjátok le azokat az egyenleteket, amelyeknek a görbéi a 94. ábrán láthatók!



94. ábra

1045. Állítsatok fel olyan egyenletet, amelynek görbéje a $2x - y = 0$ egyenlet görbéjével párhuzamosan megy át az alábbi pontokon!
a) $K(4; 2)$; b) $L(0; 5)$; c) $M(-3; 0)$ d) $N(2; -1)$.

1046*. Ábrázoljátok az egyenletek görbéit!
a) $|x| - y = 0$; b) $|x| + y = 0$; c) $x - |y| = 0$; d) $x + |y| = 0$.

1047*. Igaz-e, hogy az $|x - 2| + |y - 3| = 0$ egyenletnek egy $K(2; 3)$ pont a görbéje? És az $|x - 2| = |y - 3|$ egyenlet görbéjének?

Ábrázoljátok az 1048–1049. egyenletek görbéit!

1048*. a) $|y| = 2 - x$; b) $|y| = 3x - 4$; c) $|y| + |2 - x| = 0$.

1049*. a) $x^2 - 9y^2 = 0$; b) $4x^2 - y^2 = 0$; c) $(y - 2)^2 = (x + 1)^2$.

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

1050. Az egymástól 350 km-re lévő két gépkocsi 120 km/h sebességgel közeledik egymáshoz. Milyen lesz a távolság közöttük: a) fél óra múlva; b) 2 óra múlva?

1051. Hány százalékkal nagyobb 3,2 2,5-nél?

1052. Oldjátok meg a következő egyenleteket!
a) $x^2 = 64$; b) $(x - 2)^2 = 25$.

26. §. EGYENLET-RENDSZEREK



Feladat. 4 kg csokoládé és 3 kg mézeskeksz 26 hrivnyába kerül, miközben 6 kg csokoládé és 2 kg mézeskeksz ára 34 hrivnya. Mennyibe kerül 1 kg csokoládé és 1 kg mézeskeksz?

A feladat egyváltozós egyenlet felállításával oldható meg. (Állítsuk fel az egyenletet!) De megoldható más módszerrel is.

Legyen 1 kg csokoládé ára x hrivnya, 1 kg mézeskekszé pedig y hrivnya.
Ekkor

$$4x + 3y = 26 \text{ és } 6x + 2y = 34.$$

Két kétváltozós egyenletet kaptunk. Az x és y olyan értékeit kell meghatároznunk, amelyek egyidejűleg mindkét egyenletet kielégítik, azaz az egyenletek mindegyikét igaz egyenlőséggé alakítják át. Másként fogalmazva: meg kell találni mindkét egyenlet k ö z ö s megoldását, vagy meg kell oldani az adott egyenletrendszert.

Ha a két vagy több egyenlet közös megoldását kell megtalálni, akkor azt mondjuk, hogy ezek az egyenletek *egyenletrendszert* alkotnak. Az egyenletrendszert kapcsos zárójellel fogjuk össze:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 26, \\ 6x + 2y = 34. \end{cases}$$

Az egyenletrendszer megoldása a – valamennyi egyenletének közös megoldását jelenti.

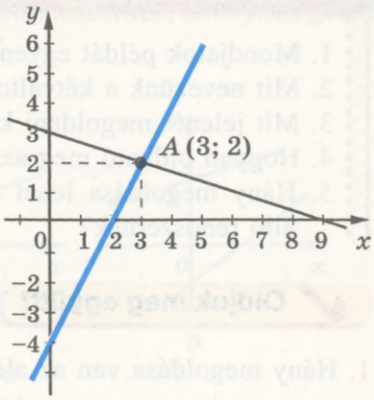
Például a (3; 2) számpár az

$$\begin{cases} x + 3y = 9, \\ 2x - y = 4 \end{cases} \qquad (*)$$

egyenletrendszer megoldása, mivel $3 + 3 \cdot 2 = 9$ és $2 \cdot 3 - 2 = 4$.

Megoldani az egyenletrendszert annyit jelent, mint meghatározni valamennyi megoldásának halmazát.

Az egyenletrendszer *grafikus módszerrel* is megoldható. Oldjuk meg például a fenti (*) egyenletrendszert. Közös koordinátasíkban megszerkesztjük a rendszer mindkét egyenletének görbéjét (95. ábra). Az $x + 3y = 9$ egyenlet görbéje minden pontjának koordinátái kielégítik ezt az egyenletet. A $2x - y = 4$ egyenlet görbéje minden pontjának koordinátái kielégítik ezt az egyenletet. A megszerkesztett görbék az $A(3; 2)$ pontban metszik egymást. Ezért a (3; 2) számpár az adott rendszer egyetlen megoldása.



95. ábra

Grafikus módszerrel természetesen csak megközelítő megoldásokat kapunk. De ha behelyettesítjük az $x = 3$ és $y = 2$ értékeket az adott egyenletrendszerbe, akkor meggyőződhetünk arról, hogy a (3; 2) számpár pontos megoldás.

Vajon a két egyenletből álló mindegyik egyenletrendszernek csak egy megoldása van? Nem. Például a

$$\begin{cases} 3x - 2y = 6, \\ 6x - 4y = 12 \end{cases}$$

egyenletrendszernek végtelen számú megoldása van. Mindkét egyenlet görbéje ugyanis egyazon egyenes (erről győződjetek meg önállóan). Tehát ezen egyenes minden pontjának koordinátái, például a $(-2; -6)$, $(-1; -4{,}5)$, $(0; -3)$, $(1; -1{,}5)$, $(2; 0)$, ... – az adott rendszer megoldása.

Vannak olyan egyenletrendszerek, melyeknek nincs egyetlen megoldásuk sem. Ezeknek az egyenleteknek a görbéi párhuzamos egyenesek (lásd a 91. ábrát).

Szeretnétek többet megtudni?

Már tudjátok, hogy az egyenletek és függvények sok feladat célszerűen alkalmazható matematikai modelljei. Az egyenletrendszereket ugyancsak matematikai modellekként használják. Előfordul, hogy a feladat feltételének megfelelően kétváltozós egyenletrendszer felállítása könnyebb, mint egy egyenleté. Ráadásul a kétváltozós egyenletrendszert sokszor könnyebb megoldani, mint az ugyanazon feladat alapján felállított egyváltozósat.

Léteznek három- és többváltozós egyenletrendszerek.

Ellenőrizzétek magatokat!

1. Mondjatok példát egyenletrendszerekre!
2. Mit nevezünk a kétváltozós egyenletrendszer megoldásának?
3. Mit jelent „megoldani két egyenletből álló rendszert”?
4. Hogyan oldható meg az egyenletrendszer grafikusan?
5. Hány megoldása lehet a két kétváltozós lineáris egyenletből álló rendszernek?

Oldjuk meg együtt!

1. Hány megoldása van az alábbi egyenletrendszernek?

$$\begin{cases} 2x - 7y = 5, \\ 7x - 2y = 5. \end{cases}$$

M e g o l d á s. Mivel $2 : 7 \neq (-7) : (-2)$, akkor a rendszernek egyetlen megoldása van (lásd a 91. ábrát). Ellenőrizzétek grafikusan!

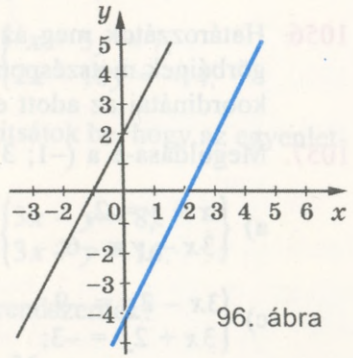
2. Oldjuk meg grafikusan az alábbi egyenletrendszert!

$$\begin{cases} x - 0{,}5y = 2, \\ 2x - y = -2. \end{cases}$$

✔ M e g o l d á s. Határozzuk meg az egyenletrendszer görbéinek a koordinátatengelyekkel alkotott metszéspontjait!

x	0	2
y	−4	0

x	0	−1
y	2	0



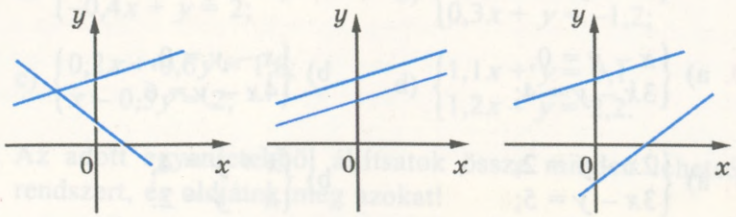
96. ábra

Szerkesszük meg az adott egyenletek görbéit (96. ábra). Ezek a görbék párhuzamos egyenesek; nincsenek közös pontjaik.

F e l e l e t. Az egyenletrendszernek nincsenek megoldásai.

Oldjátok meg fejben!

1053. Hány megoldása van az egyenletrendszernek, amelynek görbéi a 97. ábrán vannak ábrázolva?



97. ábra

1054. Hány megoldása van az egyenletrendszernek?

a) $\begin{cases} 3x + 4y = 2, \\ 9x + 12y = 6; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y = 5, \\ 4x + 2y = 10; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - 5y = 4, \\ -2x + 10y = -8. \end{cases}$

A szint

1055. Megoldása-e a (2; –1) számpár az egyenletrendszernek?

a) $\begin{cases} x + y = 1, \\ x - 2y = 6; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 1, \\ 4x - 3y = 11; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - y = 3, \\ 2x + y = 3. \end{cases}$

1056. Határozzátok meg az $x + 2y = 0$ és $x - y = -6$ egyenletek görbéinek metszéspontját! Mutassatok rá, hogy a metszéspont koordinátái az adott egyenletek megoldásai!

1057. Megoldása-e a (–1; 3) számpár az egyenletrendszereknek?

a) $\begin{cases} x + y = 2, \\ 3x - y = -6; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + y = 0, \\ x + 2y = 5; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 2y = -9, \\ 3x + 2y = -3; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x - y = -4, \\ x - 2y = -7. \end{cases}$

1058. Állítsatok fel olyan egyenletrendszereket, amelyeknek az alábbi megoldásaik vannak!

a) (3; 4); b) (2; –5); c) (0; 3); d) (–2; 0).

Oldjátok meg grafikusan az 1059–1063. lineáris egyenletrendszereket!

1059. a) $\begin{cases} x + y = 6, \\ x - y = 2; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 7, \\ x - y = 3; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y = -2, \\ x + 3y = -10; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x + y = 4, \\ 3x - y = 1. \end{cases}$

1060. a) $\begin{cases} x - y = 0, \\ 3x - y = 4; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 0, \\ 4x - y = 6. \end{cases}$

1061. a) $\begin{cases} 2x - y = 2, \\ 3x - y = 5; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 4, \\ x - y = 2. \end{cases}$

1062. a) $\begin{cases} 4x - y = 5, \\ 3x + 2y = 12; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x + 4y = 13, \\ 3x + 5y = 13. \end{cases}$

1063. a) $\begin{cases} 2x + \frac{1}{2}y = 6, \\ 4x + y = 12; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = -2, \\ 3x - 3y = 6; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x - 2y = -3, \\ 2x - 3y = 1; \end{cases}$ d) $\begin{cases} -3x + 5y = 1, \\ 4x - y = 10. \end{cases}$

1064. Hány megoldása van az egyenletrendszereknek?

a) $\begin{cases} x + 3y = 5, \\ 8x + 9y = 10; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 4y = 1, \\ 2x - 8y = 3; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 8, \\ y = 15; \end{cases}$ d) $\begin{cases} -x + 5y = 7, \\ 2x - 10y = -14. \end{cases}$

1065. Görbe megrajzolása nélkül bizonyítsátok be, hogy az egyenletrendszernek nincs megoldása!

a) $\begin{cases} 8x + 2y = 15, \\ 8x + 2y = 35; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - y = 8, \\ 3x - y = 16. \end{cases}$

1066. Hány megoldása van az egyenletrendszernek?

$$\begin{cases} 6x + 10y = 36, \\ 3x + 5y = 18. \end{cases}$$

Találjátok meg három bármilyen megoldását!

B szint

1067. Oldjátok meg grafikusan az egyenletrendszereket!

a) $\begin{cases} 0{,}5x + y = 2, \\ -0{,}4x + y = 2; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 1{,}5x - y = 3, \\ 0{,}3x + y = -1{,}2; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 0{,}2x + 0{,}6y = 1{,}8; \\ x - 0{,}5y = 2; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 1{,}1x + y = 0{,}1, \\ 1{,}2x - y = 2{,}2. \end{cases}$

1068. Az adott egyenletekből állítsatok össze minden lehetséges rendszert, és oldjátok meg azokat!

$3x - 2y = -6$; $x + 2y = -2$; $5x + 2y = 22$.

1069. Oldjátok meg az egyenletrendszereket grafikusan, és ellenőrizzétek a kapott eredmények pontosságát!

a) $\begin{cases} 5x - 4y = 1, \\ 12x + 22y = 33; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 2y = 7, \\ 11x - 20y = 55. \end{cases}$

Kielégíti-e az a) egyenletrendszert az alábbi számpár?

$$\left(\frac{77}{79}; \frac{153}{158}\right).$$

Kielégíti-e a b) egyenletrendszert az alábbi számpár?

$$\left(3\frac{2}{41}; -1\frac{3}{41}\right).$$

1070. Az a – d esetek mindegyikében állítsatok fel kétváltozós egyenletet, amelynek a rendszerben: 1) végtelen számú megoldása van; 2) nincs egyetlen megoldása sem; 3) egy megoldása van!

a) $3x - y = 5$; b) $3x - 2y = 2$;
c) $5x + 4y = 1$; d) $x + 3y = -4$.



1071. Az a mely értékeinél van a rendszernek: 1) egy megoldása; 2) végtelen számú megoldása? Határozzátok meg ezeket a megoldásokat az a) és b) rendszer mindegyike esetében!

a) $\begin{cases} 3x - y = 3, \\ x - ay = 1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 7x + 2y = 11, \\ ax + 4y = 22. \end{cases}$

1072. Az a) és b) esetek mindegyikében határozzátok meg, hogy a b mely értékeinél: a) nincs a rendszernek megoldása; 2) egy megoldása van!

a) $\begin{cases} bx + 2y = 7, \\ 3x - y = 5; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x + 8y = 5, \\ 2x + by = -1. \end{cases}$

1073. Van-e megoldása az alábbi egyenletrendszernek?

a) $\begin{cases} x - y = 1, \\ x + y = 3, \\ 2x = 6; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - y = 1, \\ x + y = 3, \\ 4y = 8; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + 7y = 39, \\ 3x - y = 1, \\ 11x - 4y = 1. \end{cases}$

1074*. A k mely értékeinél van az egyenletrendszereknek megoldásuk?

a) $\begin{cases} 3x - 2y = -1, \\ 5x - 3y = 2, \\ 2x + ky = 25; \end{cases}$ b) $\begin{cases} k(x + y) + 5x = 2, \\ 9x + 11y = 7, \\ 4x - 3y = 11. \end{cases}$

1075*. Oldjátok meg grafikusan a rendszereket!

a) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0, \\ 2x - y = 6; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 9, \\ 2x + y = 5. \end{cases}$

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

1076. Számítsátok ki a kifejezések értékeit!

a) $3x^3 - 2x^2 - x(3x^2 + 2x - 5)$, ha $x = 5$;

b) $(8 - a^3)a + (a^2 - 8a + 5)a^2$, ha $a = 0{,}2$.

1077. Szorozzátok meg a kéttagokat!

a) $x + 3$ és $x - 2$; b) $a - 5$ és $a + 4$;

c) $m + n$ és $m - n$; d) $3 - z$ és $5 + z$.

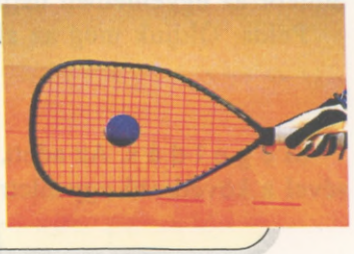
1078. Írjátok le többtag alakjában azt a számot, amelyben a százas, b tízes és c egyes van!

1079. Melyik az a szám, amely 7-tel való szorzáskor 30-cal nő?

1080. Melyik az a szám, amely 6-tal való osztáskor 12-vel csökken?

1081. A bronz előállításához 17 rész rezet, 2 rész cinket és egy rész ónt vesznek. Hány kilogramm rezet, cinket és ónt kell venni 200 kg bronz elkészítéséhez?

27. §. BEHELYETTESÍTŐ MÓDSZER



Az egyenletek megoldásának grafikus módszere terjedelmes, és általában megközelítő megoldást ad. Ezért az egyenletrendszereket gyakran más módon oldják meg. Ezek egyike a *behelyettesítő módszer.*

Kezdjük egy példával, oldjuk meg a következő egyenletrendszert!

$$\begin{cases} 2x - y = 4, \\ x + 3y = 9. \end{cases}$$

Fejezzük ki a második egyenletből az x változót:

$$x = 9 - 3y.$$

Mivel a rendszer első egyenletét a változók ugyanazon értékeinek kell kielégíteniük mint a másodikat, ezért az első egyenletben az x

változót a kapott $9 - 3y$ kifejezéssel helyettesítjük. Ekkor egyváltozós egyenletet kapunk:

$$2(9 - 3y) - y = 4,$$

ahonnan $18 - 6y - y = 4$, $y = 2$.

A kapott $y = 2$ értéket visszahelyettesítjük az $x = 9 - 3y$ egyenletbe, akkor

$$x = 9 - 3 \cdot 2 = 3$$

értéket kapjuk.

Tehát az egyenletrendszer megoldása a (3; 2) számpár.

Az egyenletrendszer behelyettesítő módszerrel való megoldásához a következőket kell elvégezni:
1) az egyenletrendszer valamelyik egyenletéből kifejezni az egyik ismeretlent;
2) a kapott kifejezést behelyettesíteni a másik egyenletbe;
3) megoldani a kapott egyváltozós egyenletet;
4) kiszámítani a másik ismeretlen értékét.

Ezzel a módszerrel megoldható bármely lineáris kétváltozós egyenletrendszer. A behelyettesítő módszert akkor legcélszerűbb alkalmazni, amikor az egyenletben bármelyik változó együtthatója 1.

Példa. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert!

$$\begin{cases} 3x = 2(y + 6), \\ 6x + 3y = 1 + x. \end{cases}$$

M e g o l d á s. Az adott egyenletek lineáris egyenletekre cserélésével a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 12, \\ 5x + 3y = 1; \end{cases}$$

$$3x = 2y + 12,\ x = \frac{2}{3}y + 4,\ 5\left(\frac{2}{3}y + 4\right) + 3y = 1,$$

$$\frac{10}{3}y + 20 + 3y = 1,\ \frac{19}{3}y = -19,\ y = -3,\ x = \frac{2}{3}(-3) + 4 = 2.$$

F e l e l e t. (2; –3).

Szeretnétek többet megtudni?

Néha egyik egyenletrendszerből a másikba nem csak egyes változók, hanem egy egész kifejezés értéke behelyettesíthető. Például az alábbi egyenletrendszer

$$\begin{cases} 3 \cdot (2x - 4y) - y = 44, \\ 2x - 4y = 14 \end{cases}$$

megoldása során a $2x - 4y$ kifejezés értéke a második egyenletből az elsőbe helyettesíthető:

$$3 \cdot 14 - y = 44,\ y = 42 - 44,\ y = -2.$$

Akkor

$$2x - 4 \cdot (-2) = 14,\ 2x = 14 - 8,\ x = 3.$$

F e l e l e t. $x = 3$, $y = -2$.

E l l e n ő r z é s. $3 \cdot (6 + 8) + 2 = 42 + 2 = 44$,

$$2 \cdot 3 - 4(-2) = 6 + 8 = 14.$$

A meghatározott (3; –2) számpár kielégíti az adott egyenletrendszert.

Ellenőrizzétek magatokat!

1. Mondjatok példákat kétváltozós egyenletrendszerekre!
2. Mit jelent: megoldani a kétváltozós egyenletrendszert?
3. A lineáris kétváltozós egyenletrendszerek megoldásának milyen módszereit ismeritek?
4. Hogyan oldható meg a kétváltozós egyenletrendszer behelyettesítő módszerrel?

Oldjuk meg együtt!

1. Oldjuk meg az egyenletrendszert!

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 6, \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 2. \end{cases}$$

M e g o l d á s. A második egyenletből kifejezzük az $\frac{y}{3}$ kifejezést, és behelyettesítjük az első egyenletbe:

$$\frac{y}{3} = \frac{x}{2} - 2,\ \frac{x}{2} + \frac{x}{2} - 2 = 6,\ x - 2 = 6,\ x = 8.$$

Ekkor $\frac{y}{3} = \frac{8}{2} - 2$, $\frac{y}{3} = 2$, $y = 6$.

F e l e l e t. (8; 6).

Oldjátok meg fejben!

1082. Fejezzétek ki az alábbi egyenletekből az y változót!

a) $2x - y = 3$; b) $5x + y = 0$; c) $x - 2y = 0$.

1083. Fejezzétek ki az alábbi egyenletekből az x változót!

a) $x - y = 2$; b) $x + 3y = 5$; c) $2x + 5y = 0$.

A szint

1084. Fejezzétek ki az alábbi egyenletekből az y változót!

a) $3x - y = 8$; b) $5x + 2y = 7$;

c) $0{,}5x - 0{,}3y = 1{,}5$; d) $\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = 5$.

1085. Fejezzétek ki az alábbi egyenletekből az x változót!

a) $2x + 4y = -7$; b) $12x - 5y = 11$;

c) $2{,}5x + y = 1{,}5$; d) $\frac{3}{5}x + \frac{1}{2}y = \frac{2}{5}$.

Oldjátok meg az 1086–1099. egyenletrendszereket behelyettesítési módszerrel!

1086. a) $\begin{cases} x - 2y = 5, \\ 3x + 5y = 26; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 4y = 55, \\ 7x - y = 56. \end{cases}$

1087. a) $\begin{cases} 3x - y = 1, \\ 3x + 8y = 19; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 2y = 27, \\ x + 5y = 35. \end{cases}$

1088. a) $\begin{cases} 3x + 4z = 85, \\ 5x + 4z = 107; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x + 7z = 101, \\ 7x - z = 55. \end{cases}$

1089. a) $\begin{cases} 15y - 8z = 29, \\ 3y + 2z = 13; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 8t = 59, \\ 6x + 5t = 107. \end{cases}$

1090. a) $\begin{cases} y - 2z = 6, \\ y + 2z = 10; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2z + 3y = 216, \\ z + y = 82. \end{cases}$

1091. a) $\begin{cases} 2p + q = 11, \\ 5p - 2q = 41; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 6a - 3b = 4, \\ 2a - b = 5. \end{cases}$

1092. a) $\begin{cases} 9x + 2y - 4 = 0, \\ 8x + y - 2 = 0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5u + 7v + 3 = 0, \\ 10u - v + 6 = 0. \end{cases}$

1093. a) $\begin{cases} 4x - 3y = 8, \\ 8x - 6y = 9; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 0{,}5x - y = 0{,}5, \\ x - 2y = 1. \end{cases}$

1094. a) $\begin{cases} 14u - 9v = 24, \\ 7u - 2v = 17; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x + 4y = 13, \\ 3x + 5y = 13. \end{cases}$

1095. a) $\begin{cases} 3a - 5b = 13, \\ 2a + 7b = 81; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2a - 7b = 8, \\ 4a - 9b = 19. \end{cases}$

1096. a) $\begin{cases} 6x - 4y = 5, \\ 8x - 3y = 2; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 12y + 15x = 8, \\ 16y + 9x = 7. \end{cases}$

1097. a) $\begin{cases} 4(x + 2y) = 5x + 6, \\ 3(2x - y) = 24y + 6; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5(x - 3y) = 2x + 7, \\ 3(x + 6y) = 9y + 15. \end{cases}$

1098. a) $\begin{cases} 5x - 2 = 4(x + 2y) - 8, \\ 3(2x - y) + 6 = 24y + 12; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 3 = 5(x - y), \\ 2(3x - 1) = 4y - 5. \end{cases}$

1099. a) $\begin{cases} 4(x - 3z) + 33z = 50, \\ 5(x + 2z) - 3x = 18; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x + 7 = 5(x - t), \\ 3(x + 6t) - 9t = 15. \end{cases}$

B szint

Oldjátok meg az 1100–1102. egyenletrendszereket!

1100. a) $\begin{cases} 3{,}5x + 0{,}5y = 0{,}5, \\ x + 0{,}25y = 1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 0{,}2x + y = 7, \\ 1{,}5x + y = 13{,}5; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 0{,}6x + 0{,}8y = 1, \\ x + 4y = 45; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 0{,}5x - y = 1{,}5, \\ 0{,}3x - 0{,}4y = 1. \end{cases}$

1101. a) $\begin{cases} 19x - 21y = 17, \\ 5x + 14y = 24; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 8x - 33y = 19, \\ 12x + 55y = 19; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + 1 = 5(3 - 2y), \\ 4(x - 1) = 2(8{,}5 - 5y); \end{cases}$ d) $\begin{cases} 6(x - 2y) = 7 - 9y, \\ 8x + 3y = 5(2x + 1). \end{cases}$

1102. a) $\begin{cases} \frac{7+x}{2} = \frac{y+13}{3}, \\ 5x - 3y = 8; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{5x-3y}{4} = \frac{x-5y}{3}, \\ 7x + y = 12; \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{2x-5}{5} = \frac{y-2}{4}, \\ x - 2y = 2; \end{cases}$ d) $\begin{cases} \frac{4x-1}{3} = \frac{2y+7}{5}, \\ 4x - y = -9. \end{cases}$

Oldjátok meg az 1103–1106. egyenletrendszereket!

1103. a) $\begin{cases} u + \frac{1}{3}(u + v - 3) = 14, \\ \frac{1}{3}v - \frac{1}{6}(u + v) = \frac{5}{6}; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 7(2x + y) - 5(3x + y) = 6, \\ 3(x + 2y) - 2(x + 3y) = -6. \end{cases}$

1104. a) $\begin{cases} \frac{1}{3}(x+y) - \frac{1}{4}(x-y) = 5, \\ \frac{1}{12}(x+y) + \frac{1}{3}(x-y) = 6; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{1}{4}(y - 1) - \frac{1}{3}(x + 1) = 2, \\ \frac{1}{4}(x + 3) - \frac{1}{3}(y + 1) = -4. \end{cases}$

1105. a) $\begin{cases} \frac{x+y}{4} - \frac{x-y}{3} = 10, \\ \frac{x+y}{8} + \frac{x-y}{6} = 5; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{x+2y}{4} = 3 + \frac{3x-5y}{2}, \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = 7 - \frac{1}{4}(x - 2y). \end{cases}$

1106. a) $\begin{cases} 0{,}2a + 4b = -5 - 0{,}8a, \\ 2{,}5a + 0{,}5b = 1 - \frac{1}{2}b; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 0{,}3x - 2{,}8y = 0{,}7(3 - y), \\ 1{,}2x + 1{,}1y = 3 - 17{,}5y. \end{cases}$

1107. Az alábbi egyenletek görbéinek megszerkesztése nélkül határozzátok meg metszéspontjaik koordinátáit!

a) $x + y = 37$ és $x - y = 5$; b) $2x - 3y = 16$ és $x + 2y = 1$;
c) $x + 2y = 8$ és $x - 2y = 2{,}5$; d) $4x - 7y = 4$ és $20x + 3y = 1$.

1108*. *Feladat egy XVI. századi francia tankönyvből.* Oldjátok meg az egyenletrendszert!

$$\begin{cases} x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z = 14, \\ y + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}z = 8, \\ z + \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}y = 8! \end{cases}$$

1109*. *É. Bézout-féle feladat (1730–1783).* Oldjátok meg az egyenletrendszert!

$$\begin{cases} 5x + 3y = 65, \\ 2y - z = 11, \\ 3x + 4z = 57. \end{cases}$$

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

1110. Milyen többtagot kell hozzáadni a $3y^4 - 2y^2 + 5$ többtaghoz, hogy az $5y^4 + y^3 - 2y^2 + 8$ többtagot kapjuk?

1111. Milyen többtagot kell kivonni az $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ többtagból, hogy a $3x + 1$ többtagot kapjuk?

Határozzátok meg az 1112–1114. többtagok szorzatait!

1112. a) $(2a - n)(4a^2 + 2an + n^2)$; b) $(1 + c + c^2)(1 - c)$.

1113. a) $(a^3 - 1)(a^6 + a^3 + 1)$; b) $(m - 1)(m^2 + 2m + 1)$.

1114. a) $(a^2 + 1)(a^4 - a^2 + 1)$; b) $(x^3 - 2a)(x^6 + 2x^3a + 4a^2)$.

1115. Számítsátok ki a kifejezések értékeit!

a) $2^{13} \cdot 0{,}5^{13}$; b) $0{,}5^{18} \cdot 2^{18}$; c) $25^7 \cdot 0{,}04^7$; d) $5^{33} \cdot 0{,}2^{33}$.

28. §. EGYENLŐ EGYÜTTHATÓK MÓDSZERE



Adva van a következő egyenletrendszer:

$$\begin{cases} 8x - 3y = 34, \\ 5x + 3y = 31. \end{cases}$$

Először behelyettesítő módszerrel oldjuk meg a rendszert. Az első egyenletből kifejezzük az y változót, s a kapott kifejezéssel helyettesítjük az y változót a második egyenletben:

$$y = \frac{1}{3}(8x - 34),\ 5x + 3 \cdot \frac{1}{3}(8x - 34) = 31,$$

$$5x + 8x = 34 + 31.$$

Ezután már könnyen befejezhető az egyenletrendszer megoldása.

Megkaphatjuk-e az $5x + 8x = 34 + 31$ egyenletet más módszerrel? Igen, ehhez elegendő összeadni az egyenletek jobb és bal oldalát. Mivel az y együtthatói ellentétes előjelű számok, ezért az y változót tartalmazó tagok megsemmisülnek. Ezért ezzel a módszerrel bármilyen hasonló egyenletrendszerek megoldhatók: a behelyettesítő módszer

helyett az egyenleteket tagonként összeadjuk. A megoldás a következőképpen írható le:

$$\begin{array}{rl} \left\{\begin{array}{l} 8x-3y=34, \\ 5x+3y=31. \end{array}\right. & 8\cdot 5-3y=34, \\ \hline 13x=65, & 40-3y=34, \\ x=5. & 3y=6, \\ & y=2. \end{array}$$

F e l e l e t. (5; 2).

Ezzel a módszerrel oldjuk meg azokat az egyenletrendszereket, amelyekben bármilyen változó együtthatói ellentétes előjelű számok. Ilyen alakúvá tehető bármilyen lineáris kétváltozós egyenletrendszer. Például adva van az alábbi egyenletrendszer:

$$\left\{\begin{array}{l} 3x+7y=31, \\ 2x+9y=12. \end{array}\right.$$

Megszorozzuk az első egyenlet mindkét oldalát 2-vel, és a másodikat pedig –3-mal. Ekkor olyan rendszert kapunk, amelyben az x változó együtthatói ellentétes előjelű számok. A kapott rendszer egyenletei egyenértékűek az eredeti rendszer egyenleteivel, tehát ennek is ugyanolyan megoldásai lesznek, mint az eredetinek.

A megoldást a következőképpen írhatjuk le:

$$\begin{array}{rl} \left\{\begin{array}{l} 3x+7y=31, \\ 2x+9y=12. \end{array}\right. & \begin{array}{l} \mid 2 \\ \mid -3 \end{array} \\ & \left\{\begin{array}{l} 6x+14y=62, \\ -6x-27y=-36. \end{array}\right. \\ & \hline -13y=26, \\ & y=-2. \end{array}$$

$2x + 9 \cdot (-2) = 12$, $2x = 30$; $x = 15$.

F e l e l e t. (15; –2).

Ellenőrizzétek magatokat!

1. Hány megoldása lehet két kétváltozós lineáris egyenletből álló egyenletrendszernek?
2. A két kétváltozós lineáris egyenletből álló egyenletrendszerek milyen megoldási módszereit ismeritek?
3. Hogyan oldhatók meg az egyenlő együtthatók módszerével a két kétváltozós lineáris egyenletből álló egyenletrendszerek?

Szeretnétek többet megtudni?

Az egyenlő együtthatók módszerével nem csak lineáris egyenletrendszerek oldhatók meg, hanem sok nem lineáris is.

Példa.

Oldjátok meg a

$$\begin{cases} 2x - y^2 = 5, \\ 2x + y^2 = 7 \end{cases}$$

egyenletrendszert!

M e g o l d á s. Összeadjuk az adott egyenletek bal és jobb oldalát. Ekkor a következőt kapjuk:

$$4x = 12 \text{ vagy } x = 3.$$

Tehát $2 \cdot 3 - y^2 = 5$, $y^2 = 1$, ahonnan $y_1 = 1$, $y_2 = -1$.

A megoldás ellenőrzése azt mutatja, hogy a kapott (3; 1) és (3; –1) számpárok kielégítik az adott egyenletrendszert.

F e l e l e t. Az egyenletrendszernek két megoldása van: (3; 1) és (3; –1).

Oldjuk meg együtt!

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert!

$$\begin{cases} 2x + \dfrac{5(x-y)}{3} = 13, \\ -\dfrac{7x-3y}{5} + 6x = 19. \end{cases}$$

✔ M e g o l d á s. Megszorozzuk az első egyenlet minden tagját 3-mal, a másodikét pedig 5-tel. Leegyszerűsítjük a kapott egyenleteket:

$$\begin{cases} 6x + 5x - 5y = 39, \\ -7x + 3y + 30x = 95; \end{cases} \qquad \begin{cases} 11x - 5y = 39, \\ 23x + 3y = 95. \end{cases}$$

Az egyenlő együtthatók módszerének felhasználásával ismét megszorozzuk az első egyenlet minden tagját 3-mal, a másodikét pedig 5-tel, majd tagonként összeadjuk őket:

$$\begin{cases} 11x - 5y = 39, \\ 23x + 3y = 95. \end{cases} \quad \begin{array}{l|l} & 3 \\ & 5 \end{array} \qquad \begin{cases} 33x - 15y = 117, \\ 115x + 15y = 475. \end{cases}$$

$$148x = 592;$$

$x = 4$, ekkor $44 - 5y = 39$, $5y = 5$, $y = 1$.

F e l e l e t. (4; 1).

Oldjátok meg fejben!

1116. Adjátok össze tagonként az egyenletek bal és jobb oldalát!

a) $3x + 2y = 7$ és $5x - y = 12$; b) $x - 8y = 15$ és $4x - 3y = 2$.

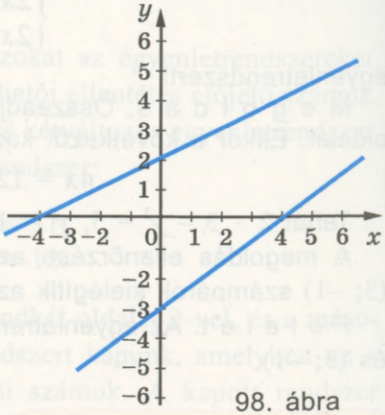
1117. Oldjátok meg az egyenletrendszereket!

a) $\begin{cases} x + y = 5, \\ 2x - y = 1; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 2y = 2, \\ 3x + 2y = 6; \end{cases}$

c) $\begin{cases} a - c = 3, \\ 2a + c = 6. \end{cases}$

1118. Hány megoldása van annak az egyenletrendszernek, amelynek görbéi a 98. ábrán láthatók?



98. ábra

1119. Oldjátok meg az egyenletrendszert az egyenlő együtthatók módszerével:

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 6, \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 2. \end{cases}$$

A szint

Oldjátok meg az egyenlő együtthatók módszerével az 1120–1129. egyenletrendszereket!

1120. a) $\begin{cases} x + y = 7, \\ x - y = 3; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y = 18, \\ -x + 3y = 2. \end{cases}$

1121. a) $\begin{cases} 3x + 2y = 15, \\ 7x - 2y = 5; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x - 3y = 2, \\ 3x + 3y = 5. \end{cases}$

1122. a) $\begin{cases} 2x + 3y = 17, \\ 2x - 4y = 3; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3u - v = 26, \\ 13u + 3v = 66. \end{cases}$

1123. a) $\begin{cases} x - 2y = 5, \\ 3x + 5y = 26; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 4y = 55, \\ 7x - y = 56. \end{cases}$

1124. a) $\begin{cases} 3x - y = 1, \\ 3x + 8y = 19; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 2y = 27, \\ x + 5y = 35. \end{cases}$

1125. a) $\begin{cases} 3x + 4z = 85, \\ 5x + 4z = 107; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x + 7z = 101, \\ 7x - z = 55. \end{cases}$

1126. a) $\begin{cases} 15y - 8z = 29, \\ 3y + 2z = 13; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 8t = 59, \\ 6x + 5t = 107. \end{cases}$

1127. a) $\begin{cases} 14u - 9v = 24, \\ 7u - 2v = 17; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x + 4y = 13, \\ 3x + 5y = 13. \end{cases}$

1128. a) $\begin{cases} 3a - 5b = 13, \\ 5a + 7b = 81; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2a - 7b = 8, \\ 4a - 9b = 19. \end{cases}$

1129. a) $\begin{cases} 6x - 4y = 5, \\ 8x - 3y = 2; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 12y + 15x = 8, \\ 16y + 9x = 7. \end{cases}$

Oldjátok meg az x és y változókra vonatkoztatva az 1130–1131. egyenletrendszereket!

1130. a) $\begin{cases} 3x - 8y = a, \\ 4x + 8y = 20a; \end{cases}$ b) $\begin{cases} -5x + y = 10c, \\ 5x - 2y = 10c. \end{cases}$

1131. a) $\begin{cases} 3x + 7y = m, \\ 8x + 7y = n; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 4y = k, \\ 5x - 4y = p. \end{cases}$

1132. Oldjátok meg az általatok ismert összes módszerrel az alábbi egyenletrendszereket!

a) $\begin{cases} 8z + 3t = 7, \\ -4z - 5t = 7; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3m - 2n = 2, \\ 5m + 8n = 26; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - y = 11, \\ 5x + 6y = 26; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 4x + 3y = 22, \\ -x + 7y = 10. \end{cases}$

1133. Határozzátok meg az alábbi egyenletek görbéinek metszéspont-koordinátáit!

a) $x - 2y = 1$ és $2x + y = 7$; b) $5x + 2y = 1$ és $4x - 7y = 18$.

Végezzétek el az ellenőrzést!

B szint

Oldjátok meg az 1134–1146. egyenletrendszereket az egyenlő együtthatók módszerével!

1134. a) $\begin{cases} 19x - 21y = 17, \\ 5x + 14y = 24; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 8x - 33y = 19, \\ 12x + 55y = 19. \end{cases}$

1135. a) $\begin{cases} 5x - 2 = 4(x + 2y) - 8, \\ 3(2x - y) + 6 = 24y + 12; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 3 = 5(x - y), \\ 2(3x - 1) = 4y - 5. \end{cases}$

1136. a) $\begin{cases} 10u + 7v = 51, \\ u - \frac{1}{5}v = 2\frac{2}{5}; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{1}{4}x - \frac{1}{5}y = 0, \\ \frac{3}{4}x + \frac{2}{5}y = 10. \end{cases}$

1137. a) $\begin{cases} 0{,}1p + 0{,}2q = 0{,}3, \\ 0{,}4p + 0{,}5q = 0{,}9; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 1{,}2x - 3{,}4y = 12, \\ 2{,}5x + 1{,}4y = 25. \end{cases}$

1138. a) $\begin{cases} \frac{a}{3} + \frac{b}{4} = 5, \\ a - \frac{b}{2} = 5; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{m}{3} - \frac{n}{3} = 0, \\ m - \frac{7n}{2} = 2. \end{cases}$

1139. a) $\begin{cases} \frac{1-3x}{4} - \frac{4-2y}{3} = 0, \\ 0{,}7 = 0{,}4y - 0{,}3x; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{2x-1}{6} - \frac{9-5y}{8} = 0, \\ 2x = 1{,}5y + 2{,}5. \end{cases}$

1140. a) $\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1, \\ \frac{2x-1}{2} = \frac{3y-1}{3} + \frac{5}{6}; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{3} = 8, \\ \frac{x+y}{3} + \frac{x-y}{4} = 11. \end{cases}$

1141. a) $\begin{cases} 6(x - 1) - \frac{5y-2x}{2} = 0, \\ \frac{14x}{5} - y = 2; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + \frac{7(x-y)}{2} = 5, \\ 5(x - 1) + \frac{3x-7y}{2} = 0. \end{cases}$

1142. a) $\begin{cases} \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{3} = 2, \\ x + y - \frac{x-y}{6} = 7; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{5x-3}{7} + y = 10, \\ \frac{x+y}{4} - \frac{x-5}{9} = 2. \end{cases}$

1143. a) $\begin{cases} 1{,}5x - 2{,}2y = 0{,}1, \\ 4{,}2x - 2{,}5y = 7{,}6; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2{,}5u - 0{,}2(u - v) = 2{,}3, \\ 3{,}7u - 1{,}5(v - u) = 5{,}2. \end{cases}$

1144. a) $\begin{cases} 2{,}7x - 3(x + y) = 2{,}1, \\ 3{,}2x - 2(y - x) = 17{,}6; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3{,}5y - 0{,}2(2y - z) = 31{,}2, \\ 5{,}2z + 0{,}7(y - 2z) = 10{,}8. \end{cases}$

1145. a) $\begin{cases} \frac{1}{2}x - 3\left(\frac{2}{3}y - x\right) = 12, \\ \frac{2}{3}x - 2\left(\frac{1}{2}x - y\right) = \frac{2}{3}; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{2}{5}x - \frac{3}{4}y = y - 8, \\ \frac{1}{3}(x - 3y) = 3x - 10. \end{cases}$

1146. a) $\begin{cases} 4(3x - 2) + 2(7 - 4x) = 20 + 2(y - 3), \\ 5(2y + 3) + 2(6x - y) = 3(5x - 3) + 31; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5(x - 2y) + 33 = 2(4x - 3) - 2(3y - 5), \\ 2(3x - 5y) - 3(x - 5) = 56 - 4(6 + 2y). \end{cases}$

Oldjátok meg az 1147–1148. egyenletrendszereket!

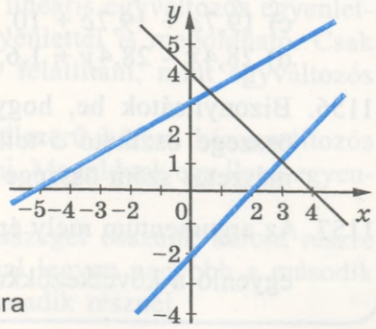
1147. a) $\begin{cases} (x + 3)^2 - 2y = x^2 + 13, \\ 6x + (y - 1)^2 = y(y - 5); \end{cases}$

b) $\begin{cases} -10x + (y + 4)^2 = y^2 + 18, \\ (2x - 1)^2 + 7y = 2x(2x + 3). \end{cases}$

1148. a) $\begin{cases} x(x + 3) + 9 = (x - y)(x + y) + y(y - 3), \\ 26 + 3(2x - y) = 9x - 5(3x + 2y); \end{cases}$

b) $\begin{cases} (x + 3)^2 - 5 + y(y - 2) = x(x + 3) + (y + 1)^2, \\ 7(2x + 3) - 6x = 9 - 4(2y - 7). \end{cases}$

1149. Írjátok le azoknak az egyeneseknek az egyenleteit, amelyeknek görbéi a 99. ábrán láthatók!



99. ábra

Oldjátok meg az 1150–1152. egyenletrendszereket!

1150*. a) $\begin{cases} x + y = 3, \\ x + z = 4, \\ y + z = 5; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 5, \\ x - z = 2, \\ y - z = 1. \end{cases}$

1151*. a) $\begin{cases} 2x + 3y = 11, \\ 3x + 2z = 13, \\ 3y + 4z = 29; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y - z = 11, \\ x - y + z = 1, \\ y + z - x = 5. \end{cases}$

1152*. a) $\begin{cases} 7x + 6y + 7z = 100, \\ x - 2y + z = 0, \\ 3x + y - 2z = 0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 2z - 3t = 1, \\ x + 4z + 2t = 7, \\ 3x - z + t = 0. \end{cases}$

1153*. *Feladat egy XV. századi értekezésből.* Oldjátok meg pozitív egész számokkal a rendszert!

a) $\begin{cases} x + y + z = 12, \\ 2x + y + \frac{1}{2}z = 12; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z = 12, \\ 8x + 5y + 3z = 60; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y + z = 12, \\ 4x + 3y + 2z = 36. \end{cases}$

1154*. *V. A. Lebega-féle feladat.* Oldjátok meg az egyenletrendszert pozitív egész számokkal!

$$\begin{cases} 2x + 3y + 7z = 131, \\ 2x + 3y + 8z = 140. \end{cases}$$

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

1155. Számítsátok ki a többtagok értékeit!

a) $x^2 - 12{,}8x + 7{,}9$, ha $x = 12{,}8$;
b) $2y^2 + 8{,}6y - 6{,}5$, ha $y = -4{,}3$;
c) $19{,}7a + 19{,}7c + 10$, ha $a = 3{,}8$ és $c = 6{,}2$;
d) $28{,}4x - 28{,}4y + 1{,}6$, ha $x = 2{,}37$ és $y = 1{,}37$.

1156. Bizonyítsátok be, hogy öt egymás utáni természetes szám összege osztható 5-tel! Osztható-e négy egymás utáni természetes szám összege 4-gyel?

1157. Az argumentum mely értékeinél lesz $y = -\frac{6}{x}$ függvény értéke egyenlő a következőkkel: a) 12; b) –12?

29. §. FELADATOK MEGOLDÁSA EGYENLET-RENDSZEREK SEGÍTSÉGÉVEL



Sok feladatot, főként olyanokat, amelyekben két mennyiség értékét kell meghatározni, célszerű egyenletrendszer segítségével megoldani.

1. feladat. 6 füzetért és 5 noteszért 6,9 hrivnyát fizettek. Mennyibe kerül egy füzet és egy notesz, ha 4 notesz 2,4 hrivnyával drágább, mint 3 füzet?

M e g o l d á s. Legyen egy notesz ára x hrivnya, egy füzeté pedig y hrivnya. 5 noteszért $5x$ hrivnyát, 6 füzetért $6y$ hrivnyát fizettek. Összesen a két árucikk 6,9 hrivnyába került, tehát

$$5x + 6y = 6{,}9.$$

Mivel 4 notesz 2,4 hrivnyával drágább 3 füzetnél, ezért a következő egyenletet kapjuk:

$$4x - 3y = 2{,}4.$$

Az x és y változók mindkét egyenletben ugyanazokat az árakat jelölik. Tehát a feladat megoldásához az alábbi egyenletrendszert kell megoldani:

$$\begin{cases} 5x + 6y = 6{,}9, \\ 4x - 3y = 2{,}4; \end{cases} \Bigg| \; 2 \qquad \begin{cases} 5x + 6y = 6{,}9; \\ 8x - 6y = 4{,}8; \end{cases}$$

$$13x = 11{,}7;$$

$$x = 0{,}9.$$

$$4 \cdot 0{,}9 - 3y = 2{,}4; \quad 3y = 1{,}2; \quad y = 0{,}4.$$

F e l e l e t. A notesz 90 kopijkába, a füzet 40 kopijkába kerül.

Ez a feladat egyváltozós egyenlet felállításával is megoldható. Bármilyen feladat, amely megoldható lineáris egyváltozós egyenletrendszer segítségével, egyváltozós egyenlettel is megoldható. Csak általában egyenletrendszert könnyebb felállítani, mint egyváltozós egyenletet.

Sok olyan feladat van, amelyet célszerű három háromváltozós egyenletrendszer segítségével megoldani. Megoldunk egy ilyen egyenletrendszert.

2. feladat. Egy 10 000 hrivnyás összeget osszunk három részre úgy, hogy az első rész 2000 hrivnyával legyen nagyobb a második résznél és 3000 ezer hrivnyával a harmadik résznél.

M e g o l d á s. Jelöljük az ismeretlen összegrészeket x, y és z betűkkel. A feladat feltétele szerint:

$$x + y + z = 10\,000,\ x - y = 2000,\ x - z = 3000.$$

A keresett változók értékeinek ki kell elégíteniük a három egyenletből álló háromváltozós egyenletrendszert:

$$\begin{cases} x + y + z = 10\,000, \\ x - y = 2000, \\ x - z = 3000. \end{cases}$$

Tagonként összeadjuk az egyenletek jobb és bal oldalát, s a $3x = 15\,000$ egyenletet kapjuk, ahonnan $x = 5000$. Ekkor a második egyenletből a következőt kapjuk:

$5000 - y = 2000$, $y = 3000$,

a harmadik egyenletből kiszámítjuk:

$5000 - z = 3000$, $z = 2000$.

F e l e l e t. 5000 hrivnya, 3000 hrivnya és 2000 hrivnya.



Szeretnétek többet megtudni?

Általánosítsátok a paragrafus 1. feladatát!

Feladat. 6 füzetért és 5 noteszért m hrivnyát fizettek. Mennyibe kerül egy füzet és egy notesz, ha 4 notesz n hrivnyával drágább, mint 3 füzet?

Itt az m és n – *paraméterek*, vagyis adottnak, változatlannak tekintett betűjelölések. Paramétereket tartalmazó feladatok szintén megoldhatók egyenletekkel vagy egyenletrendszerekkel, csak a feleletek nem konkrét számok lesznek, hanem paramétereket tartalmazó kifejezések.

Megoldjuk a fenti feladatot.

M e g o l d á s.

$$\begin{cases} 5x + 6y = m, \\ 4x - 3y = n. \end{cases} \Bigg| \begin{array}{c} \\ 2 \end{array} \quad \begin{cases} 5x + 6y = m, \\ 8x - 6y = 2n. \end{cases}$$

$$13x = m + 2n;\ x = \frac{1}{13}(m + 2n).$$

Ekkor $3y = 4x - n$; $3y = \frac{4}{13}(m + 2n) - n$; $3y = \frac{1}{13}(4m - 5n)$.

Tehát $y = \frac{1}{39}(4m - 5n)$.

F e l e l e t. Egy notesz és egy füzet rendre $\frac{1}{13}(m + 2n)$ hrivnya és $\frac{1}{39}(4m - 5n)$ hrivnya.

Ellenőrizzétek magatokat!

1. Mondj példát lineáris kétváltozós egyenletre!
2. Mit nevezünk a kétváltozós egyenlet megoldásának?
3. Hány megoldása lehet két lineáris kétváltozós egyenletből álló rendszernek?
4. Hány megoldása lehet két elsőfokú kétváltozós egyenletből álló rendszernek?
5. Állítsatok fel néhány feladatmodellt: keressetek két olyan számot, amelyek összege 3, különbsége pedig 2!

Oldjuk meg együtt!

1. Osszunk el két részre 8 100 hrivnyát úgy, hogy a kisebb része a nagyobb rész 80%-a legyen!

✔ M e g o l d á s. Legyen a nagyobb összegrész x hrivnya, ekkor a kisebb rész az x 80%-a, vagyis $0{,}8x$. Két egyenletből álló rendszert kapunk:

$$\begin{cases} x + y = 8\ 100, \\ y = 0{,}8x, \end{cases}$$

ahonnan $x + 0{,}8x = 8\ 100$, $1{,}8x = 8\ 100$, $x = 8\ 100 : 1{,}8x = 4\ 500$.

F e l e l e t. 4 500 hrivnya és 3 600 hrivnya.

2. Melyik az a két szám, amelyek összege 15, négyzeteik különbsége pedig 60-nal nagyobb?

✔ M e g o l d á s. Ha a keresett számok x és y, akkor

$$\begin{cases} x + y = 15, \\ x^2 - y^2 = 75. \end{cases}$$

Mivel $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ és $x + y = 15$, ekkor $15(x - y) = 75$, és $x - y = 5$. A következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{cases} x + y = 15, \\ x - y = 5. \end{cases}$$

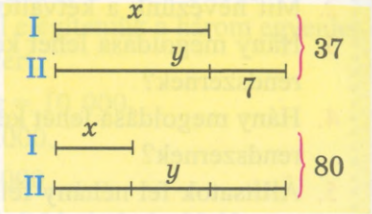
A fenti egyenletrendszer megoldása $x = 10$, $y = 5$ egyúttal az adott feladat megoldása is.

F e l e l e t. 10 és 5.

Oldjátok meg fejben!

1158. Keressetek két számot, hogy: a) összegük 40, hányadosuk 3 legyen; b) összegük 40, különbségük 20 legyen; c) különbségük 10, hányadosuk 3 legyen!

1159. Milyen egyenletrendszernek felel meg a 100. ábrán látható diagram?



100. ábra

A szint

Oldjátok meg a feladatokat egyenletrendszerek felállításával!

1160. Két szövetfajtából összesen 9 métert vásároltak. Az egyik métere 40 hrivnyába került, a másikból 1 méter 30 hrivnya volt. Az egész áruért 330 hrivnyát fizettek. Mennyi szövetet vettek mindegyik fajtából?

1161. Az építkezésen 50 kőműves és ács dolgozott. Egy idő múlva a kőművesek száma kétszeresére, az ácsoké pedig háromszorosára nőtt, így összesen 130-an lettek. Hány kőműves és hány ács volt eredetileg az építkezésen?

1162. A vízfolyás irányában a motorcsónak sebessége 23 km/h, ellenkező irányban pedig 17 km/h volt. Határozzátok meg a csónak saját sebességét és a vízfolyás sebességét!

1163. A turisták 640 km-t tettek meg, ebből 7 órát vonattal, 4 órát autóbusszal utaztak. Határozzátok meg a vonat sebességét, ha az 5 km/h-val nagyobb, mint az autóbusz sebessége!

1164. Egymástól 38 km-re fekvő két városból egyszerre indult el két turista, akik 4 óra múlva találkoztak. Mekkora volt a sebességük, ha egyikük a találkozásukig 2 km-rel többet tett meg, mint a másik?

1165. Határozzátok meg azt a két számot, amelyek összege 35,5, különbsége pedig 12,5!

1166. Határozzátok meg azt a két számot, amelyek félösszege 37,9, félkülönbsége pedig 7,5!

1167. a) Két szám félösszege 5-tel nagyobb a kisebbik számnál és 1-gyel nagyobb a félkülönbségüknél. Határozzátok meg ezeket a számokat!

b) Két szám félkülönbsége 13-mal kisebb a nagyobbik számnál és 12-vel kisebb a különbségüknél. Határozzátok meg ezeket a számokat!

1168. Határozzátok meg azt a két számot, amelyek közül az első fele a másodikkal egyenlő, s a második harmadrésze 5-tel kisebb az elsőnél!

1169. Határozzátok meg azt a két számot, amelyek közül az első szám kétszerese 37-tel nagyobb a másodiknál, s az első fele 2-vel kisebb a második számnál!

1170. Osszátok két részre a 75-öt úgy, hogy az egyik rész háromszor nagyobb legyen a részek különbségénél!

1171. Két szám összege 82. Ha a nagyobb számot elosztjátok a kisebbel, akkor hányadosként 5-öt, maradékként 4-et kaptok. Határozzátok meg ezeket a számokat!

1172. Két szám különbsége 61. Ha a kisebbítendőt elosztjátok a kivonandóval, akkor hányadosként 6-ot, maradékként 1-et kaptok. Határozzátok meg ezeket a számokat!

1173. Három füzet és 5 ceruza 3,95 hrivnyába kerül, 4 ilyen füzet és 2 ceruza ára pedig 2,7 hrivnya. Mennyibe kerül egy füzet és egy ceruza?

1174. Az anya 24 évvel idősebb a lányánál, míg a lány kétszer fiatalabb, mint az anyja. Hány éves az anya és hány éves a lánya?

1175. Két könyvespolcon összesen 65 könyv található. Az egyik polcon 7 könyvvel több van, mint a másikon. Hány könyv található a polcokon külön-külön?

1176. Az iskola két hetedik osztályában 72 tanuló van. Ha a 7. A osztályból 2 tanuló átmenne a 7. B-be, akkor mindkét osztályban egyenlő lenne a tanulói létszám. Hány tanuló van az osztályokban külön-külön?

1177. Tíz lóval és 16 tehénnel naponta 160 kg szénát etetnek meg, miközben 5 ló 5 kg szénával többet kap, mint 7 tehén. Hány kilogramm szénát kap egy-egy ló és egy-egy tehén?



1178. Egy 35 m hosszú drótszálat úgy vágtak ketté, hogy az egyik rész 50%-kal hosszabb lett, mint a másik. Határozzátok meg mindkét rész hosszát!

1179. Egy 35 m hosszú zsinórt úgy vágtak ketté, hogy az egyik rész $33\frac{1}{3}$ %-kal rövidebb lett, mint a másik. Határozzátok meg mindkét rész hosszát!

1180. Egy 200 ha területű rétet két részre osztottak úgy, hogy az egyik rész területe 5 ha-ral nagyobb lett, mint a másik. Határozzátok meg mindkét rész területét!

1181. Egy 100 ha területű rétet két részre osztottak úgy, hogy az egyik rész területe 5 ha-ral nagyobb lett, mint a másik fele. Határozzátok meg mindkét rész területét!

1182. A téglalap kerülete 168 cm. Határozzátok meg oldalainak hosszát, ha az egyik 8 cm-rel hosszabb a másiknál!

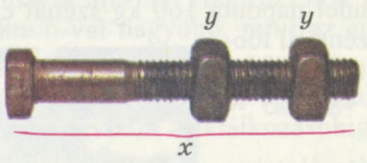
1183. A téglalap kerülete 126 cm. Határozzátok meg oldalainak hosszát, ha az egyik: a) 10%-kal hosszabb a másiknál; b) 10%-kal rövidebb a másiknál!

1184. Határozzátok meg az egyenlő szárú háromszög oldalainak hosszát, ha a kerülete 82 cm, s az alapja 10 cm-rel hosszabb a száránál!

1185. Határozzátok meg az egyenlő szárú háromszög oldalainak hosszát, ha a kerülete 62 cm, s az alapja 10%-kal hosszabb a száránál!

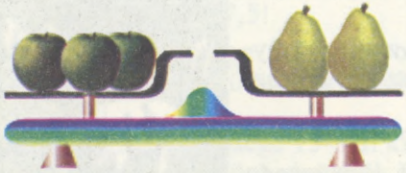
1186. a) Két szám különbsége 4, négyzeteik különbsége pedig 44. Határozzátok meg a két számot!
b) Keressetek két olyan számot, amelyek összege 12, négyzeteik különbsége pedig 60!

1187. Állítsátok össze az ábráknak és egyenletrendszereknek (101., 102. ábra) megfelelő feladatokat, és oldjátok meg őket!



$$\begin{cases} x + 2y = 250 \\ x - y = 130 \end{cases}$$

101. ábra



$$\begin{cases} y - x = 50 \\ 3x = 2y \end{cases}$$

102. ábra

B szint

1188. Egymástól 9 km-re fekvő két faluból egyszerre indult el két kerékpáros, akik 0,5 óra múlva találkoztak. Mekkora volt mindegyikük sebessége, ha az egyik 1,6 km/h-val gyorsabban haladt?

1189. A vízfolyás irányában a motorcsónak 320 km-t tett meg 8 óra alatt, ellenkező irányban ugyanakkora távolságot 10 óra alatt. Határozzátok meg a motorcsónak saját sebességét és a vízfolyás sebességét!

1190. Ha egy pontból egyszerre indul útnak egy irányban egy kerékpáros és egy motorkerékpáros, akkor 2 óra múlva 14 km lesz közöttük a távolság. Ha egyszerre indulnak útnak, de ellenkező irányban, akkor 3 óra múlva 174 km-re lesznek egymástól. Határozzátok meg a kerékpáros és a motorkerékpáros sebességét!

1191. Ha a kerékpáros 3 km/h-val megnövelte volna a haladási sebességét, akkor az A és B pontok közötti távolságot 1 órával hamarabb tette volna meg. Ha viszont 2 km/h-val kisebb sebességgel hajtott volna, akkor 1 órával később tette volna meg ugyanazt a távolságot. Határozzátok meg a kerékpáros sebességét és az A és B pontok közötti távolságot!

1192. Két szakmunkás együtt dolgozva 12 nap alatt tudná befejezni a munkát. Ha egyikük 2 napot dolgozik, a másik pedig 3 napot, akkor a munka 20%-át végzik el. Hány nap alatt végeznék el a teljes munkát a szakmunkások egyedül dolgozva?

1193. Két egyszerre kinyitott csapból a tartály 1 óra 20 perc alatt telik meg vízzel. Ha az egyik csapot 10 percre, a másikat 12 percre nyitják meg, akkor a tartálynak az $\frac{2}{15}$-öd része telik meg vízzel. Hány óra alatt töltődne fel a tartály a két csapból külön-külön?

1194. Két turista indul egymás felé A és B városból, amelyek között a távolság 30 km. Ha az első turista két órával hamarabb indul el, akkor a másik indulása után 2,5 órával találkoznak. Ha a második turista két órával hamarabb indul útnak, akkor az első indulása után 3 óra múlva találkoznak. Határozzátok meg mindkét turista haladási sebességét!

1195. Két szám négyzeteinek a különbsége és különbségük négyzete rendre 275 és 121. Határozzátok meg a két számot!

1196. Két polcon 50 könyv található. Ha a kötetek felét a második polcról az elsőre rakják át, akkor azon 4-szer kevesebb könyv marad, mint az elsőn. Hány könyv van a polcok mindegyikén?

1197. Ha a gyerekeket kettesével ültetik asztalhoz, akkor három asztal fog hiányozni. Ha hármasával ültetik őket asztalhoz, akkor egy asztal fölösleges lesz. Hány asztal, és hány gyerek van?

1198. A levegőben keringő verebek földbe szúrt rudakra akarnak leszállni. Ha egyesével szállnak a rudakra, akkor két verébnek nem jut hely, ha kettesével, úgy két rúd üresen marad. Hány rúd és hány veréb van?



1199. Hány éves az apa és a fia, ha 8 évvel korábban az apa 8-szor volt idősebb a fiánál, 5 évvel korábban pedig 5-ször?

1200. Hány éves Tóni és Kati, ha éveik száma összesen 17, s Kati most kétszer annyi éves, mint Tóni volt 8 évvel ezelőtt?

1201. *Ókori görög feladat.* A felmálházott öszvér és szamár lassan baktat az utcán. A számár nehéz málhája miatt panaszkodik az öszvérnek. Az öszvér így válaszol: „Miért panaszkodsz? Ha átvenném az egyik zsákodat, akkor a terhem kétszer nehezebb lenne a tiednél, de ha te vennél át tőlem egyet, akkor a terheink egyformák lennének". Hány zsákot vitt az öszvér, és hányat a szamár?

1202. *Ókori kínai feladat.* 5 ökör és 2 birka 11 tallért ér, 2 ökör és 8 birka pedig 8 tallért. Hány birkát lehet venni 5 ökör áráért?

1203. *Ókori kínai feladat.* Hány fácán és nyúl van a ketrecben, ha összesen 35 fejük és 94 lábuk van?

1204. Egy 120 m hosszú körvonalon azonos irányban mozgó két test 10 másodpercenként találkozik, amikor egymással szemben mozognak, akkor 4 másodpercenként találkoznak. Határozzátok meg a két test sebességét!

1205. Egy 90 m hosszú körvonalon azonos irányban mozgó két test 6 másodperc múlva találkozik. Határozzátok meg ezeknek a

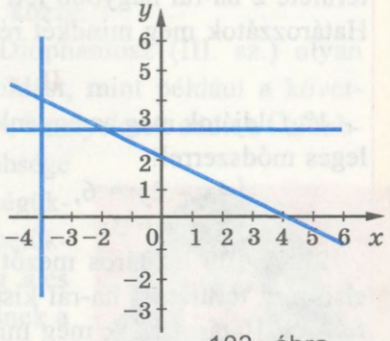
testeknek a sebességét, ha egyikük sebessége 4-szer nagyobb a másikénál!

1206. Határozzátok meg azt a számot, amely 4-gyel, 7-tel és 11-gyel való osztáskor rendre 2, 1 és 6 maradékot ad, miközben a kapott hányadosok összege 2-vel kisebb a keresett számnál!

1207. Állítsátok fel az $y = kx + p$ alakú egyenes egyenletét, amely átmegy a következő pontokon:

a) $A(1; 3)$ és $B(3; 7)$; b) $K(3; 2)$ és $P(-1; -2)$;
c) $C(2; 4)$ és $D(5; -2)$; b) $E(1; 2)$ és $F(3; 6)$.

1208. Állítsátok fel a 103. ábrán látható egyenesek egyenletét!



103. ábra

1209. a) Egy 100 ha területű rétet két részre osztottak, amelyek közül az egyik n ha-ral nagyobb a másiknál. Határozzátok meg a kapott két rész területét!

b) Az a ha területű rétet két részre osztották, s közülük az egyik 5 ha-ral nagyobb lett a másiknál. Határozzátok meg a kapott részek területét!

1210. a) Osszátok az a számot 2-vel, 3-mal és 5-tel arányos részekre!
b) Osszátok az 1000 számot k-val, p-vel és t-vel arányos részekre!

1211. A ruhaipari vállalat üzemrészében két nőiruha-modellt készítenek. Az első modell varrásához 2 m szövetet használnak fel, a második modell elkészítéséhez 3 m-t. A két modell elkészítésére rendre 4 és 5 munkaórát fordítanak. Ismeretes, hogy a szövet heti készlete a méter, miközben a korlátozott munkaidő t órát tesz ki. Állítsatok össze olyan heti munkatervet, amely lehetővé teszi, hogy a rendelkezésre álló források (szövet, munkaidő) egészét a nőiruha-modellek készítésére fordítsák!

1212. Az első héten a bánya p%-ra, a második héten k%-ra túlteljesítette a normát. A két hét során a bánya m tonna szenet termelt ki normán felül. Mennyi szenet kellett volna kitermelnie a bányának az eredeti tervnek megfelelően egy hét alatt?

ÖNÁLLÓ MUNKA

I. változat

1°. Oldjátok meg az egyenletrendszert: a) grafikusan; b) tetszőleges módszerrel!

a) $\begin{cases} 2x - y = 4, \\ x - y = 3; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3{,}1x + 0{,}7y = 5{,}2, \\ 5{,}2x + 0{,}6y = 7. \end{cases}$

2•. A 80 hektáros mezőt úgy osztották két részre, hogy az első területe 2 ha-ral nagyobb lett a második rész területének felénél. Határozzátok meg mindkét rész területét!

II. változat

1°. Oldjátok meg az egyenletrendszert: a) grafikusan; b) tetszőleges módszerrel!

a) $\begin{cases} 4x - 2y = 6, \\ x + y = 3; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2{,}2x + 0{,}5y = 3{,}2, \\ 1{,}2x + 0{,}8y = 2{,}8. \end{cases}$

2•. A 100 hektáros mezőt úgy osztották két részre, hogy az első rész területe 5 ha-ral kisebb lett a második rész területének felénél. Határozzátok meg mindkét rész területét!

III. változat

1°. Oldjátok meg az egyenletrendszert: a) grafikusan; b) tetszőleges módszerrel!

a) $\begin{cases} x - 2y = 3, \\ x + y = -3; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 1{,}5x + 0{,}3y = 4{,}5, \\ 2x - 1{,}7y = 6. \end{cases}$

2•. Egy 40 m hosszú drótszálat úgy vágtak két részre, hogy az első rész 4 méterrel lett hosszabb a második rész felénél. Határozzátok meg mindkét rész hosszát!

IV. változat

1°. Oldjátok meg az egyenletrendszert: a) grafikusan; b) tetszőleges módszerrel!

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 7, \\ x + y = 4; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 1{,}7x + y = 4{,}4, \\ 3{,}5x - 0{,}8y = 6{,}2. \end{cases}$

2•. Egy 50 m hosszú drótszálat úgy vágtak két részre, hogy az első rész 1 méterrel lett rövidebb a második rész felénél. Határozzátok meg mindkét rész hosszát!

MATEMATIKATÖRTÉNETI ADALÉKOK

A kétváltozós egyenletrendszerre visszavezethető feladatokat a babiloni tudósok már több mint 4 ezer évvel ezelőtt meg tudták oldani.

A kínai matematikusok több mint 2 ezer évvel ezelőtt kidolgozták a három- és többismeretlenes lineáris egyenletrendszerek megoldásának általános módszerét, amit a Matematika kilenc könyvben című értekezésben tettek közzé.

Az ókori görög matematikus, Diophantosz (III. sz.) olyan feladatokra talált természetes megoldást, mint például a következő: „Határozzatok meg két számot, amelyeknek adott a különbsége, és amelyek négyzeteinek különbsége egy adott számmal nagyobb különbségüknél!" Ha a keresett számokat x és y betűkkel jelölik, az adott számokat pedig a és b betűkkel, akkor a feladat feltételeinek a következő egyenletrendszer felel meg:

$$\begin{cases} x - y = a, \\ x^2 - y^2 - (x - y) = b. \end{cases}$$



René Descartes
(1596–1650)

Az egyenletek grafikus módszerrel való megoldását elsőként René Descartes kiemelkedő francia filozófus, matematikus, fizikus, fiziológus javasolta. Ő vezette be a változó mennyiség fogalmát, illeteve a kényelmesen használható matematikai jelképrendszert.

1637-ben Descartes közzétette az Értekezések a módszerről című munkáját, amelyben ismertette az algebrát a mértannal összekapcsoló koordináta-módszert. Ennek köszönhetően a mértani feladatok algebrai, az algebrai feladatok pedig mértani módszerekkel oldhatók meg.

AZ 5. FEJEZET TANANYAGÁNAK ÖSSZEFOGLALÁSA

Az $ax + by = c$ alakú egyenletet, amelyben x és y változók, a, b és c adott számok, *kétváltozós lineáris egyenletnek* nevezzük. Ha $a \neq 0$ és $b \neq 0$, akkor ezt *elsőfokú kétváltozós egyenletnek* nevezzük.

Azt a számpárt, amely kielégíti a kétváltozós egyenletet, az adott egyenlet *megoldásának* nevezzük. Például a (3; –2) számpár az $5x + 3y = 9$ egyenlet megoldása. Az elsőfokú kétváltozós egyenletnek végtelen számú megoldása van. A Descartes-féle koordináta-rendszerben minden elsőfokú kétváltozós egyenletnek egyenes vonal felel meg, vagyis minden ilyen egyenlet görbéje egyenes. És fordítva: a koordinátasíkban minden egyenes valamely lineáris kétváltozós egyenlet görbéje.

Két kétváltozós egyenletet *egyenértékűnek* nevezünk, ha mindkettőnek ugyanazok a megoldásai. Az egyenértékű kétváltozós egyenleteknek egyforma a görbéjük.

Ha két vagy több egyenlet közös megoldásait kell meghatározni, akkor ezek az egyenletek *egyenletrendszert* alkotnak.

Az *egyenletrendszer megoldását* valamennyi egyenlete közös megoldásának nevezzük. Két x és y változós lineáris egyenletből álló egyenletrendszer példája:

$$\begin{cases} 3x - y = 3, \\ x - 2y = -4. \end{cases}$$

A rendszer mindegyik egyenletének végtelen számú megoldása van, de közöttük csak egy közös megoldás található a két egyenlet számára – a (2; 3) számpár.

A két elsőfokú kétváltozós egyenletből álló egyenletrendszernek a Descartes-féle koordináta-rendszerben egy-egy egyenes felel meg. Mivel két egyenes a síkban metszheti egymást, egybevághat vagy párhuzamos lehet, így a megfelelő egyenletrendszernek is lehet egy megoldása, végtelen számú megoldása vagy nem létezhet egyetlen megoldása sem.

A kétváltozós egyenletrendszerek különböző módszerekkel oldhatók meg: behelyettesítéssel, az egyenlő együtthatók módszerével vagy grafikusan.

ÖNELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

1. Fogalmazzátok meg, mit nevezünk kétváltozós lineáris egyenletnek!
2. Mondjatok példákat kétváltozós lineáris egyenletekre!
3. Mit nevezünk a kétváltozós egyenlet megoldásának?
4. Hány megoldása lehet a kétváltozós lineáris egyenletnek?
5. Milyen kétváltozós egyenleteket nevezünk egyenértékűeknek?
6. Igazak-e az egyenletek alaptulajdonságai a kétváltozós egyenletekre nézve? Fogalmazzátok meg ezeket a tulajdonságokat!
7. Fogalmazzátok meg, mit nevezünk elsőfokú kétváltozós egyenletnek!
8. Mondjatok példákat elsőfokú kétváltozós egyenletekre!
9. Milyen az elsőfokú kétváltozós egyenlet görbéje?
10. Hogyan szerkeszthető meg az elsőfokú kétváltozós egyenlet görbéje?
11. Hány megoldása lehet az elsőfokú kétváltozós egyenletnek?
12. Mondjatok példákat egyenletrendszerekre!
13. Mit nevezünk a kétváltozós egyenletrendszer megoldásának?
14. Mit jelent a „megoldani a kétváltozós egyenletrendszert" kifejezés?
15. Hogyan oldható meg az egyenletrendszer grafikusan?
16. Hány megoldása lehet a kétváltozós egyenletrendszernek?
17. A két lineáris kétváltozós egyenletből álló egyenletrendszerek megoldásának milyen módszereit ismeritek?
18. Hogyan oldható meg a két kétváltozós egyenletből álló egyenletrendszer behelyettesítési módszerrel?
19. Hogyan oldható meg a két lineáris kétváltozós egyenletből álló egyenletrendszer az egyenlő együtthatók módszerével?

FELKÉSZÜLÉS A TEMATIKUS ÉRTÉKELÉSRE

7. sz. tesztfeladatok

1. A $3x - 5y = 6{,}2$ egyenlet görbéjén felvették a 0,4 abszcisszájú pontot. Milyen lesz e pont ordinátája?

a) 1; b) –1; c) 0; d) 0,4.

2. Melyik egyenlet megoldása a (2; 3) számpár?

a) $2x + y = 7$; b) $2y + 4x = 15$;
c) $5x + y = 17$; d) $0{,}5x + 3y = 1$.

3. Melyik egyenletnek nincs megoldása?

a) $x^4 + y^4 = -5$; b) $x^2 - y^2 = -4$;
c) $x^4 + 5y^2 = 0$; d) $x^2 + y^2 = 4$.

4. Melyik egyenlet görbéje nem függvénygörbe?

a) $y = x^2$; b) $y = 2$; c) $x = y$; d) $x = 2$.

5. Az a mely értékénél megy át a $2x + ay = 4$ egyenlet görbéje az (1; 2) ponton?

a) –1; b) 0; c) 1; d) 2.

6. Oldjátok meg az $\begin{cases} x + y = 14, \\ x - y = 8 \end{cases}$ egyenletrendszert!

a) (11; 3); b) (3; 11); c) (–11; 3); d) (–3; 11).

7. Oldjátok meg az $\begin{cases} x = y, \\ x + y = 10 \end{cases}$ egyenletrendszert!

a) (–1; –1); b) (5; 5); c) (1; 1); d) (–5; –5).

8. Határozzátok meg a $2x - 3y = 16$ és $x + 2y = 1$ egyenletek görbéi metszéspontjainak koordinátáit!

a) (2; 5); b) (–2; 5); c) (2; –5); d) (–2; –5).

9. Hány közös pontjuk van a $2x + 3y = 7$ és $2x - 3y = 7$ egyenletek görbéinek?

a) egy; b) kettő; c) nincs egy sem; d) végtelen számú.

10. Az a mely értékeinél lesz a $\begin{cases} 3x + ay = 15, \\ 12x - 8y = 60 \end{cases}$ egyenletrendszernek végtelen számú megoldása:

a) –2; b) –32; c) 2; d) 32?

A 7. sz. dolgozat típusfeladatai

1°. A (3; 2), (2; 3), (–1; –1), (3; 0) számpárok közül melyik a megoldása az alábbi egyenletrendszernek?

$$\begin{cases} 4x - 3y = -1, \\ 5x - 2y = 4. \end{cases}$$

Oldjátok meg grafikusan az egyenletrendszereket!

2°. $\begin{cases} 8x - 3y = 20, \\ x + 2y = 12. \end{cases}$ 3°. $\begin{cases} y = 1, \\ |x| + y = 2. \end{cases}$

Oldjátok meg behelyettesítési módszerrel az egyenletrendszereket!

4°. $\begin{cases} 5x - 3y = -9, \\ 2x - y = -2. \end{cases}$ 5•. $\begin{cases} \frac{3x-2y}{5} + \frac{5x-3y}{3} - x = 1, \\ \frac{2x-3y}{3} - \frac{4x-3y}{2} - y = 1. \end{cases}$

Oldjátok meg összeadási módszerrel az egyenletrendszereket!

6•. $\begin{cases} 3a - 7b = 8, \\ 6a - 5b = -2. \end{cases}$ 7•. $\begin{cases} 2x + y = 7, \\ 3x - z = 6, \\ z - y = 2. \end{cases}$

8•. Az istállóban tartott ludaknak és nyulaknak összesen 50 fejük és 160 lábuk van. Hány lúd és hány nyúl van az istállóban?

9••. A lerakaton 1500 m^3 nyír- és fenyőrönk van. Az első hónapban felhasználták a fenyőrönkök 15%-át és a nyírfarönkök 20%-át, összesen 270 m^3-t. Mennyi nyírfarönk és fenyőrönk volt a raktáron külön-külön?

10••. Határozzátok meg az $ax + bx = 13$ egyenlet a és b együtthatóinak értékeit, ha az egyenlet görbéje átmegy az $M(5; -3)$ és $N(8; 3)$ pontokon!

ISMÉTLŐ FELADATOK ÉS GYAKORLATOK

EGYENLETEK

Oldjátok meg az 1213–1218. egyenleteket!

1213. a) $7x + 15 + 15x + 8 - 10 = 9x$;
b) $25 + 5y - 17 + 7y = 150 - 130y$.

1214. a) $7x - 39 = 2(x + 3) + 6 - 2x + 5$;
b) $3(x - 5) = 5(x - 3) - 4(2 - 3x)$.

1215. a) $\frac{1}{2}(2x - 4) + \frac{1}{2}(4x - 2) = x + 5$;
b) $\frac{2}{3}(3x + 1) + \frac{1}{3}(6x - 2) = x + 6$.

1216. a) $5(x - 3) + 7(3x + 6) = 2(x - 2) + 103$;
b) $8(y - 2) + 5(3y - 2) = 3(y - 5) + 69$.

1217. a) $7(6x - 1) + 3(2x + 1) - 5(12x - 7) = 23$;
b) $5(8z - 1) + 8(7 - 4z) - 7(4z + 1) = 19$.

1218. a) $\frac{1}{4}(x - 3) + \frac{1}{8}(x - 4) = \frac{1}{2}(x - 5) + \frac{1}{8}(x - 1)$;
b) $\frac{1}{6}(8 - x) - \frac{1}{3}(5 - 4x) = \frac{1}{2}(x + 6)$.

1219. Mutassátok meg, hogy az $(a + 2)x - (a + 3)x = 5$ egyenletnek a bármely értékénél egy megoldása van. Keressétek meg ezt a megoldást!

1220. Lehet-e az $(a^2 + 1)x = 7$ egyenletnek a bármely értékénél végtelen számú gyöke? Mért?

1221. Milyen feltételek mellett nem lesz az $ax = 12$ egyenletnek megoldása?

1222. Milyen feltételek mellett nem lesz az $(a - 2)x = x + 1$ egyenletnek megoldása?

1223. *Ókori kínai feladat.* Többen vásárolnak meg egy birkát. Ha mindegyik vásárló 5 tallért ad be a közösbe, akkor a birka árából 45 tallér hiányzik. Ha mindegyik 7 tallért ad be, akkor 3 tallér fog hiányozni. Mennyibe kerül a birka? Hány vásárló volt?

1224. *Diophantosz sírfeliratából.* Diophantosz életének hatodrészét gyerekként, tizenkettedrészét ifjúként töltötte. Amikor ezután

eltelt még hetedrész és még 5 év, fia született. A fiú kétszer kevesebb évet élt, mint az apja. Fia halála után Diophantosz még 4 évet élt. Hány évet élt Diophantosz?

1225. *Ókori indiai feladat.* A méhraj ötödrésze a kadamba virág nedveit gyűjti, harmadrésze a szilindha virágokét. E két mennyiség 3-mal megszorzott különbsége teszi ki a méhek kutaj virágokon lévő részét. És csak egy méhecske gyűjti a jázmin és pandanusz virágok nektárját. Mondd meg nékem, virágocskám, hány méhecske volt összesen!

1226. *Ókori arab feladat.* Osszatok 10-et két részre úgy, hogy a részek különbsége 5 legyen!

1227. *Ókori német feladat.* Osszatok 10-et két részre úgy, hogy az első rész 5-tel való szorzása és az így kapott eredmény második résszel való osztása után $\frac{10}{3}$-ot kapjatok!

1228. *Feladat egy XVI. századi német értekezésből.* Egy ember azzal a feltétellel vállalt munkát, hogy az év végén egy öltő ruhát és 10 forintot kap. De csak 7 hónapot dolgozott, ezért csak az öltő ruhát kapta meg és még 2 forintot. Hány forintra értékelte a munkaadó az öltő ruhát?

1229. *Orosz népi feladat.* Egy apa megkérdezte fia tanítóját, hogy annak hány tanítványa van. A tanító így válaszolt: „Ha még egyszer annyi tanítványom lenne, mint amennyi most van, és még félannyi és negyedannyi, meg a kisebbik fiad, akkor pont 100-an lennének." Hány tanítványa volt a tanítónak?

1230. *Bolgár népi feladat.* A földműves így dicsekedett szomszédjának: „Ahány birkám van, annyi kisbárányt ellenek nekem. Azután veszek egy anyajuhot és még háromszor vásárolok annyi darabot, amennyi birkám és kisbárányom lesz, s akkor a számuk eléri a 100-at." Hány birkája volt a földművesnek?

1231. *A Kijev-Mohila Akadémia diákjainak feladata (1707).* Három fiúgyermek apja azt mondja: a középső fiam 2 évvel idősebb a legkisebbnél, a legidősebb pedig annyi éves, ahány éves a másik kettő együtt megtoldva 6-tal. A három fiú éveinek száma összesen 58. Hány éves a fiúk mindegyike?

1232. Egy műhelynek 20 nap alatt kellett volna elkészítenie bizonyos számú alkatrészt, de a feladatot 18 nap alatt teljesítette, mert

minden nap 8 alkatrésszel többet állított elő. Hány alkatrészt készített el a műhely?

1233. Az üzemnek 15 nap alatt kellett volna teljesítenie a munkapadok legyártására vonatkozó megrendelést. A tervezettnél naponta két munkapaddal többet készítve az üzem a határidő előtt két nappal nem csak a megrendelést teljesítette, de 6 munkapaddal többet is gyártott. Hány munkapadot kellett készítenie az üzemnek a megrendelésre?

1234. Két kotrógép gödröt vájt. Az első 1 óra alatt 40 m^3 földdel többet emelt ki, mint a második, s naponta 16 órát dolgozott, míg a második 24 órát. Hány köbméter földet emelt ki 1 óra alatt mindegyik markoló, ha a jelzett idő alatt együttesen 8640 m^3 földet emeltek ki?

1235. A búza vetését 14 nap alatt kellett elvégezni. De naponta a tervezettnél 4 ha-ral többet vetettek, ezért a munkát 4 nappal hamarabb befejezték. Hány hektárnyi területet vetettek be?

1236. Két kotrógép együttesen 12 nap alatt tudja kimélyíteni a folyómedret. Hány nap alatt végeznék el ezt a munkát a kotrógépek külön-külön, ha egyikük teljesítménye 1,5-szer nagyobb, mint a másiké?

1237. A gőzhajó a két kikötő közötti távolságot egyik irányban 4 óra alatt, a másik irányban 5 óra alatt tette meg. Határozzátok meg a két folyami kikötő közötti távolságot, ha a vízfolyás sebessége 2 km/h!

1238. A helikopter a két város közötti távolságot hátszéllel repülve 5,5 óra alatt tette meg, széllel szemben pedig 6 óra alatt. Határozzátok meg a városok közötti távolságot és a helikopter saját sebességét, ha a szél sebessége 10 km/h volt!

EGÉSZ KIFEJEZÉSEK

Határozzátok meg az 1239–1241. kifejezések értékét!

1239. a) $\left(2\frac{3}{4}-2\frac{3}{8}-0{,}3\right) : 6;$

b) $\left(5\frac{9}{25}-2{,}36\right) : \left(3\frac{4}{5}+0{,}2\right).$

1240. a) $\left(3\frac{3}{4}:1\frac{1}{4}-0{,}75\right):1\frac{1}{2}+0{,}75;$

b) $12{,}5\cdot 2\frac{1}{4}-\left(4{,}128-3\frac{3}{4}\right):\frac{2}{5}.$

1241. a) $9x^4-4x^2$, ha $x=\frac{1}{3}$;

b) $10a^2+125a^3$, ha $a=-0{,}2$.

Szorozzátok meg az 1242–1243. egytagokat!

1242. a) $5a^2b$; $\frac{3}{5}ab^3$ és $3ac^4$;

b) $-8xy$; $(-2{,}5)b^2$ és $0{,}1ax$.

1243. a) $4pq^2$; $0{,}15pz^2$ és $5pqz$;

b) $-1\frac{5}{7}ax^2$; $-\frac{1}{3}ax^2y$ és $-2\frac{5}{8}xy$.

1244. Emeljétek hatványra az egytagokat!

a) $(2x^3)^5$; b) $(-xy)^7$; c) $(-3a)^4$; d) $(0{,}5m^2)^3$.

1245. Egyszerűsítsétek a kifejezéseket!

a) $3x^n\cdot 4x^2y^m$; b) $\frac{2}{3}a^{n+1}\cdot 6a^{n-2}$.

1246. Adjátok össze a többtagokat!

a) n^3+m^2n és m^2n-n^3-4;

b) $0{,}7z-2{,}6z^2+z^3$ és $2{,}3z^3+0{,}3z-2$;

c) $-\frac{2}{3}mx-\frac{3}{5}m^2x$ és $2\frac{1}{3}mx-\frac{3}{5}m^2x^2-1\frac{1}{2}x^2$.

1247. Számítsátok ki a többtagok különbségét!

a) $6x^3-2x^5+x$ és $8x^3+3x^5-4x^2$;

b) $3a^2+2ab-b^2$ és $2b^2-2a^2$;

c) $m^2+5m-12$ és $3m^4+m^2-12$;

d) $-x^2y^2+4x-3x^2y-8$ és $2-3xy^2-x^2y^2+y$.

1248. Alakítsátok át normál alakúvá a többtagokat!

a) $-12x^2-(-3x^6+8-10x^2)$;

b) $9m^3-5m+(m-6m^3-2m^4)$;

c) $(-4xy + 7y^2) - (8x^2) + (6xy - 10x^2 - 5)$;
d) $-(3b^2 + 4b^2c) + (6b^2 - c^2b + b^2c) - (2b^2 + 5b^2c)$.

1249. Végezzétek el a szorzást!

a) $3x\,(2x^4 - 5x + 1)$;
b) $-5a^2(3a^2 + 4a - 2)$;
c) $(-ab + 2a^2 - 3b^2) \cdot (-a^2b)$;
d) $(4x^2y - 3xy^2 + 5) \cdot 2xy$;
e) $-0{,}25(2m^2 - 4m + 6)$;
f) $(-10n^5 - 6n^3 + 2)(-1{,}5m)$.

1250. Végezzétek el a szorzást!

a) $-12x^3$ és $\frac{1}{6}x + \frac{2}{3}x^2 - \frac{3}{4}$;
b) $10xy$ és $-0{,}7x^3 + 3{,}2y^2 - x^2y^2$;
c) $-\frac{3}{5}ax^2$ és $5ax^2 - \frac{5}{6}a^2x + \frac{1}{2}a$;
d) $0{,}5y^6$ és $-0{,}8xy + 1{,}2x^3 + 7x^2y$.

1251. Alakítsátok át a kifejezéseket normál alakú többtagokká!

a) $5x(x + 4) - x(6 - 2x^2)$;
b) $-y^2(2y - 6) + 4y(y^2 - y)$;
c) $6a^2b^3 - b^2(5a^2b + b^2 - 1)$;
d) $3xy(2 - 4x^2y + xy^2) - 7xy$.

1252. Bizonyítsátok be az azonosságot!

a) $x(y - z) + y(z - x) = z(y - x)$;
b) $x(y + z - yz) - y(x + z - xz) = z(x - y)$;
c) $ab(a + b + c) - b^2(a - c) = bc(a + b + c) - b(c^2 - a^2)$;
d) $ab(b + c) - bc(a + b) + ac(a + c) = a(b^2 + c^2) + c(a^2 - b^2)$.

1253. Határozzátok meg a szorzás eredményét!

a) $-2a - b$ és $-2a + b$;
b) $-x^2 + y^3$ és $-x^2 - y^3$;
c) $-abc + 1$ és $abc + 1$;
d) $-0{,}2x^4 - x$ és $x - 0{,}2x^4$;
e) $a + b + c$ és $a - b - c$;
f) $x + y - z$ és $x - y + z$.

1254. Adjátok meg a szorzatokat többtagok alakjában!

a) $(4 - x)(4 + x)(16 + x^2)$;
b) $(a^2 - 5b)(a^2 + 5b)(a^4 + 25b^2)$;
c) $(0{,}09x^6 + x^2y^4)(0{,}3x^3 - xy^2)(0{,}3x^3 + xy^2)$;
d) $\left(a^4b^4 + \frac{1}{4}c^2\right)\left(\frac{1}{2}c + a^2b^2\right)\left(\frac{1}{2}c - a^2b^2\right)$.

1255. Egyszerűsítsétek a kifejezéseket!

a) $(2x - 3)(2x + 3)(4x^2 + 9) + 81$;
b) $(5 + x^5)(5 - x^5)(x^{10} + 25) + x^{20}$;

c) $256a^4 - (4a - b^3)(4a + b^3)(16a^2 + b^6)$;

d) $(0{,}1y^2)^4 + (-x - 0{,}1y^2)(0{,}1y^2 - x)(0{,}01y^4 + x^2)$.

1256. Adjátok meg a kéttagokat szorzatok alakjában!

a) $p^2 - q^2$; b) $25 - 0{,}25m^2$; c) $9x^2 - a^4$;

d) $0{,}04x^6 - 1$; e) $-x^2y^4 + a^6b^8$; f) $a^2b^2c^2 - 121x^6$;

g) $\frac{4}{81}z^{10} - x^{16}$; h) $-64 + 36m^4n^2$; i) $a^2 - (b + c)^2$.

1257. Számítsátok ki!

a) $24^2 - 14^2$; b) $62^2 - 38^2$; c) $98^2 - 97^2$;

d) $52{,}5^2 - 48{,}5^2$; e) $14{,}3^2 - 4{,}3^2$; f) $5{,}9^2 - 5{,}2^2$;

g) $\left(17\frac{3}{4}\right)^2 - \left(16\frac{3}{4}\right)^2$; h) $\left(7\frac{2}{3}\right)^2 - \left(2\frac{1}{3}\right)^2$.

Adjátok meg az 1258–1260. kifejezéseket többtagok alakjában!

1258. a) $(0{,}4a^2 - 5ab)^2$; b) $6{,}5xy + 8y^2)^2$;

c) $(x^2y^2 - 1)^2$; d) $(2 + a^6b^4)^2$.

1259. a) $(-x + y^2)^2$; b) $(-2a^2 + 3y^3)^2$; c) $\left(-\frac{1}{3} - 3x^5\right)^2$;

d) $\left(-\frac{1}{2}m^3 - 0{,}2n\right)^2$; e) $(-0{,}1xy + 5)^2$; f) $(-6x^2y - 0{,}5y)^2$.

1260. Egyszerűsítsétek a kifejezéseket!

a) $(3x - 5y)^2 - 3x(3x - 10y)$;

b) $8a(b - 2a) + (4a + b)^2$;

c) $(4x + y)(3x + 4y) - (2y + 3x)^2$;

d) $(3a + 6b)^2 - (2a + 9b)(3a + 4b)$.

Bizonyítsátok be, hogy az 1261–1262. kifejezések értéke nem függ x-től!

1261. a) $(2x - 5y)^2 + 4x(5y - x)$;

b) $3x(12x - 4y) - (6x - y)^2$.

1262. a) $(4x + 5y)^2 - 8(2x - y)(x + 3y)$;

b) $4(x - 6y)(x - 3y) - (2x - 9y)^2$.

1263. Adjátok meg a kifejezéseket többtagok alakjában!

a) $(x + 3)^3$; b) $(y - 2)^3$; c) $(2x - 1)^3$;

d) $(3x + 1)^3$; e) $(m - 2n)^3$; f) $(2a + 3)^3$.

TÖBBTAGOK TÉNYEZŐKRE BONTÁSA

Bontsátok tényezőkre az 1264–1265. többtagokat!

1264. a) $x^3 + x^2y + 2x^2 + 2xy$; b) $a^3c^2 - a^2c^2 + a^3 - a^2$;
c) $4xy + 12x^2y - 4x - 12x^2$; d) $6a^2b - 18a^2 - 3ab + 9a$;
e) $xyz - 4xz - 5xy + 20x$; f) $4ab + 3ac - abc - 12a$.

1265. a) $a^2 - b^2 - a + b$; b) $x + y + x^2 - y^2$;
c) $4a^2 - 9 - 2a - 3$; d) $5 - 3x + 25 - 9x^2$.

1266. Adjátok meg szorzatok alakjában!
a) $x^2 - 2xy + y^2 - z^2$; b) $a^2 + 2a + 1 - b^2$;
c) $x^2 - y^2 + 8y - 16$; d) $a^2 - b^2 - 14b - 49$.

1267. Adjátok meg három tényező szorzatának alakjában!
a) $ab^2 - 4a - b^3 + 4b$; b) $x^3 + x^2y - 9x - 9y$;
c) $x^2a + 3a^2 - a^3 - 3x^2$; d) $x^3 - 5b^2 + 5x^2 - xb^2$.

Bontsátok tényezőkre az 1268–1269. többtagokat!

1268. a) $a^2x^2 - 2abx^2 + 2ab + b^2x^2 - a^2 - b^2$;
b) $a^2x^2 - 4b^2x + 4b^2 + 4a^2 - 4a^2x + b^2x^2$.

1269. a) $a^2 - b^2 + x^2 - y^2 + 2ax + 2by$;
b) $x^4 + y^4 - x^2 - y^2 + 2x^2y^2 - 2xy$.

1270. Bizonyítsátok be, hogy:
a) $145^2 - 144^2 = 17^2$; b) $221^2 - 220^2 = 21^2$;
c) $313^2 - 312^2 = 24^2 + 7^2$; d) $841^2 - 840^2 = 40^2 + 9^2$!

Számítsátok ki az 1271–1272. példákat!

1271. a) $\frac{47^2 - 41^2}{28^2 - 16^2}$; b) $\frac{57^2 - 42^2}{29^2 - 26^2}$; c) $\frac{51^2 - 12^2}{90^2 - 9^2}$; d) $\frac{61^2 - 11^2}{36^2 - 24^2}$.

1272. a) $6^{32} \cdot 4^{32} - (24^{16} - 5)(24^{16} + 5)$;
b) $(56^{10} - 7)(56^{10} + 7) - 7^{20} \cdot 8^{20}$;
c) $4^{18} \cdot 9^{18} + (4 - 36^9)(36^9 + 4)$.

Oldjátok meg az 1273–1274. egyenleteket!

1273. a) $5x^5 - x^4 = 0$; b) $3x^3 - 12x = 0$; c) $10x^6 = 3x^5$.

1274. a) $x^3 + 4x^2 - x = 4$; b) $x^3 - 3x^2 + 2x = 6$;
c) $2x^3 + x^2 - 8x = 4$; d) $12x^3 - 8x^2 - 3x = -2$.

FÜGGVÉNYEK

1275. Adjátok meg képlettel a függvényt, amelynek értékei:
a) 4-gyel nagyobbak argumentuma értékeinél;
b) 9-cel kisebbek argumentuma értékeinél;
c) háromszor nagyobbak argumentuma értékeinél;
d) ellentétesek argumentuma értékeivel;
e) reciprokai argumentuma értékeinek!

1276. Az a cm és b cm alapoldalú és 6 cm magasságú téglatest térfogata 72 cm^3. Fejezzétek ki képlettel a b és az a közötti hozzárendelési szabályt!

1277. A háromszög egyik szöge α, másik szöge ennél kétszer nagyobb. Írjátok le a harmadik szög meghatározásának képletét!

1278. Az ing varrásához 2,5 m anyagra van szükség. Írjátok le az anyagmaradék kiszámításának képletét, ha ismert, hogy x számú inget varrtak meg és a végben 200 m anyag volt!

1279. Határozzátok meg az alábbi képletekkel megadott függvények értelmezési tartományait!

a) $y = x(x-5)$; b) $y = x^2 + 6x + 8$; c) $y = \frac{16-x^2}{x+5}$;

d) $y = \frac{x^2+9}{3x-1}$; e) $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-2}$; f) $y = \frac{3}{x(x+1)}$.

1280. A függvény az $y = 0{,}25x - 1$ képlettel van megadva. Állítsátok össze a függvény értéktáblázatát argumentuma első tíz természetes értékének esetére!

1281. Állítsatok össze értéktáblázatot az $y = \frac{24}{2-x}$ függvény x argumentuma egész számú értékei esetére, ha $-6 \leqslant x \leqslant 6$!

1282. Határozzátok meg az argumentum azon értékeit, amelyeknél a függvény értékei a következők lesznek:
a) $y = -3x + 2$ egyenlő: -7; 0; 5;
b) $y = x(x-3)$ egyenlő: -2; 0; 10.

1283. Adjátok meg az alábbi értéktáblázata alapján a függvény képletét!

x	-4	-1	0	2	3	5
y	-12	-3	0	6	9	15

1284. A 104. ábrán egy gyalogos (*a* vonal) és egy kerékpáros (*b* vonal) mozgásának görbéi láthatók. A görbe felhasználásával határozzátok meg a következőket:

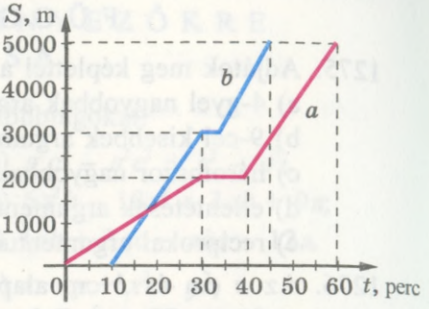
a) egyszerre indultak-e el;

b) állandó volt-e a sebességük;

c) milyen volt a gyalogos és a kerékpáros sebessége útvonaluk egyes szakaszain;

d) melyikük állt meg, és mennyi időre;

e) mekkora távolságra voltak egymástól a gyalogos indulása után fél órával!



104. ábra

Szerkesszétek meg az 1285–1286. képletekkel megadott függvények görbéit!

1285. a) $y = 5x$; b) $y = 5x - 1$; c) $y = -5x$; d) $y = -5x + 3$.

1286. a) $y = x + 4$; b) $y = 1 - 2x$; c) $y = 3x$; d) $y = -\frac{x}{3}$.

Mindegyik görbe esetében szerkesszetek az ordinátatengellyel szimmetrikus görbét! Adjátok meg képlettel a megfelelő függvényt!

1287. A lineáris függvény görbéje átmegy az A és B pontokon. Állítsátok fel a függvény képletét, ha:

a) $A(3; 2)$ és $B(-5; 4)$; b) $A(-1; -6)$ és $B(1; 6)$;

c) $A(-2; 1)$ és $B(1; -2)$; d) $A(-1; 5)$ és $B(3; -3)$!

EGYENLETRENDSZEREK

1288. Ábrázoljátok az alábbi egyenletek görbéit!

a) $x + y = 4$; b) $2x + y = 6$;

c) $-3x + 2y = 5$; d) $-x - 7y = 7$.

1289. Milyen b érték esetén megy át a $B(10; 8)$ ponton a $4x + by = 0$ egyenlet görbéje?

1290. Mivel egyenlő c, ha ismeretes, hogy a $2x + 3y = c$ egyenlet görbéje átmegy az $A(6; -1)$ ponton?

1291. Ábrázoljátok közös koordináta-rendszerben a $3x - 2y = 12$ és $5x + 3y = 1$ egyenletek görbéit, és határozzátok meg metszéspontjuk koordinátáit! Győződjetek meg arról, hogy a kapott számpár mindkét adott egyenlet megoldása!

Oldjátok meg az 1292–1297. egyenletrendszereket!

1292. a) $\begin{cases} 2x + y = 12, \\ 3x - 5y = 5; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 4y = 11, \\ 3x + 2y = 5; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 6x - 4z = 5, \\ 4x - 1{,}5z = 1; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x - 3y = -3, \\ x + 3y = 21. \end{cases}$

1293. a) $\begin{cases} 2x - 3(x - y) = 7, \\ 5y - 2(x - 2y) = 23; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4y - 5(y - x) = 8, \\ 2(3x - y) + 7y = -14; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 0{,}5x + 0{,}3y = 8, \\ 1{,}2x - 0{,}5y = 7; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 1{,}4x - 2{,}5y = 39, \\ 0{,}8x - 1{,}3y = 21. \end{cases}$

1294. a) $\begin{cases} \frac{4}{5}x - y = 7, \\ \frac{2}{3}x + \frac{1}{5}y = 11; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{3}{7}x - z = 15, \\ \frac{2}{5}x + \frac{3}{7}z = 14; \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{x+y}{3} + x = 15, \\ y - \frac{y-x}{5} = 6; \end{cases}$ d) $\begin{cases} \frac{x-y}{2} + y = 4, \\ x - \frac{y-x}{3} = 9. \end{cases}$

1295. a) $\begin{cases} \frac{7+x}{5} - \frac{2x-y}{4} = 3y - 5, \\ \frac{5y-7}{6} + \frac{4x-3}{2} = 20 - 5x; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 80, \\ x + y = 10. \end{cases}$

1296. a) $\begin{cases} x + 4(2y - (x - 5)) = 36, \\ 7\left(\frac{3}{3}(y + 2x) - \frac{1}{5}y\right) = 4x; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \lvert x - y \rvert = 5, \\ x + y = 8. \end{cases}$

1297. a) $\begin{cases} \frac{5+y}{3} - \frac{3x+4y}{4} = 3x + 1, \\ \frac{7x+2}{3} + \frac{4x-3}{2} + \frac{11}{6} = 1 - 3x; \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{7+x}{5} - \frac{2x-y}{4} - 3y = -5, \\ \frac{5y-7}{2} - \frac{3-4x}{6} - 18 = -5x. \end{cases}$

Oldjátok meg egyenletrendszerek felállításával az 1298–1306. feladatokat!

1298. Egy 22 m hosszú zsinórt úgy vágtak ketté, hogy az egyik rész 20%-kal hosszabb lett, mint a másik. Határozzátok meg mindkét rész hosszát!

1299. Egy 22 m hosszú zsinórt úgy vágtak ketté, hogy az egyik rész 20%-kal rövidebb lett, mint a másik. Határozzátok meg mindkét rész hosszát!

1300. Két szakmunkás együtt dolgozva 12 nap alatt tudná befejezni a munkát. Ha egyikük 4 napot dolgozik, a másik pedig 6 napot, akkor a munka 40%-át végzik el. Hány nap alatt végezné el a teljes munkát a két szakmunkás külön-külön dolgozva?

1301. Az egyik raktárban 800 t-val több szén volt, mint a másikban. Azt követően, hogy az első raktárból elszállították a szén 60%-át, a másodikból pedig az 50%-át, az elsőben 200 t-val több maradt, mint a másodikban. Mennyi szén maradt mindegyik raktárban?

1302. Adva van két réz-cink ötvözet. Az egyik 10% cinket tartalmaz, a másik 30%-ot. Mennyit kell venni az egyikből és a másikból, hogy összeolvasztva 400 t, 25% cinket tartalmazó ötvözetet kapjanak?

1303. Két sóoldatból – az egyik 10%-os, a másik 15%-os – 40 g 12%-os oldatot kell készíteni. Mennyit kell venni ehhez az egyik és másik oldatból?

1304. Az egyik két fémből álló ötvözetben a fémek tömegei úgy aránylanak egymáshoz, mint 1 : 2, míg a másik ötvözetben, amely ugyanezeket a fémeket tartalmazza, az arányuk 3 : 4. Hány részt kell venni az ötvözetek mindegyikéből, hogy a kapott harmadik ötvözetben a két fém tömegeinek aránya 5 : 8 legyen?

1305. Három alkatrész össztömege 250 kg. Az első és második alkatrész tömege 10 kg-mal kevesebb a harmadik tömegénél, a második és harmadik tömege pedig 110 kg-mal több az elsőnél. Határozzátok meg mindegyik alkatrész tömegét!

1306. Három ládában almát tárolnak. Az elsőben 2 kg-mal több van, mint a másodikban, a másodikban 4 kg-mal kevesebb található, mint a harmadikban, a harmadikban $1\frac{4}{7}$-szer kevesebb van, mint az első kettőben. Hány kilogramm alma van mindegyik ládában?

EMELTSZINTŰ FELADATOK

1307. A kosárból kivették a tojások felét, majd a maradék felét, később a megmaradt tojások felét, végül ennek a maradéknak a felét. Ekkor a kosárban 10 tojás volt. Hány tojás volt a kosárban eredetileg?

1308. Hány méter szalagot vásárolt a nagymama leányunokáinak, ha a legnagyobb kapta fél méter híján az összes szalag felét, a középső a maradék felét és még fél métert, a legkisebbnek a megmaradt szalag fele és még egy méter jutott?

1309. Két szám különbsége 35. A nagyobbik szám kisebbikkel való osztása során a hányadosban 4-et, a maradékban 2-t kapunk. Határozzátok meg e két számot!

1310. Két tanuló egy könyvet akart vásárolni, amelynek az ára 35 kopijkával haladta meg az egyik tanulónál és 40 kopijkával a másiknál lévő pénzösszeget. Amikor összeadták a pénzt és megvették a könyvet, a visszajáró összeg a könyv árának 0,4 részét tette ki. Mennyibe került a könyv?

1311. Néhány embernek 4000 hrivnyát kellett kiadnia, s úgy döntöttek, egyenlő mértékben vállalják a kifizetést. Ha 3-mal kevesebben lettek volna, akkor mindegyiküknek 2,5-szer többet kellett volna fizetnie. Hány emberről van szó? Mi lett volna, ha a hrivnyát kellett volna kiadniuk?

1312. A postás A pontból B pontba 35 perc alatt kézbesítette a táviratot. A visszaúton 0,6 km/h-val gyorsabban ment, ezért 30 perc alatt tette meg az utat. Határozzátok meg az A és B pont közötti távolságot!

1313. Reggel 8 órakor a faluból egy kerékpáros indult a városba, ahonnan 4,8 óra múlva visszaindult, és 15 órakor megérkezett a falujába. Határozzátok meg a falu és a város közötti távolságot, ha a kerékpáros a város irányában 12 km/h, hazafelé pedig 10 km/h sebességgel hajtott!

1314. A hatjegyű szám első számjegye olyan, mint a negyedik, a második olyan, mint az ötödik, a harmadik olyan, mint a hatodik. Bizonyítsátok be, hogy az adott szám osztható a következőkkel: 7, 11 és 13!

1315. Bizonyítsátok be, hogy ha y számtani középarányosa x-nek és 2-nek, akkor
$x^2 + z^2 + 4y^2 + 2xz = 4xy + 4yz$!

1316. Keressétek meg azt a két természetes számot, amelyek összege 522, a legnagyobb közös osztójuk pedig 87-tel egyenlő!

1317. A tanulmányi verseny feladatait annyi fiú oldotta meg, ahány lány nem tudta megoldani azokat. Kik voltak többen: az összes lány vagy a feladatot megoldók együttvéve?

1318. A vízfolyás irányában haladó tutajról egy fiú a vízbe ugrott és a percig úszott a folyással szemben. Majd megfordult és ugyanolyan saját sebességgel úszva b perc múlva utolérte a tutajt. Melyik nagyobb: a vagy b?

1319. Három edény vizet tartalmaz. Az első edényből a víz felét a másodikba töltötték át, majd a második edény tartalmának $\frac{1}{3}$-át a harmadik edénybe öntötték, s azt követően, hogy a harmadik edényben lévő víz $\frac{1}{4}$-ét az elsőbe töltötték, mindegyik edényben 6 l víz lett. Hány liter víz volt eredetileg mindegyik edényben?

1320. A régiségbolt két festményt vásárolt 3600 hrivnyáért, s az eladásuk után 25% nyereséghez jutott. Hány hrivnyáért adta el az üzlet mindegyik festményt, ha az egyik kép árrése 50%, a másiké pedig 12,5% volt?

1321. Két kerékpáros egyszerre indult el egymással szemben A és B pontból. Megérkezvén a végállomásra visszafordultak és ellenkező irányban folytatták útjukat. Első alkalommal a B ponttól 10 km-re találkoztak egymással, második alkalommal az A ponttól 5 km-re. Határozzátok meg az A és B pontok közötti távolságot!

1322. Az egyik két fémből álló ötvözetben a fémek tömegei úgy aránylanak egymáshoz, mint 1 : 2, míg a másik ötvözetben, amely ugyanezeket a fémeket tartalmazza, az arányuk 3 : 4. Hány részt kell venni az ötvözetek mindegyikéből, hogy a kapott harmadik ötvözetben a két fém tömegeinek aránya 15 : 22 legyen?

1323. *Amerikai népi feladat.* Mary 24 éves, ez 2-szer több, mint ahány éves Ann volt akkor, amikor Mary annyi idős volt, mint Ann most. Hány éves Ann?

1324. *Ausztrál népi feladat.* Az apa azt ajánlotta három fiának: Alfrednek, Johnnak és Charlesnak, hogy a birkáit így osszák el egymás között: Alfred 20%-kal kapjon többet John-nál, és 25%-kal többet Charles-nál. John 3600 birkát kapott. Hány birka jutott Charles-nak?

1325. *Francia népi feladat.* Miután az étteremben Pierre kifizette vacsoráját, észrevette, hogy pénzének ötöd része maradt meg. Centimeből annyija maradt, mint ahány frankja (1 frank =100 centime) kezdetben volt, s frankból 5-ször kevesebbje maradt, mint ahány centime-je eredetileg volt. Mennyit fizetett Pierre a vacsoráért?

1326. *Török népi feladat.* Az öreg Iszhánnak gyerekei, unokái, dédunokái és ükunokái vannak. Iszhánnal együtt a számuk – 2801. Az ükunokáknak még nincsenek gyerekeik, de a többieknek egyenlő számú gyerekük van, minden gyerek egészséges. Hány gyereke van Iszhánnak?

1327. *Bolgár népi feladat.* Egy pásztor 100 állatot legeltet 100 leva bérért. Hány tehén, borjú és ökör van a csordában, ha egy ökörért 10 leva, egy tehénért 5 leva és egy borjúért 0,5 leva fizetséget kapott?

1328. Hányszor kell összeadandóként venni az a számot, hogy a^{20}-at kapjunk?

1329. Oldjátok meg a matematikai fejtörőt:

$$rendszer = ca^m.$$

1330. A vonat a jelzőlámpa mellett 5 sec alatt, a 150 m hosszú peron mellett pedig 15 sec alatt haladt el. Határozzátok meg a sebességét!

5–6. OSZTÁLYOS MATEMATIKAI ISMERETEK

TERMÉSZETES SZÁMOK

A számoláshoz használt 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... számokat *természetes számoknak* nevezzük. A legkisebb természetes szám az 1, legnagyobb természetes szám nem létezik.

Két számot összehasonlítani annyit jelent, hogy megállapítjuk, melyik a nagyobb, melyik a kisebb, vagy hogy egyenlők. A $>$ (nagyobb), $<$ (kisebb), $\leqslant$ (nem nagyobb), $\geqslant$ (nem kisebb) jeleket *egyenlőtlenségjeleknek* nevezzük.

Bármilyen természetes számok *összeadhatók*, s a művelet eredményeként megkapjuk az összegüket:

összeadandó összeadandó összeg

$$a + b = c.$$

A *kivonás* az összeadással ellentétes művelet. Az egyik számból kivonni a másik számot annyit jelent, hogy találunk egy harmadik számot, amely a második számmal összeadva az első számot adja.

Vagyis, ha $a - b = x$, $x + b = a$:

kisebbítendő kivonandó különbség

$$a - b = x$$

Megszorozni az a számot n természetes számmal annyit jelent, hogy az a számot n-szer vesszük összeadandóként. Például

$a \cdot 5 = a + a + a + a + a.$

Bármilyen természetes a és b szám összeszorozható, s eredményül *szorzatot* kapunk:

szorzandó szorzó szorzat

$$a \cdot b = c.$$

Az *osztás* a szorzás fordított művelete. Az a számot elosztani b számmal annyit jelent, hogy találunk egy olyan x számot, hogy $x \cdot b = a$:

osztandó osztó hányados

$$a : b = x.$$

Az alábbi egyenlőségek mindig igazak:
$a + 0 = a$, $a - 0 = a$, $a \cdot 1 = a$, $a : 1 = a$, $a \cdot 0 = 0$.
Nullával osztani nem lehet!
Osztásnál néha maradékot kapunk. Például
$60 : 7 = 8$ (marad. 4).
Itt 60 az *osztandó*, 7 az *osztó*, 8 a *nem teljes hányados*, 4 a *maradék*. A maradék mindig kisebb az osztónál. Ha a maradékot nem vesszük figyelembe, akkor a nem teljes hányadost *megközelítő hányadosnak* nevezzük. Például $60 : 7 \approx 8$. Itt a 8 a 60 és a 7 számok megközelítő hányadosa, $\approx$ a *közelítő egyenlőség jele*.

A TERMÉSZETES SZÁMOK OSZTHATÓSÁGA

Amikor azt mondjuk, hogy egyik szám *osztható* a másikkal, akkor maradék nélküli osztásra gondolunk.
A 0, 2, 4, 6, 8 számokat *páros* számoknak nevezzük, minden más szám *páratlan*.
2-vel azok és csak azok a számok oszthatók, amelyek páros számjegyre végződnek. A 2-vel osztható számokat *párosaknak*, a többi számot *páratlanoknak* nevezzük.
5-tel azok, és csak azok a számok oszthatók, amelyek 5-re vagy 0-ra végződnek.
10-zel azok, és csak azok a számok oszthatók, amelyek 0-ra végződnek.
3-mal azok, és csak azok a számok oszthatók, amelyek számjegyeinek összege osztható 3-mal.
9-cel azok, és csak azok a számok oszthatók, amelyek számjegyeinek összege osztható 9-cel.
M e g j e g y z é s. Amikor a „számjegyek összegé"-ről beszélünk, akkor a megfelelő számjegyekkel leírt egyjegyű számok összegét értjük.
Ha a szám maradék nélkül osztható m-mel, akkor a számot *m szám többszörösének*, az m-et pedig *a szám osztójának* nevezzük. Például 5 a 35 szám osztója, 35 az 5 szám többszöröse.
Az 35-nek négy osztója van: 1, 5, 7 és 35.
Az 5-nek végtelen számú többszöröse van: 5, 10, 15, 20, 25, ...
Azt a számot, amelynek csak két osztója van: 1 és önmaga, *prímszámnak* (*törzsszámnak*) nevezzük. A legkisebb prímszám a 2, legnagyobb prímszám nem létezik. A prímszámok sora:
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ... végtelen.
Azt a természetes számot, amelynek kettőnél több osztója van, *összetett számnak* nevezzük. Az összetett számok sora végtelen: 4, 6, 8, 9, 10, 12, ...

Az 1 se nem prímszám, se nem összetett szám.

Minden összetett szám törzstényezőkre bontható. Például $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$, $81 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$.

A 18 és 81 számoknak három közös osztójuk van: 1, 3 és 9. A 81 és 1001 számoknak csak egy közös osztójuk van, az 1.

Több szám *legnagyobb közös osztójának* azt a legnagyobb számot nevezzük, amellyel az adott számok mindegyike osztható. Több szám legnagyobb közös osztója úgy határozható meg, hogy a számok mindegyikét törzstényezőkre bontjuk és megszorozzuk egymással azokat a törzstényezőket, amelyeket mindegyik felbontott szám tartalmaz. Mindig a legkisebb kitevőjű törzstényezőket vesszük.

Több szám *legkisebb közös többszörösének* azt a legkisebb számot nevezzük, amely az adott számok mindegyikével osztható. Több szám legkisebb közös többszöröse úgy határozható meg, hogy a számok mindegyikét törzstényezőkre bontjuk és az egyik felbontott számhoz hozzáírjuk azokat a törzstényezőket, amelyek a többiekben szerepelnek, de belőle hiányoznak. Mindig a legnagyobb kitevőjű törzstényezőket vesszük. Határozzuk meg 20, 60 és 90 legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét.

20	2	60	2	90	2
10	2	30	2	45	3
5	5	15	3	15	3
1		5	5	5	5
		1		1	

Legnagyobb közös osztó $(20; 60; 90) = 2 \cdot 5 = 10$,

Legkisebb közös többszörös $(20; 60; 90) = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 = 180$.

Ha két vagy több szám legnagyobb közös osztója 1, akkor ezeket a számokat *relatív prímszámoknak* nevezzük. Relatív prímszámok például a 8 és 9 vagy a 4, 7 és 25.

M e g j e g y z é s. A számokat vizsgálva eddig csak természetes számokkal foglalkoztunk.

TIZEDES TÖRTEK

A törtszámokat legtöbbször *tizedes törtek* alakjában fejezzük ki.

Minden tizedes törtnek van tizedesvesszővel elválasztott *egész* és *törtrésze*. Például a 37,45 számban az egész rész a 37, a törtrész a 45 század; a 0,02 számban az egész rész a 0, a törtrész a 2 század.

Két tizedes tört közül az a *nagyobb*, amelyiknek nagyobb az egész része. Ha egész részeik egyenlők, akkor az a nagyobb, amelyiknek a tized stb. része nagyobb. Például $4{,}3 > 4{,}198$.

A tizedes törtek *összeadása* és *kivonása* úgy történik, hogy mindig azonos helyi értékű jegyeket adunk össze a legkisebb helyi értéktől kezdve (jobbról balra haladva). Például

$$\begin{array}{r} 3{,}27 \\ +\ 12{,}8 \\ \hline 16{,}07 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 36{,}28 \\ -\ 7{,}235 \\ \hline 29{,}045. \end{array}$$

Tizedes törtek úgy szorozhatók össze, hogy figyelmen kívül hagyjuk a tizedesvesszőt, majd a szorzatban jobbról annyi számjegyet különítünk el tizedesvesszővel, ahány tizedesjegy összesen van a két tényezőben. Például

$$0{,}02 \cdot 8{,}03 = 0{,}1606.$$

Tizedes tört 10-zel, 100-zal, 1000-rel való szorzásánál a tizedesvesszőt jobbra visszük megfelelően egy, két, három számjeggyel. Tizedes tört 0,1-gyel, 0,01-gyel, 0,001-gyel való szorzásánál a tizedesvesszőt balra visszük megfelelően egy, két, három számjeggyel. Például

$$8{,}0375 \cdot 100 = 803{,}75;\ 34{,}8 \cdot 0{,}01 = 0{,}348.$$

A tizedes törtek osztása a hányados alaptulajdonságain alapul.

A hányados alaptulajdonságai. A hányados értéke nem változik, ha az osztandót és az osztót ugyanazzal a számmal megszorozzuk vagy elosztjuk (a nulla kivételével).

Ezt a tulajdonságot alkalmazva a tizedes törtek osztása a természetes számok osztására vezethető vissza. Számot úgy osztunk tizedes törttel, hogy az osztandóban és az osztóban a tizedesvesszőt annyi számjeggyel visszük jobbra, ahány számjegy van a tizedesvessző után az osztóban. Például

$$2{,}8 : 0{,}07 = 280 : 7 = 40.$$

A számok kerekítésének szabályai. Ha az első elhagyott számjegy 0, 1, 2, 3 vagy 4, akkor a megtartott utolsó számjegyet változatlanul hagyjuk. Ha az első elhagyott számjegy 5, 6, 7, 8 vagy 9, akkor a megtartott utolsó számjegyet 1-gyel növeljük. Például

$$6{,}237 \approx 6{,}2;\ 0{,}8459 \approx 0{,}85.$$

KÖZÖNSÉGES TÖRTEK

Az a és b természetes számok osztásával kapott hányados leírható közönségest tört $\frac{a}{b}$ alakjában, ahol a törtvonal helyettesíti az osztás jelét. Az *a számlálót* és *b nevezőt* a *tört tagjainak* nevezzük. Amikor „tört"-ről beszélünk, közönséges törtre gondolunk.

A törtet *valódinak* nevezzük, ha a számlálója kisebb a nevezőjénél. Ha a tört számlálója nagyobb, mint a nevezője vagy azzal egyenlő, akkor *áltörtről* beszélünk. Az áltört értéke nem kisebb, mint 1, a valódi tört értéke kisebb egynél. Az áltörtből kifejezhető az egész rész és vegyes tört alakjában írható le. Például

$$\frac{13}{5} = 2\frac{3}{5}.$$

A tört alaptulajdonságai. A tört értéke nem változik, ha a számlálóját és nevezőjét megszorozzuk vagy elosztjuk ugyanazzal a természetes számmal.

Ezt a tulajdonságot felhasználva a törteket egyszerűsíthetjük vagy közös nevezőre hozhatjuk. Például

$$\frac{8}{12} = \frac{2}{3}; \quad \frac{25}{15} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}.$$

A tört *egyszerűsíthetetlen*, ha a számlálója és a nevezője relatív prímszámok.

Legkisebb közös nevezőre hozzuk a $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{12}$ és $\frac{1}{18}$ törteket.

Legkisebb közös többszörös (4; 12; 18) = 36. Pótszorzók: 36 : 4 = 9, 36 : 12 = 3, 36 : 18 = 2. Ezért

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 9}{4 \cdot 9} = \frac{27}{36}; \quad \frac{5}{12} = \frac{5 \cdot 3}{12 \cdot 3} = \frac{15}{36}; \quad \frac{1}{18} = \frac{1 \cdot 2}{18 \cdot 2} = \frac{2}{36}.$$

Az egyenlő nevezőjű törteket az alábbi képletek szerint adjuk össze és vonjuk ki:

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{m}; \quad \frac{a}{m} - \frac{b}{m} = \frac{a-b}{m}.$$

A különböző nevezőjű közönséges törtek *összegét* és *különbségét* úgy kapjuk meg, hogy először közös nevezőre hozzuk őket. Például

$$\frac{5}{6}+\frac{2}{3}=\frac{5}{6}+\frac{4}{6}=\frac{9}{6}=1\frac{1}{2};\quad \frac{5}{6}-\frac{2}{3}=\frac{5}{6}-\frac{4}{6}=\frac{1}{6}.$$

A vegyes törtek összeadásának és kivonásának módját az alábbi példák szemléltetik:

$$3\frac{1}{2}+1\frac{4}{5}=3\frac{5}{10}+1\frac{8}{10}=4\frac{13}{10}=5\frac{3}{10};$$

$$3\frac{1}{2}-1\frac{4}{5}=3\frac{5}{10}-1\frac{8}{10}=2\frac{15}{10}-1\frac{8}{10}=1\frac{7}{10};$$

$$7-2\frac{1}{3}+3\frac{1}{5}=6\frac{15}{15}-2\frac{5}{15}+3\frac{3}{15}=7\frac{13}{15}.$$

Törtet törttel úgy szorzunk, hogy külön-külön összeszorozzuk a számlálóikat és a nevezőiket, s az elsőként kapott eredményt a szorzat számlálójába, a másodikat a nevezőjébe írjuk. Például

$$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{7}=\frac{3\cdot 2}{5\cdot 7}=\frac{6}{35}.$$

Két tört *reciprok* értéke egymásnak, ha szorzatuk 1-gyel egyenlő. Az $\frac{a}{c}$ tört reciprok értéke a $\frac{c}{a}$ törtnek és fordítva.

Törtet törttel úgy osztunk, hogy az osztandót megszorozzuk az osztó reciprok értékével:

$$\frac{a}{c}:\frac{m}{n}=\frac{a}{c}\cdot\frac{n}{m}=\frac{an}{cm}.$$

A vegyes törtekkel végzett műveleteket az alábbi példák szemléltetik:

$$4\frac{1}{3}\cdot 2=8\frac{2}{3},\quad 9\frac{6}{7}:3=3\frac{2}{7};$$

$$3\frac{1}{2}\cdot 1\frac{3}{7}=\frac{7}{2}\cdot\frac{10}{7}=5;$$

$$2\frac{2}{5}:\frac{4}{15}=\frac{12}{5}\cdot\frac{15}{4}=9;$$

$$\left(2\frac{1}{3}\right)^2=\left(\frac{7}{3}\right)^2=\frac{49}{9}=5\frac{4}{9}.$$

Több szám *számtani középarányosának* nevezzük az adott számok összegének és darabszámuknak a hányadosát.

Az a, b és c szám számtani középarányosa: $\frac{a+b+c}{3}$.

RACIONÁLIS SZÁMOK

Azokat a számokat, amelyek csak előjelükben különböznek egymástól, *ellentett számoknak* nevezzük. Például a -7 szám ellentettje a 7 számnak. Ez fordítva is igaz. A természetes számok ellentett számait *egész negatív számoknak* nevezzük. A természetes számokat, egész negatív számokat és a nullát együttesen *egész számoknak* nevezzük. A természetes számokat *pozitív egész számoknak* is nevezzük. Negatívak nem csak egész számok, hanem törtek is lehetnek, például

$$-2{,}5,\ -\frac{7}{8},\ -3\frac{2}{5}.$$

Az egész és a törtszámokat (pozitívokat és negatívokat) együttesen *racionális számoknak* nevezzük. A koordinátaegyenesen minden racionális számnak egyetlen pont felel meg.

A természetes számok halmaza az egész számok halmazának része (részhalmaza), az egész számok halmaza pedig a racionális számok halmazának része (részhalmaza). A legfontosabb számfajok közötti kapcsolatokat az alábbi vázlat szemlélteti.



A pozitív számokat (egészeket és törteket) és a nullát együttesen *nemnegatív számoknak* nevezzük.

A nemnegatív szám *modulusa* magával a számmal egyenlő; a negatív szám modulusa a szám ellentettjével egyenlő. Például

$$|3{,}7| = 3{,}7;\ |-12| = 12;\ |0| = 0;\ \left|-\frac{2}{15}\right| = \frac{2}{15}.$$

Két racionális szám közül azt tekintjük *kisebbnek*, amelynek a koordináta-egyenesen az adottól balra eső pont felel meg. Ezért minden negatív szám kisebb minden nemnegatív számnál. Két negatív szám közül az a kisebb, amelyiknek nagyobb a modulusa. Például

$-12 < 0$; $-12 < 7$; $-12 < -9$.

Az $a > 0$, $x < 0$ jelölések azt jelentik, hogy az a szám pozitív, az x pedig negatív. Bármilyen két racionális szám esetében igaz a három állítás egyike: két racionális szám vagy egyenlő, vagy az egyik kisebb a másiknál, vagy az egyik nagyobb a másiknál.

Két negatív szám *összeadásához* elegendő összeadnunk abszolútértéküket és az összeg elé mínusz jelet tennünk. Például $-5 + (-8) = -13$.

Pozitív és negatív számot úgy *adunk össze*, hogy megkeressük abszolútértékük különbségét és a nagyobb modulusú szám előjelét tesszük elé. Például

$$-7 + 12 = 5; \quad \frac{3}{5} + \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{1}{5}.$$

Két racionális szám *különbségét* úgy kapjuk meg, hogy a kisebbítendőhöz hozzáadjuk a kivonandóval ellentett számot. Például

$$-9 - (-2) = -9 + 2 = -7; \quad \frac{1}{8} - \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{8} + \frac{3}{4} = \frac{7}{8}.$$

Két azonos előjelű racionális szám *szorzata* abszolútértékük szorzatával egyenlő. Két különböző előjelű szám szorzata abszolútértékük mínusz előjellel vett szorzatával egyenlő. Például

$$-2 \cdot (-6) = 12; \quad 3 \cdot (-5) = -15; \quad -\frac{2}{3} \cdot 3 = -2.$$

Az a és b bármilyen racionális értékeinél igazak lesznek az alábbi egyenlőségek:

$$(-a) \cdot (-b) = ab; \quad (-a) \cdot b = -ab.$$

Negatív tényezők páros számú szorzata pozitív, páratlan számú szorzata – negatív (ha nem tartalmaz 0 tényezőt). A negatív szám négyzete pozitív, a köbe negatív.

Két racionális szám *hányadosa* modulusaik hányadosával egyenlő, ha az osztandó és osztó előjele azonos. Ha az osztandó és osztó előjelei különbözők, akkor hányadosuk az abszolútértékük negatív előjellel vett hányadosával egyenlő. Például

$$-15 : (-3) = 5; \quad 20 : (-4) = -5; \quad -40 : 5 = -8.$$

Ha az a szám 0-tól különböző, akkor $0 : a = 0$, $a : a = 1$.

Sem a természetes, sem a racionális számok, sem bármilyen más szám nem osztható 0-val!

Bármilyen racionális számok esetében igazak az egyenlőségek:

$a + b = b + a$ – az összeadás felcserélhetőségi törvénye;

$a + (b + c) = (a + b) + c$ – az összeadás csoportosítási törvénye;
$ab = ba$ – a szorzás felcserélhetőségi törvénye;
$a \cdot (bc) = (ab) \cdot c$ – a szorzás csoportosítási törvénye;
$(a + b)c = ac + bc$ – a szorzás széttagolási törvénye.

Ha a zárójel előtt plusz jel áll, akkor ezt elhagyhatjuk. Ha a zárójel előtt mínusz előjel áll, akkor ez is elhagyható, ha a zárójelben lévő minden kifejezés előjelét ellenkezőjére változtatjuk (a zárójel felbontásának szabálya). Például

$$20 + (3 - 7) = 20 + 3 - 7;$$
$$0{,}5 - (2{,}3 - 3) = 0{,}5 - 2{,}3 + 3.$$

ARÁNY ÉS ARÁNYOSSÁG

Két szám hányadosát szokták még azok *arányának* is nevezni. Arányok példái a következők:

$$3 : 7; \quad 0{,}5 : \frac{1}{3}.$$

Az arány alaptulajdonságai. Az arány értéke nem változik, ha mindkét tagját ugyanazzal a nullától eltérő számmal megszorozzuk vagy elosztjuk. Ezért például a 300 : 200 és 3 : 2 arányok egyenlők.

A törtszámok aránya mindig felcserélhető egész számok arányával. Ehhez elegendő az arány mindkét tagját megszorozni közös nevezőikkel. Például

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = 3 : 2.$$

Minden közönséges tört a számláló és nevező aránya:

$$\frac{a}{b} = a : b.$$

Két arány egyenlőségét *aránypárnak* nevezzük. Aránypárok példái:

$$45 : 15 = 21 : 7; \quad \frac{2}{3} = \frac{10}{15}; \quad x : 3 = 20 : 30.$$

Az aránypárt alkotó számokat az aránypár (külső és belső) *tagjainak* nevezzük.



Az aránypár alaptulajdonságai. Az aránypár igaz, ha a külső tagjainak szorzata egyenlő belső tagjainak szorzatával. Vagyis ha

$a : b = c : d$, akkor $ad = bc$.

Két mennyiséget *egyenesen arányosnak* nevezünk, ha az egyik mennyiség néhányszoros növekedésével a másik mennyiség ugyanannyiszor növekszik. Például az acéldarab tömege arányos térfogatával ($m = kV$), a gépkocsi által megtett út arányos haladásának idejével ($s = kt$) (azzal a feltétellel, ha a gépkocsi állandó sebességgel mozog).

M e g j e g y z é s. Néha szükség van a mennyiségek *fordított arányosságának* vizsgálatára (amikor egy mennyiség értékének néhányszoros növekedésével ugyanannyiszor csökken a másik mennyiség értéke).

Ugyancsak szükség van olykor három és több mennyiség arányosságának vizsgálatára. Amikor például azt mondjuk, hogy az a, b és c tőkerészek arányosak 3-mal, 5-tel és 4-gyel, ez azt jelenti, hogy

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{4}.$$

M e g j e g y z é s. Amikor három szám arányáról beszélünk, akkor ezt írjuk $a : b : c = 3 : 5 : 4$. De az ilyen megjelenítésre az arány alaptulajdonsága nem terjed ki. Például $6 : 2 : 3 \neq 60 : 20 : 30$. Az első kifejezés értéke ugyanis 1, míg a másodiké – 0,1.

F e l a d a t. Határozzátok meg a négyszög oldalainak hosszát, ha azok a 3, 6, 4, 2 számokkal arányosak, s a négyszög kerülete 300 cm!

M e g o l d á s. Mivel a négyszög oldalai a 3, 6, 4, 2 számokkal arányosak, ezért rendre a következőkkel egyenlők: $3k$, $6k$, $4k$, $2k$, ahol k – valamely szám (arányossági együttható). Tehát

$$3k + 6k + 4k + 2k = 300,\ 15k = 300,\ k = 20.$$

A négyszög keresett oldalai a következőkkel egyenlők:

$3 \cdot 20 = 60$ (cm), $6 \cdot 20 = 120$ (cm).

$4 \cdot 20 = 80$ (cm), $2 \cdot 20 = 40$ (cm).

SZÁZALÉKOK

A *százalék* – századrész, 1% = 0,01. Valamely szám 1%-a – az adott szám *századrésze*, 50%-a – az adott szám fele.

Százalékaránynak nevezzük a százalékokban kifejezett arányt. Ha egy brigád 40 tagja közül 8 nő, akkor kijelenthető: a nők aránya a brigád létszámához: 8 : 40. Vagy másképpen: a nők a brigád létszámának $\frac{1}{5}$-ét (vagy 0,2-ét) teszik ki. Vagy: nőkből áll a brigád 20%-a.

Az a-nál p%-kal nagyobb szám egyenlő az $a\left(1+\frac{p}{100}\right)$ számmal, az a-nál p%-kal kisebb szám egyenlő az $a\left(1-\frac{p}{100}\right)$ számmal. Valamely számot kétszeresére növelni azt jelenti, hogy 100%-kal megnöveljük. Valamely számot kétszeresére csökkenteni azt jelenti, hogy 50%-kal csökkentjük.

A százalékszámítás három fő módszerét ismerjük: 1) valamely szám százalékának meghatározása; 2) valamely szám meghatározása százalék alapján; 3) két szám százalékarányának meghatározása.

1. f e l a d a t. A vasérc 56% vasat tartalmaz. Mennyi vas olvasztható ki 1000 t ércből?

M e g o l d á s. 56% = 0,56; $1000 \cdot 0{,}56 = 560$ (t).

F e l e l e t. 560 t.

2. f e l a d a t. A cukorrépa 14% cukrot tartalmaz. Hány tonna cukorrépából állítható elő 10 t cukor?

M e g o l d á s. 14% = 0,14; $x \cdot 0{,}14 = 10$ (t), ahonnan $x = 10 : 0{,}14 = 71$ (t).

F e l e l e t. 71 t.

3. f e l a d a t. Az elvetett 200 szójamagból 186 kelt ki. Számítsátok ki, a szójamagok hány százaléka kelt ki!

M e g o l d á s. $186 : 200 = 0{,}93$; 0,93 = 93%.

F e l e l e t. 93%.

FELADATOK ÉS GYAKORLATOK MEGOLDÁSA

6. d) Igen. 7. c) 0,1. 9. f) –8. 17. a) 4. 18. c) 9. 19. a) 4; c) –2. 20. d) –24. 21. c) 2; d) $2\frac{1}{17}$. 22. d) –2. 23. a) 17; d) –2. 27. a) $-1\frac{5}{6}$. 28. a) $12\frac{2}{3}$. 29. a) 5; d) 3. 30. a) 2. 31. a) 6,5. 33. c) –11 és 11. 34. b) –10 és 14. 35. c) 5,5 és 0,5. 36. a) 4; b) 3; c) 6. 37. a) $m = 7$. 38. a) $k < 0$; c) $k \neq -6$. 39. 7,5 cm. 40. $16\frac{2}{3}$ cm. 41. 25 cm. 42. 80 éves. 43. 10 év múlva. 44. 315 bika. 45. a) 0,7; f) 105; h) –1,28. 46. a) 9. 47. 60, 90 és 150. 52. a) Igen; d) igen. 56. a) $-\frac{10}{11}$. 57. c) 2. 58. a) 8. 59. a) 9; e) 0. 60. b) 67. 61. a) 4. 62. a) $\frac{1}{3}$. 63. a) 3. 64. a) 2,8; f) 0. 65. a) 6. 66. a) Nincs megoldása; b) – 8. 67. a) 8. 68. a) –3. 69. 57. 70. 25. 71. 75 és 45. 72. 21 és 9. 73. 255 és 170. 74. 112 t és 56 t. 75. 68 l és 34 l. 76. a) $a = 2$; b) $a \neq 0$. 77. 16. 81. 9,6. 83. 25%-kal; 20%-kal. 90. c) Mindegyik szám. 91. b) Mindegyik szám; c) nincs megoldása. 92. a) 36. 93. a) $\frac{4}{5}$. 94. a) 62. 96. a) $-\frac{4}{15}$; c) $\frac{5}{8}$. 99. a) 23; c) 27.

100. a) 1. 101. c) –2. 102. a) 1; c) 1. 103. a) 2; c) 20. 104. a) 16 és 10. 105. 132 és 22. 106. a) 123 és 32; c) 260 és 198. 107. 0,5. 108. a) 45. 109. b) 34. 110. 4. 111. 36 liba. 112. 1200 gramm. 114. 1) a) $k \neq 0$; d) $k \neq 2$; 2) a) $k = 0$; d) nincsenek ilyen értékek; 3) d) $k = 2$. 117. b) –13; e) 1,125. 119. a) 70; d) 1,75. 125. a) 7,6 és 6. 127. 35 és 70. 128. 3. 129. 40 éves és 8 éves. 130. 150 ha és 280 ha. 131. 21 m és 63 m. 132. 10 m és 15 m. 133. 240 alkatrész. 134. 23,5 cm és 35,5 cm. 135. 31 ha, 25 ha és 16 ha. 136. 26 tanuló, 29 tanuló és 24 tanuló. 137. 11 kg, 23 kg és 22 kg. 139. 172, 258 és 430 ha. 140. 120 virág. 141. 28 tanuló. 142. 5 év múlva.

144. 49,5 km. 145. 27,625 km. 146. 210 km. 147. 70 km/h és 50 km/h. 148. 8 km/h és 12 km/h. 149. 20 km. 150. 36-ig. 151. 19 és 81. 152. 32 és 20. 153. 25 dolgozó és 30 dolgozó. 154. 1 év múlva; 14 év múlva. 155. 28 éves. 156. 11 éves és 47 éves. 157. 35. 158. 52. 159. 221. 160. 91. 161. 40 és 72 kg. 162. 25,6 hr. 163. 4,5 óra. 164. 150 km. 165. 288 km. 166. 210 km és 240 km. 167. 80 km/h és 60 km/h. 168. 12 km/h és 12 km/h. 169. 750 km. 170. 60 km/h. 171. 10 000 hr. és 15 000 hr. 172. 7,5 kg. 173. 372 kg. 174. f) 1,56. 176. d) $a - 9$). 178. b) 3840. 184. b) 0,6; c) 2. 185. a) 0,2. 186. a) 16. 189. a) 2; c) 1,25. 190. a) 6,5; c) –60. 193. a) 2. 194. b) $5 \cdot 10 + b$; d) $100a + c$. 195. a) 2700; 810. 196. b) $0{,}5(38 - 7{,}6)$. 197. a) 5,23. 198. a) 0; c) 186,5. 199. a) –0,5. 200. a) 1,884. 203. a) –5; d) $3\frac{5}{12}$. 204. a) $100c + 10b + a$; c) $a + 0{,}1n + 0{,}01m$. 205. a) $5k$; b) $10k$. 207. a) 4; c) –2. 208. a) –7; b) 2. 209. $100a + 10b + c + 100c + 10b + a = 101(a + c) + 20b$. 210. a) 7. 211. 248, 496 és 456 lakos. 212. 9, 10 és 11 cm. 216. a) Igen. c) nem. 219. a) $5c - 5$; c) $10n - 17$. 220. a) $-4ac - 4a$; c) $-16 + 8ac$. 226. d) $3 - 2{,}9x$. 227. a) $28 + 7x$. 228. a) $10x + 28$. 231. a) 3. 233. a) $8x - 20$. 234. a) $164a - 163x$. 235. a) $18x^2 - 74$; c) $-8c^2 + 6c$. 239. a) Igen; b) igen. 244. a) Nem; b) igen. 248. $P = 3a + 4$. 249. 60 kg és 20 kg. 251. a) –1; e) 3. 257. a) 25, 32, 1 000, 1 000 000, 625; d) 16, 169, –32. 258. b) 31. 259. a) 270; d) –0,1. 260. c) 1,8; e) 13,31. 262. a) Igen; b) nem. 264. a) 9 cm^2; c) 72,25 km^2. 265. a) 5^3; d) 3^5. 266. b) 810. 267. a) 225; c) 17. 268. a) 1 és –1; c) –5. 269. a) –1; c) 1. 271. a) $2 \cdot 10^4$; b) $7{,}53 \cdot 10^6$. 272. a) 52 000; d) 444; f) 3 125 000. 273. a) Igen; c) nem. 274. a) 324; c) 1. 275. a) 81; d) –12,1. 276. a) 1. 286. a) 6; d) 2. 287. a) 1 és –1; c) 0; f) 6. 288. a) $2{,}87287 \cdot 10^8$; $1{,}753 \cdot 10^7$; $2{,}205 \cdot 10^5$; $9{,}099 \cdot 10$. 289. b) 0,0002, 0, 0011, 0,00009, 0,00000675. 293. a) Igen; d) nem; f) nem. 295. 8 óra.

301. a) 3^{19}; c) $(-11)^9$; h) $(-1{,}2)^2$. 302. e) y^{16}. 303. a) 4^{12}; d) $0{,}2^8$. 304. a) a^6; c) y^{14}; f) $-b^{21}$. 310. a) 1; c) 1.311. a) 10 000 000; f) 1.

312. a) Nem; b) igen. 313. a) 1; d) –1. 314. a) $5{,}4 \cdot 10^5$; $-6 \cdot 10^4$; $7{,}2 \cdot 10^{10}$; 0,8. 315. a) $5{,}8 \cdot 10^5$; c) 2. 316. a) 2. 317. c) $1\frac{1}{2}$; f) 256. 318. a) 25; c) –0,16. 319. a) a^{19}; d) b^{16}. 320. a) $(ax)^6$; e) $(2x)^5$. 321. a) 5^9. 322. a) –1; c) 1. 323. a) x^9. 324. a) 2. 325. a) –1; f) –2. 326. b) $4{,}8 \cdot 10^{10}$; $4{,}2 \cdot 10^{10}$; $1{,}35 \cdot 10^{20}$; $1{,}5 \cdot 10$. 328. a) $3{,}55 \cdot 10^5$. 332. a) Nem; c) igen. 333. 150 t és 750 t. 339. b) 1,08. 340. b) $\frac{1}{10}x^3y^3$. 341. a) $36a^6z^4$. 342. d) $0{,}04x^6m^2$; $0{,}008x^9m^3$. 343. e) $-8a^6b^3$. 344. a) $18am^2c^2$. 345. a) $-14a^2x$. 346. $30a^2x^5$. 347. b) –4500; d) –13,5. 348. c) $3a^2b^6$. 350. c) $0{,}125a^3x^3y^9$. 351. f) $5\frac{1}{16}a^4b^8c^4$. 353. c) $-27x^{11}y^3$. 354. d) $-1\frac{2}{3}a^9x^8$; h) $0{,}1x^9y^6$. 356. b) –1. 357. a) $(4a^2b)^2$. 358. a) $(-2a^2)^3$. 359. a) $-0{,}3y^2$; d) $-\frac{1}{5}m^3n^3$. 360. a) 4,2; d) $81\frac{2}{3}$. 361. a) –4 500; b) 250. 363. 320 fa; 192 meggyfa. 369. b) $5abc^2$. 370. e) $5a^2x$. 371. a) $-x^2 + x - 12$; f) $-\frac{2}{3}xy^3 + 1\frac{2}{5}x^3y$. 372. a) $-9x^3 - 3x^2$; c) $-3m^5 - 7m^3 - 7$. 373. a) $2b^2 + 4a - b$; e) $\frac{1}{2}a$. 374. a) $3x^4 - x^3 - 5x^2 - 2x$; d) $-x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1$. 375. a) 0; c) –0,632. 376. b) –1,2. 378. d) $-a^3 - 3a^2c + 2ac + c^2$. 379. d) 1,2. 380. c) $a^2c - ac + 1$; h) $-x^5 - 6x^4$. 381. c) $2x^8 - 3x^5 - 4x^2 + 10$. 384. $2a + b$. 385. $8m + 4n$. 386. $S = 52a^2$; $V = 22a^3$. 389. $\frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2$. 390. $v_1 + \frac{1}{2}v_2$. 391. $1{,}5v_1 - 1{,}5v_2$. 394. c) $4ax^3 - a^2x^3 + 9a^2$. 395. c) –900. 397. a) $9x^2 - 25y^2$.

401. c) $-5a^3b + 5ab^2 - 5ab + 3a^2b$. 402. a) $x^3 - x^2 - 10$; c) $8a^2c - 7ac^2 - 7a^2c^2 + c - 4$. 403. a) $x^2 + 9x + 5$; c) $-6c^2 + 5c - 3$. 404. b) $6x^3 - 4x^2$. 405. a) $c^2 + 3c + 1$. 406. a) 26; c) 3. 407. $\frac{5}{14}$. 408. –3. 409. a) –5; c) 12. 410. a) 1 és –1; d) $\frac{1}{4}$. 411. a) $n^4 + n^3 + 4$;

d) $x^4 + x^2 - x + 2$. 412. c) $a^2 + 1{,}5b^2 - 2{,}5a$; f) $2\frac{1}{2}y^2 + \frac{2}{5}x^2y - 3xy$. 414. c) $1\frac{5}{6}z^3 + 4\frac{1}{2}az^2 - \frac{2}{3}a^2z$; d) $-3c - 5$. 415. a) $-1\frac{1}{2}ax^2 - 1\frac{1}{3}a^2x$; c) $ax^3 + a - 5$. 419. a) $8a^3 - 3a^2 + 10$; b) $-3x^2 - x - 23$; c) $2xy - 16x^2 + 6y^2 + 6$. 420. a) $a^3 - 4a^2 + 4$. 421. a) $x^3 - 13x^2 + 4x - 8$. 422. a) $5c^3 + c^2 - 12c - 6$. 423. a) $5y^3 - 4y^2 - 2$. 426. a) $100a + 10b + c$; e) $101a + 110b + 11c$. 430. a) $-\frac{7}{9}$. 431. 6,9. 432. $43\frac{1}{3}$ q. 436. a) $6a^2 + 2ac$; d) $m^5 + 3m^3$. 437. c) $0{,}5a^2c^2 - c^3$. 438. d) $9x^3y^2 - 15x^2y^2 + 6xy^2$. 439. a) $x^3 + x^2$; f) $-2a^3 + 2a^2 + 2a$. 440. a) $8a^5$; g) $-2c^3 - c^2$. 441. a) Igen; d) nem. 442. a) 2,7; d) –5. 443. a) 4; c) $-4\frac{2}{11}$. 444. b) $\frac{5}{6}$. 445. a) $\frac{1}{5}$; c) $2\frac{9}{19}$. 446. a) $6x^5 - 8x^4 + 10x^3$; d) $-5yz^6 + 6yz^5 + 30yz^3 - 9yz^2$. 447. b) $6x^4n + 10x^3n^2 - 2x^2n + 8n^3x$; d) $-4x^5y^2 + 2x^3y^3 + 2\frac{2}{3}x^2y^4 + 6x^2y^3$. 448. a) $2a^3x^4 + 3a^2x^3$; d) $-14x^4y^3 - x^5y$. 449. a) $3x^5$; c) $1{,}8ac^2$. 450. a) $b - a$; d) $\frac{2}{3}z^3 - \frac{3}{4}x^2z$. 451. a) 7; c) $a^4 - a - 2$. 452. b) 2. 453. a) 1,2; c) 9. 454. a) $1\frac{1}{4}$; c) 5. 455. a) –5; d) 10. 456. a) $3\frac{1}{7}$; c) 9. 458. 82 tehén. 459. 70 és – 10. 460. 20 füzet; 15 notesz. 461. 2 cm; 8 cm. 462. 40 cm; 120 cm. 463. 2,5 és 15. 464. 12 éves; 48 éves. 465. 15 éves. 466. 4 nap elteltével. 467. 20 gramm. 469. a) 48; b) –25; c) 108; d) –121. 472. a) $\frac{2}{11}$; b) $\frac{3}{11}$; c) $\frac{1}{11}$. 476. a) $am + bm - an - bn$; d) $ac + a^2x + cx + ax^2$. 477. a) $ac - bc + ad - bd$. 478. a) $1 - 4x^2z^2$; c) $a^4 + 2a^2b + b^2$. 479. a) $6x^2 + 5x - 6$. 480. c) $x^3 + 1$; f) $0{,}25x^2 - 1{,}69$. 481. a) Igen; c) nem. 482. a) $x^3 - 3x^2 + 4x - 2$; f) $x^2 + x$. 483. a) 0,36; c) –0,04. 484. a) $5x^2 - 18x + 14$; c) $a^2 - 2ab$. 485. a) $-a^2 - a - ab + 3b$; c) $-y^2 + 3x$. 486. b) $x^2 - 2xy + y^2$. 487. a) $7b^2 + 1$.

488. a) $\frac{3}{4}$, c) $-\frac{5}{9}$. 491. a) $-5a^2$; c) $-a^4 - x^2$. 492. a) $a^3 - 3a^2 +$ $+ 4a - 2$; c) $0{,}49z^2 - 6{,}25c^2$. 493. a) $x^4 - 2x^3 - 15x^2 + 2x - 10$; c) $8a^3 + b^3$. 494. a) $5x^4 + 6x^3y - 33x^2y^2 + 5y^3x + 12y^4$; c) $4a^4 +$ $+ 5a^3 - a^2 - a + 1$. 495. a) $\frac{1}{12}a^2 - \frac{1}{72}ab + \frac{11}{48}ac - \frac{1}{6}bc +$ $+ \frac{1}{8}c^2 - \frac{1}{6}b^2$. 496. a) 1; c) c^2. 497. a) 1; c) $8a^3$. 498. a) 1; c) a^6. 500. b) $9a^2c^2 + 6acb^2 + b^4$. 501. a) a^4; c) 1. 503. a) $-\frac{1}{3}$; c) -1. 504. a) 0,01; d) $5\frac{1}{16}$. 505. a) $-3{,}5$; c) 1,1. 506. a) 1; c) 3. 507. a) Nincs megoldás; c) nincs megoldás. 508. 4-gyel. 509. 7-tel. 512. b) 10. 518. a) $x(a + b)$; e) $2b(2b - a)$. 519. a) $a(2a + 3)$; f) $15(ab + 3c)$. 520. b) $m(mx + y)$; f) $5a^2x(2 + x)$. 521. a) $ab^3(a^2 - 6b)$; e) $a^4(3a^2 + 6a + 1)$. 522. a) $2c(ac - 4c^2d + 2ad)$; f) $ax^2(-2ax -$ $- a^4cx^2 + 3c)$. 523. b) $ab(a - 2a^2b + 3b^2 - b)$. 524. a) $(3x - 2y)\times$ $\times(a + b)$; c) $(5a + 3)(x - y)$. 525. a) 12,3; c) 113. 528. a) 0 és 3; d) 0 és 2,5. 529. a) 0 és 1; f) 0 és 0,1. 530. a) $a(3ab + 2b - 5)$; c) $ac(5c - c^2 - 3a)$. 532. b) $x^3yz^3(9z + 7xy)$. 533. a) $5a^2\,mx(3ax^3 +$ $+ 4mx^2 - 5a^2)$. 534. a) $a(a^2 + 3ax - 3x^2 - a^3 + 2)$. 535. b) $0{,}6a^2b^3c^4\times$ $\times\,(2 - a + 3a^2)$. 536. a) $36x^{18}y^{10}\,(4x^2y^8 + 1)$. 537. c) $\frac{1}{5}a^3x^7 \times$ $\times\,(2x^3 - 3a)$. 539. a) $(x + y)(a - 2)$; d) $(x^2 - a + c)(a - c)$. 540. a) $(1 - x)(x + 1)$. 541. b) $(4 + 3a)(x - y)$. 542. a) $3(x + 2y) \times$ $\times\,(2x - y)$. 544. a) $a^3(b^2 - a)^3$; e) $\frac{1}{4}a^2b^2\left(a + \frac{1}{2}b\right)^2$. 545. a) 0 és 2. 546. a) 0 és -2. 547. c) 0; 1 és -1. 548. a) 0,1; c) 22,5. 549. b) $x^2(2x + 3)(4x + 3)$; d) $(2x - 1)(2x^2 - x - 2)$. 550. a) $x^n(x +$ $+ 1)$; f) $3a^{k+2}\,(3a^3 - 1)$. 551. 42. 552. 4 q. 553. 32 q. 557. a) $(x + y) \times$ $\times\,(a + 1)$; c) $(1 + a)(c + y)$. 558. a) $(1 + a)(x + y)$ e) $(a + b)(x - y)$; h) $(x + 2y) \cdot (3 - x - 2y)$. 559. a) $(a + b)(x + y + z)$; b) $(a + 1)(z -$ $- x + 1)$. 560. a) $(a + b + c)(x + 3)$; c) $(x + y + 1)(a^2 - 5)$.

561. a) $(a + b)(x - y)$; c) $(z + c)(a - z)$. 562. a) $(2a - b)(x + 5y)$; c) $(3p + q)(m - n)$. 563. a) $(x + y)(x + a)$; b) $(3a^2 - 1)(a + 4)$. 564. a) 3620. 565. 1728. 566. a) -3 és 15; c) 3. 567. a) $1\frac{1}{2}$. 568. a) $(4a - 3) \cdot (a - z)$; d) $a(a + b)(a - c)$. 569. a) $(a - 4)(a - b)$; c) $(c - 1)(a - b)$. 570. a) $(a + n)(x + y - z)$; c) $(2a + c)(-3x^2 + x + c)$. 571. a) $(z^2 + z - 1)(a - b)$; c) $x(x + 1)(a + b - c)$. 572. a) $(m - c) \times$ $\times (2a + 3x - 7)$; c) $(9x^2 + 2x - 1)(c^3 + 1)$. 573. a) $(x^3 + a^3 + c^3)(x - a)$; c) $(x^2 + y^2)(x + y + z)$. 574. a) $(x^2 - y^2)(x + y + xy)$; d) $\frac{1}{13}(x +$ $+ 4ay)(3axy - 1)$. 579. b) $(x + 1)(x + 5)$; h) $2(x - 3)(x - 0{,}5) =$ $= (2x - 1)(x - 3)$. 580. a) 2 és -7; c) 4. 581. a) 5; c) $(z - 2)(z^4 +$ $+ z^2 + 1)$. 582. a) $-1\frac{11}{24}$; e) $\frac{1}{4}$. 583. a) $-2{,}4$; d) $-\frac{29}{30}$. 588. d) $(3z +$ $+ 2)^2$. 589. a) $a^2 + 2ac + c^2$. 590. b) $4a^2 + 20ax + 25x^2$; h) $c^2q^2 -$ $- 4pcq + 4p^2$. 591. a) $a^2x^2 + 10ax + 25$; e) $25a^2 + 30ab + 9b^2$. 592. a) $9c^2 - 30c + 25$; f) $4a^4 - 12a^2cx^2 + 9c^2x^4$. 593. a) $m^2 + 4m +$ $+ 4$; c) $4a^2 + 4ab + b^2$. 594. a) $n^2 + n + \frac{1}{4}$; c) $4a^6 + 4a^3 + 1$. 595. a) $b^2 + 2bc^3 + c^6$; d) $\frac{1}{4}c^2 + 2ca + 4a^2$. 596. a) $9a^2 - 30a + 25$; c) $1{,}69x^6 - 2{,}6x^3 + 1$. 598. a) $(3 - x)^2$; d) $(ab + 6c)^2$. 599. a) $(3a +$ $+ c)^2$; c) $(2m + 1)^2$.

600. a) 9; c) $-4a^2 + 4a$. 601. a) $2x^2 - 2x - 31$; c) $-x^2$. 602. a) 1; c) 4. 603. a) Nincs megoldás; d) 0 és 20. 604. a) $x^2 + 6xy + 9y^2$. 605. a) $0{,}04c^2 - 0{,}4p^3c + p^6$; d) $a^4 - 16a^2c^5 + 64c^{10}$. 606. a) $\frac{1}{4} +$ $+ 2c^2 + 4c^4$; c) $\frac{1}{25}c^2 + \frac{1}{5}ca^2 + \frac{1}{4}a^4$. 607. a) $(x + 6)^2$; d) $(4m +$ $+ 2n)^2$. 609. a) 16. 610. a) $20a + 34$; c) $5a^2$. 611. a) y^2; c) $c^2 - 10x^4$. 612. a) 20; c) 57. 614. a) 9; b) 1. 615. a) 1; c) $\frac{1}{3}$. 616. a) -5; d) -2. 625. a) $x^{2n} + 2x^n + 1$; c) $a^{2n} + 2a^{n+m} + a^{2m}$. 628. a) $x^3 + 9x^2 +$ $+ 27x + 27$; d) $m^6 + 6acm^4 + 12m^2a^2c^2 + 8a^3c^3$. 629. d) $27x^3 +$

$+ 27x^2 + 9x + 1$. 630. a) $(a - 1)^3$; c) $(3x + 4)^3$. 634. a) $8a^3 +$ $+ 36a^2c + 54ac^2 + 27c^3$; c) $0{,}008c^9 - 0{,}12c^6 + 0{,}6c^3 - 1$. 635. a) $\frac{1}{3}$. 636. a) 0. 637. a) $a^3 + a^2 + 3a + 4$. 638. a) $-4a^3 + 3a^2c - c^2 - 3c^3$. 639. a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{2}$. 641. a) $x^2 - m^2$; d) $25 - a^2$. 645. a) $(5 - x)(5 + x)$. 648. a) $16a^2 - 1$; d) $a^2 - c^4$. 649. a) $9p^2 - q^2$; d) $m^4 - n^4$. 650. a) $\frac{4}{9}x^2 - 1$; d) $2{,}25 - m^4$. 651. a) $32x^2 - 2$; c) $4q^2 - c^6n^2$. 652. c) $7a^2 - 1\frac{2}{7}a^6b^2$. 653. a) a^2; c) 1. 654. a) $x^4 - 81$; c) $16a^4 - 1$. 655. a) $x^2 - y^2$; c) $4a^2 - 9b^2$; g) $9x^4a^2 - 1$. 657. a) $(x - m)(x + m)$; c) $(b - c^2)(b + c^2)$; h) $(c^2 + 3a)(-c^2 + 3a)$. 658. a) 1000; c) 14 400; e) 452. 660. a) $4a^2b^2c^2 -$ $- 9a^4$; c) $16a^2b^4 - 25a^2c^2$. 661. a) $0{,}04a^2x^2 - 1{,}44a^2y^2$; c) $\frac{1}{4}a^2x^2 -$ $- \frac{4}{9}a^2z^4$. 662. a) $9x^2 - y^4$; c) $4a^2x^4 - 9a^4x^2$. 663. c) $-x^3y + 4xy^3$. 664. a) $a^4 - 16$; c) $81x^8 - y^4$. 665. a) $16x^8$; c) c^8. 668. a) $(p - q)(p + q)$; d) $(0{,}2x^3 - 1)(0{,}2x^3 + 1)$; g) $\left(\frac{2}{9}z^5 - x^8\right)\left(\frac{2}{9}z^5 + x^8\right)$. 673. a) $-\frac{1}{2}$; b) 3; c) –25. 674. a) 27; c) $\frac{1}{9}$. 682. a) 5 cm; b) 13 m; c) 25 dm. 683. a) $1 - x^{32}$. 685. a) 11. 686. a) 5; d) $2\frac{2}{9}$. 687. 70 kop. és 1,4 hr. 688. a) Igen; c) nem. 690. 70° és 110°. 691. 100° és 80°. 692. 112° és 68°. 694. a) $(p - q)(p + q)$; d) $(p - x^2)(p + x^2)$. 695. a) $(1 - p^2) \times$ $\times (1 + p^2)$; e) $(-c + 4)(c + 4)$. 696. a) $(3m - 2x)(3m + 2x)$; c) $(x^2 -$ $- 2c^2)(x^2 + 2c^2)$. 697. a) $(x + 5)(x + 5)$; c) $(a - 4x)(a - 4x)$. 698. a) $(a + m)(a + m)$; d) $(b - 3)(b - 3)$. 699. a) $(1 + 3x)(1 + 3x)$; c) $3(a - b)(a - b)$.

700. a) $-(2c + 1)(2c + 1)$; c) $-(c - 2)(c - 2)$. 701. a) $(2a + 9) \times$ $\times (2a - 11)$; c) $(x + c + 3xc^2)(x + c - 3xc^2)$. 702. a) $-5(4x + 5) \times$ $\times (2x - 1)$; c) $(0{,}5 - 3a - 4a^2)(0{,}5 - 3a + 4a^2)$. 703. a) $(3x - 5) \times$

$\times (3x + 1)$; c) $(9x + 1)(-x - 1)$. 704. a) $(8a + 13)(2a + 1)$. 705. a) $(4 + a)(4 + a)$; c) $(x^2 - 7)(x^2 - 7)$. 706. a) $(3a - 1)(3a + 1) \times$ $\times (9a^2 + 1)$. 707. a) $3(a - 1)(a + 1)$; c) $5(x - 2)(x + 2)$. 708. a) 3; -3; c) 10; -10. 709. a) 3; c) 4. 710. a) 3; c) 1. 711. a) $-\frac{1}{3}$; c) $-\frac{1}{2}$. 712. a) $(xy - 9)(xy + 9)$; c) $\left(\frac{1}{3}p^3 - 4a\right)\left(\frac{1}{3}p^3 + 4a\right)$; f) $(a^5b^4c^2 -$ $- 1)(a^5b^4c^2 + 1)$. 713. a) $(1 - a - b - c)(1 + a + b + c)$; d) $(x^2 -$ $- 6x + 1)(x^2 + 1)$. 714. a) $(a^2 - n)(a^2 - n)$; d) $(3c^4 + x^3)(3c^4 + x^3)$. 715. a) $(n + 4)(3n + 2)$; d) $4(p + 2q)(2p + q)$; f) $9c^2$. 716. a) $(x - 1) \times$ $\times (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$. 717. a) 20; c) 17. 718. a) 1. 719. a) 1; d) 9. 720. a) $(x - 11)^2 \geqslant 0$; d) $-((x - 3)^2 + 1) < 0$. 723. a) $4c^2$; d) $36z$. 725. a) $(x - 1)(x - 1)(x - 1)$; d) $(2y - 1)(2y - 1)(2y - 1)$. 726. a) $(m + n)(m + n)(m + n)$; c) $(3a - b)(3a - b)(3a - b)$. 727. a) $(3x + 2y)(3x + 2y)(3x + 2y)$; d) $(0{,}5a + b^2)(0{,}5a + b^2) \times$ $\times (0{,}5a + b^2)$. 728. a) 5; d) $-\frac{1}{4}$. 729. a) $\frac{1}{2}$; d) 10. 730. -1; 0. 731. b) $-\frac{1}{2}$; 3. 733. 35; 37. 735. 17; 38. 736. a) $(x^n - 1)(x^n + 1)$; d) $(a^n - 1)(a^n - 1)$. 740. $4{,}2 \cdot 10^8$; $3{,}8 \cdot 10^8$; $8 \cdot 10^{15}$; $2 \cdot 10$. 749. b) $(0{,}1 - a^2)(0{,}01 + 0{,}1a^2 + a^4)$; c) $(3x^2 - ay)(9x^4 + 3x^2ay + a^2y^2)$. 751. e) $-(z + p)(z^2 - zp + p^2)$. 753. f) $\left(\frac{2}{3} - axz\right)\left(\frac{4}{9} + \frac{2}{3}axz + a^2x^2z^2\right)$. 757. c) $27x^3 + 125$. 758. b) 0,000008. 759. b) 4. 760. a) 27. 761. c) $0{,}125a^6 + b^3$; d) $64m^3 - m^6$. 763. c) $27x^3 + y^3$. 764. a) $8a^{21} +$ $+ b^{12}$. 765. a) $a^{24} - 8x^3$. 767. b) $p^3 - q^6$. 768. c) $x^6 + y^6$. 769. d) $(3a + 1)(21a^2 - 6a + 1)$. 770. c) $(x - y)(x^2 + xy + y^2 - 1)$; d) $(a^2 + ab + b^3)(a - b - 1)$. 771. b) 8. 772. c) 12. 773. $(x^3 - y^n) \times$ $\times (x^6 + x^3y^n + y^{2n})$. 776. b) 16. 777. b) -1. 783. 700 000 hr.; 200 000 hr. 790. d) $3(3x - 5)(3x + 5)$; f) $a^2(10a - 1)(10a + 1)$. 791. c) $x^2y \times$ $\times (8 - 3y)(8 + 3y)$. 792. f) $5a(3 - a)(3 + a)$. 793. b) -6; 0; f) -1; 0; 1. 794. d) 0; 0,04. 795. b) $5a(2a - 1)(2a - 1)$; f) $p^2(1 + 3x)(1 + 3x)$. 796. b) $-(a + 3)(a + 3)$; c) $5(x - y^2)(x - y^2)$. 797. d) $(x + 1 - a) \times$

$\times (x + 1 + a)$. 798. a) $4(b - 1)(a + 3)$; c) $(m - x - 2)(m + x + 2)$. 799. a) $(x - a)(1 + x + a)$; d) $(c + m)(c - m - 1)$.

800. b) $(c + 3)(c - d)(c + d)$; d) $(a + b)(1 - a^2 + ab - b^2)$. 802. c) $-8y(y + 2)(y^2 - 2y + 4)$; e) $a(0{,}2 + a^2)(0{,}04 - 0{,}2a^2 + a^4)$. 803. b) $a^3c(3a - c)(3a + c)$; f) $2(x^2 - 2)(x^2 + 2)$. 805. b) $\frac{1}{2}z\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}z\right)\times$

$\times \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}z\right)$. 806. b) $x(2a - 0{,}5x)(2a - 0{,}5x)$; d) $0{,}5a^2(x - 1)(x - 1)$.

807. a) $a\left(\frac{1}{2}c-1\right)\left(\frac{1}{2}c-1\right)$. 809. a) $a(x + y)(2 - y)$; d) $(3a + 1) \times$ $\times (3a + 2)$. 810. b) $x(x + a + 2)(x - c)$. 811. b) $(a^2 + a + 1)(x^2 + y^2)$. 812. b) $(a^2 - 1 - a + c)(a^2 - 1 + a - c)$. 813. b) $(x^2 + 2)^2 + (y^2 + 2)^2$; d) $(x + 1)^2 + x^2$. 814. a) $(ab - 1)^2 - (c + 3)^2$; c) $(a - 2x)^2 - (x - c)^2$; d) $(a^2 - 2)^2 - (a + x)^2$. 815. b) $(5c^2 + 5)^2$. 818. a) 0; c) 3; e) –2. 819. b) 0; d) 1. 833. b) 2; d) 3. 834. b) 3; d) –2. 835. b) $-\frac{1}{2}$; 2. 836. b) –2; 2; 0; 3. 837. b) 1. 838. b) –9; 9. 839. c) –1; 5. 840. b) –2; $\frac{1}{3}$; 2; d) –3; $\frac{3}{2}$; 3. 854. $m = 8{,}6\,V$. 857. $P = 3a$; igen. 859. $\alpha = 180 - \beta$; igen; β. 861. 7; 5; –1; 19; 2005. 864. Igen. 865. Igen. 866. 30. 869. a) A valós számok halmaza; b) a valós számok halmaza, kivéve $x = -5$. 870. $y = 500 - 60x$; 1, 2, 3, ..., 7, 8. 871. $z = 2{,}5m$; $z = 45$ hr.; $m = 50$ kg. 872. $m = 12t$, ahol t az idő órákban, m a tömeg tonnákban. 873. $x = 60t$, ahol t az idő órákban, x az idő percekben. 874. a) $y = -2x$; c) $y = 12 + \frac{x}{2}$. 875. a) –21; –5; 7; 91; 195. 876. a) 2; 0; c) –3; 0 és –6. 877. $\alpha = 90° - \frac{\beta}{2}$; igen. 879. $s = 5 - 4t$, ahol t az idő órákban, s a távolság kilométerekben. 880. $m = 600 + 40t$; igen. 882. $l = 2{,}54d$, $d = \frac{l}{2{,}54}$, ahol l a hosszúság centiméterekben, d a hosszúság hüvelykekben. 884. $r = \frac{1}{2\pi}C$.

885. a) A valós számok halmaza; c) a valós számok halmaza, kivéve $x = -4$. 886. a) A valós számok halmaza; c) a valós számok halmaza, kivéve $x = -5$; e) a valós számok halmaza, kivéve $x = \pm 6$. 887. $S = 100 - \pi x^2$, $0 < x < 10$. 891. $\frac{\frac{n}{2}+3}{n}$. 892. a) $0{,}5a^3b - 0{,}32ab^3$; c) $-x^3y + 4xy^3$. 894. a) $x = 5$; c) $z = -2$. 895. 47 könyv és 41 könyv. 900. Igen. 901. b); c); e); f). 907. a) Nem; c) igen. 908. a) D; c) E. 918. b); e); f). 919. a) Igen. 920. c) A nem tartozik hozzá, B és C hozzá tartozik. 927. $m = 9$. 928. $k = 2$. 929. $m = 0$. 931. a) $(a + c)(b + c)$; d) $(5x + y)(2a - b)$. 934. a) $x = 3$; d) $x = 1$. 936. b) Igen. 937. 2; 0. 943. Igen, igen, nem. 944. a) Igen; b) nem; c) igen. 947. $m = 180s$, igen. 950. a) (0; 8), (–2; 0). 952. a) (0; –3,4), (2; 0); f) (0; 1,5), (1,5; 0). 953. a) (2; 2); d) (–3; 0). 955. a) $k = -2$. b) $k = -3$. 956. $k = 1$, $p = -0{,}5$. 960. a) $y = \frac{1}{2}x + 1$. 964. ≈180 hr.; ≈400 hr.; 490 hr. 967. a) $x = -\frac{1}{2}$. 968. a) $x = 7{,}5$; c) $y = 10$. 969. 60 km. 970. 50 perc múlva. 973. a) Nem; b) nem; c) nem. 974. a) (0; 0); b) (2; 0). 976. a) (3; 2). 981. 1) a) $y = 3 - \frac{3}{4}x$. 983. a) Nem. 984. a) Egy; d) egyik sem. 985. a) (0; 1). 986. a) (3; –1); d) (0; 1). 987. $a = 7$. 990. a) $c = 4$; d) $c = 5$. 991. a) $n = 3$; d) $n = 2$. 992. a) $n = 0$; d) $n = 0$. 993. a) (0; 0); c) (5; 0). 994. a) (1; 0); d) (–1; 2). 995. a) (–2; 0); d) (–2; 2). 997. a) (1; 1). 998. a) Nem. 999. a) $a = 8$; d) $a = \pm 3$.

1000. a) $a = 8$; d) $a = -3$. 1001. 18. 1002. a) 27; d) 72. 1003. 25. 1004. 36. 1005. 37. 1006. 5 db 7 m-es és 4 db 8 m-es cső. 1011. $a = 1$. 1016. b) Nem. 1017. a) (0; –2) és (10; 0); d) $\left(0; \frac{1}{4}\right)$ és $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$. 1018. b) Nem. 1022. 2,5. 1024. a) 7; d) –2. 1026. a) $c = 11$; d) $c = -9$. 1028. a) $b = -4$; d) $b = -9$. 1030. a) (0; 3) és (2; 0). 1047. Igen; nem. 1050. a) 290 km; b) 110 km. 1051. 28%-kal. 1052.

a) $x = \pm 8$; b) $x = 7$ vagy $x = -3$. 1054. a) Végtelen számú. 1055. a) Nem. 1057. a) Igen; d) igen. 1064. a) Egy; d) végtelen számú. 1066. Végtelen számú. 1071. a) 1) Ha $a \neq \frac{1}{3}$; 2) ha $a = \frac{1}{3}$. 1072. a) 1) Ha $b = -6$; 2) ha $b \neq -6$. 1073. a) Nem; b) igen (1,2). 1074. a) $k = 1$. 1076. a) -75. 1077. a) $x^2 + x - 6$; d) $-z^2 - 2z + 15$. 1078. $100a + 10b + c$. 1079. 5. 1081. 170 kg réz, 20 kg cink, 10 kg ón. 1082. b) $y = -5x$. 1083. b) $x = 3y - 5$. 1084. a) $y = 3x - 8$. 1086. a) (7; 1). 1087. a) (1; 2). 1088. a) (11; 13). 1089. a) (3; 2). 1090. a) (8; 1). 1091. a) (7; –3). 1092. a) (0; 2). 1093. a) A rendszernek nincs megoldása. 1094. a) (3; 2). 1095. a) (16; 7). 1096. a) (–0,5; –2). 1097. a) (10; 2). 1098. a) (10; 2). 1099. a) (–61; 14).

1100. a) (–1; 8); b) (5; 6). 1101. a) (2; 1); b) $(2; -\frac{1}{11})$; c) (7; –0,7). 1102. a) (1; –1). 1103. a) (8; 13). 1104. a) (18; 6). 1105. a) (20; 20). 1106. a) (1; – 1,5); b) (5,6; –0,2). 1107. a) (21; 16); c) (5,25; 1,375). 1108. (11; 4; 5). 1109. (7; 10; 9). 1112. a) $8a^3 - m^3$. 1113. a) $a^9 - 1$. 1114. a) $a^6 + 1$. 1115. a) 1; c) 1. 1120. a) (5; 2). 1121. b) $(1; \frac{2}{3})$. 1122. a) (5,5; 2). 1123. a) (7; 1). 1124. a) (1; 2). 1125. a) (11; 13). 1126. a) (3; 2). 1127. a) (3; 2). 1128. a) (16; 7). 1129. a) (–0,5; –2). 1130. a) $(3a; a)$. 1131. a) $\left(\frac{n-m}{5}; \frac{8m-3n}{35}\right)$. 1132. b) (2; 2). 1133. a) (3; 1). 1134. a) (2; 1). 1135. a) (10; 2). 1136. a) (3; 3). 1137. a) (1; 1). 1138. a) (9; 8). 1139. a) (2; 1). 1140. a) (4; 3). 1141. b) $(0; -1\frac{3}{7})$. 1142. a) (7; 1). 1143. a) (3; 2). 1144. b) (10; 1). 1145. a) (4; 1). 1146. a) (3; 2). 1147. b) (2,2; 3). 1148. (–1; –2). 1150. a) (1; 2; 3). 1151. a) (1; 3; 5). 1152. a) (3; 5; 7). 1153. a) M e g o l d á s. Kivonjuk az első egyenletet a másodikból, s ezt kapjuk: $z = 2x$. Ekkor $y = 12 - 3x$, y pozitív egész szám lesz, ha $x = 1, 2, 3, 4$. Behelyettesítjük x ezen értékeit az $y = 12 - 3x$ és $z = 2x$ egyenlőségekbe, és az egyenletrendszer következő megoldását

kapjuk: (1; 9; 2), (2; 6; 4), (3; 3; 6), (4; 0; 8). 1154. Útmutatás: $z = 9$, $2x + 3y = 68$; $y = 0, 2, 4, 6, \ldots, 22$. 1155. a) 7,9. c) 207. 1160. 6 m és 3 m. 1161. 20 kőműves és 30 ács. 1162. 20 km/h; 3 km/h. 1165. 24 és 11,5. 1166. 45,4 és 30,4. 1167. a) 11 és 1; b) 25 és 1. 1168. 6 és 3. 1169. 26 és 15. 1170. 45 és 30. 1171. 69 és 13. 1172. 73 és 12. 1173. 0,4 hr., 0,55 hr. 1174. 36 éves és 12 éves. 1175. 36 könyv és 29 könyv. 1176. 38 tanuló és 34 tanuló. 1177. 8 kg és 5 kg. 1178. 21 m és 14 m. 1179. 14 m és 21 m. 1180. 102,5 ha és 97,5 ha. 1181. $36\frac{2}{3}$ ha és $63\frac{1}{3}$ ha. 1182. 46 cm és 38 cm. 1183. a) 33 cm és 30 cm; b) $29\frac{16}{19}$ cm és $33\frac{3}{19}$ cm. 1184. 34 cm, 24 cm és 24 cm. 1185. 22 cm, 20 cm és 20 cm. 1186. a) 7,5 és 3,5; b) 8,5 és 3,5. 1188. 9,8 km/h és 8,2 km/h. 1191. 12 km/h, 60 km. 1192. 20 nap és 30 nap. 1193. 2 óra és 4 óra. 1194. 5 km/h és 3 km/h. 1195. 18 és 7 vagy –18 és –7. 1196. 30 könyv és 20 könyv. 1197. 24 gyerek, 9 asztal. 1198. 6 rúd, 8 veréb. 1199. 40 éves és 12 éves.

1200. 10 éves és 4 éves. 1201. 5 zsákot és 7 zsákot. 1202. 20 birka. 1203. 23 fácán és 12 nyúl. 1204. 21 m/s és 9 m/s. 1205. 20 m/s és 5 m/s. 1206. 50. 1207. a) $y = 2x + 1$. 1209. a) $\left(50+\frac{1}{2}n\right)$ ha és $\left(50-\frac{1}{2}n\right)$ ha. 1210. a) $\frac{1}{5}a$, $\frac{3}{10}a$, $\frac{1}{2}a$; b) $\frac{1000k}{k+p+t}$, $\frac{1000p}{k+p+t}$, $\frac{1000t}{k+p+t}$. 1212. $\frac{100m}{p+k}$. 1213. b) 1. 1214. a) 8. 1215. a) 4. 1219. –5. 1220. Nem lehet. 1221. $a = 0$ esetén. 1223. 150 tallér, 21 vásárló. 1224. 84 éves. 1225. 15 méh. 1226. 7,5 és 2,5. 1227. 4 és 6. 1228. $9\frac{1}{5}$ forintra. 1229. 36 tanuló. 1230. 12 birka. 1231. 32 év, 14 év és 12 év. 1232. 1440 alkatrész. 1233. 150 munkapad. 1234. 240 m^3 és 200 m^3. 1235. 140 ha. 1236. 20 nap és 30 nap.

1237. 80 km. 1238. 1320 km, 230 km/h. 1241. b) –0,6. 1243. b) $-\frac{3}{2}a^2x^5y^2$. 1244. d) $0{,}125m^6$. 1247. d) $4x - y - 3x^2y +$ $+ 3xy^2 - 10$. 1248. a) $3x^6 - 2x^2 - 8$; d) $b^2 - 8b^2c - c^2b$. 1249. a) $6x^5 - 15x^2 + 3x$; f) $15mn^5 + 9mn^3 - 3m$. 1250. b) $-7x^4y +$ $+ 32xy^3 - 10x^3y^3$. 1251. a) $2x^3 + 5x^2 + 14x$. 1253. a) $4a^2 - b^2$; f) $x^2 - y^2 - z^2 + 2yz$. 1254. c) $0{,}0081x^{12} - x^4y^8$. 1255. d) x^4. 1256. f) $(abc - 11x^3)(abc + 11x^3)$; i) $(a - b - c)(a + b + c)$. 1257. d) 404; h) $53\frac{1}{3}$. 1258. a) $0{,}16a^4 - 4a^3b + 25a^2b^2$. 1259. a) $x^2 -$ $- 2xy^2 + y^4$; e) $0{,}01x^2y^2 - xy + 25$. 1260. c) $3x^2 + 7xy$. 1263. a) $x^3 +$ $+ 9x^2 + 27x + 27$; f) $8a^3 + 36a^2 + 54a + 27$. 1264. b) $a^2(a - 1) \times$ $\times (c^2 + 1)$; e) $x(y - 4)(z - 5)$. 1265. a) $(a - b)(a + b - 1)$. 1266. c) $(x - y + 4)(x + y - 4)$. 1267. d) $(x + 5)(x - b)(x + b)$. 1268. a) $(a - b)^2(x + 1)$. 1271. a) 1. 1272. a) 25. 1273. a) 0 és $\frac{1}{5}$; c) 0 és 0,3. 1274. –4; –1; 1. 1275. a) $y = x + 4$; e) $y = \frac{1}{x}$. 1276. $b = \frac{12}{a}$. 1277. $180° - 3\alpha$. 1278. $200 - 2{,}5x$. 1279. a) Mindegyik szám; d) mindegyik szám, kivéve $\frac{1}{3}$. 1282. a) 3; $\frac{2}{3}$; –1. 1283. a) $y = 3x$. 1287. a) $x + 4y - 11 = 0$. 1289. –5. 1290. 9. 1292. a) (5; 2). 1293. a) (2; 3). 1294. c) (10; 5). 1295. (3; 2). 1297. a) (0; 1). 1299. $9\frac{7}{9}$ m és $12\frac{2}{9}$ m.

1300. 20 nap és 30 nap. 1301. 800 t és 600 t. 1302. 100 t és 300 t. 1303. 24 g és 16 g. 1304. 6 : 7. 1305. 70 kg, 50 kg és 130 kg. 1306. 12 kg, 10 kg és 14 kg. 1307. 160 tojás. 1308. 9 m. 1309. 46 és 11. 1310. 1,25 hr. 1311. 5 ember. 1312. 2,1 km. 1313. 12 km. 1322. 9 és 28 rész. 1323. 18 éves. 1324. 3456 birka. 1325. 79 frank és 96 centime. 1326. 7 gyerek. 1327. 1 ökör, 9 tehén.

TÁRGYMUTATÓ

Abszcisszatengely 189
Abszolútérték 284
Algebra 5
Áltörtek 282
Arány 286
Arányos mennyiségek 287
Arányosság 286
– alaptulajdonsága 287
– tagjai 286
Azonosságok 52
Csoportosítás 126
Egész kifejezések 46
Egész számok 284
Egyenértékű egyenlet 14, 216
Egyenes arányosság 201
Egyenlet 7
Egyenlet gyöke 8
– tagjai 7
Egyenletek görbéi 222
– megoldása 8
– tulajdonságai 15
Egyenletrendszer 228
– megoldása 229
Egyszerűsíthetetlen tört 282
Egytag 74
Egytagok összege 84
– szorzása 75
Együttható 75
Elsőfokú egyenlet 21
Független változó 180
Függő változó 180
Függvény 179
– értékkészlete 180
– értelmezési tartománya 180
– változója 180
Függvények görbéi 190
Hányados 278
– alaptulajdonsága 281
Hatvány alapja 58
– alaptulajdonsága 67
– tulajdonságai 67
Hatványok szorzása 67
Hatványra emelés 58
Kerekítés 281
Kéttag 84
– köbe 150
– négyzete 131
Kétváltozós egyenlet 215
– egyenletek megoldása 216
Kiemelés a zárójel elé 119
Kifejezés értéke 46
Kifejezések átalakítása 52
Kivonandó 278
Koordináta-rendszer kezdőpontja 189
Koordinátasík 189
Koordinátatengely 188
Köbök különbsége 157
– összege 157
Közönséges törtek 282
Legkisebb közös többszörös 280
Legnagyobb közös osztó 280
Lineáris egyenlet 21
Lineáris függvény 200
Maradék 279
Matematikai modell 28
Műveletek fokszáma 59
– sorrendje 59
Műveleti tulajdonságok 286
Negatív számok 284
Négyzetek különbsége 140
Nem teljes hányados 279

Nemnegatív számok 284
Normál alakú egytag 74
– többtag 85
Ordinátatengely 189
Origó 189
Oszthatóság ismertetőjelei 279
Osztó 278
Összeadandók 278
Összetett számok 279
Páros számok 279
Pont abszcisszája 189
Pont koordinátái 189
– ordinátája 189
Racionális számok 284
– kivonása 285
– osztása 285
– összeadása 285
– szorzása 285
Relációs jelek 285
Relatív törzsszámok 280
Rövidített szorzás
képletei 131, 174
Szám hatványa 58
– köbe 58
– négyzete 58
– többszöröse 279
– törtrésze 280
Számjegyek 279
Számkifejezések 45
Számláló 282
Számműveletek törvényei 286
Számok összehasonlítása 278
Számtani közép 284
Százalék 288
Százalékarány 288
Szorzat 278
Tényezőkre bontás 280
Természetes számok 284
Tizedes törtek 280
Tizedes törtek kivonása 281
– osztása 281
– összeadása 281
– szorzása 281
Többtag 84
– fokszáma 85
– tényezőkre bontása 119
Többtagok kivonása 91
– különbsége 91
– összeadása 91
– összege 91
– szorzása 105
Tört alaptulajdonsága 282
– nevezője 282
– reciprok értéke 283
Törtek alkotórészei 282
– egyszerűsítése 282
– kivonása 282
– osztása 283
– összeadása 282
– szorzása 283
Törzsszámok 279
Valódi tört 282
Változókat tartalmazó
kifejezések 45
Vegyes törtek 282

Навчальне видання

БЕВЗ Григорій Петрович
БЕВЗ Валентина Григорівна

АЛГЕБРА

Підручник для 7 класу загальноосвітніх навчальних закладів з навчанням угорською мовою

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Переклад з української
Перекладач *Євген Євгенович Ґулачі*
Угорською мовою
Зав. редакцією *А. А. Варга*
Редактор *Б. Б. Ковач*
Художнє оформлення *А. М. Віксенко*
Фото *А. Віксенко, К. Дмитренко, В. Соловйов*
Малюнки *А. Лапушена*
Коректор *І. О. Петро*
На обкладинці фрагмент картини *Сальвадора Далі*

Підп. до друку 30.10.07. Формат 60×90/16. Папір офс. Гарнітура Таймс. Друк офс. Умов. друк. арк. 19,0+0,25 форзац. Обл.-вид.арк. 18,8+0,3 форзац. Тираж 2370 пр. Свідоцтво держ. реєстру ДК № 2980. Вид. № 10. Зам. № 131П.

Державне підприємство
"Всеукраїнське спеціалізоване видавництво "Світ"
79008 м. Львів, вул. Галицька, 21
www.dsv-svit.lviv.ua
e-mail: office@dsv-svit.lviv.ua

Друк ВАТ "Патент"
88006 м. Ужгород, вул. Гагаріна, 101
e-mail: patent@uzh.ukrtel.net